

Moduł 1

SYGNAŁY ANALOGOWE I CYFROWE

PRZEMYSŁAW DYMARSKI

SYGNAŁ ANALOGOWY, TRANSFORMATA FOURIERA, PRÓBKOWANIE, DTFT, TRANSFORMATA Z, DFT, DCT, FILTRY CYFROWE

W MODULE 1 PRZEDSTAWIONO METODY ANALIZY SYGNAŁÓW W DZIEDZINIE CZASU I CZĘSTOTLIWOŚCI, Z NACISKIEM NA SYGNAŁY CZASU DYSKRETNEGO. PORÓWNANO NARZĘDZIA ANALIZY WIDMOWEJ, JAK TRANSFORMATA FOURIERA W CZASIE CIĄGŁYM I DYSKRETNYM, DYSKRETNA TRANSFORMATA FOURIERA, DYSKRETNA TRANSFORMATA KOSINUSOIDALNA. PRZEDSTAWIONO ZAGADNIENIE FILTRACJI CYFROWEJ Z ZASTOSOWANIEM TRANSFORMATY ZET. Z MODUŁEM 1 POWIĄZANE SĄ DWIE SERIE EKSPERYMENTÓW ILUSTRUJĄCE WYKŁAD (PRÓBKOWANIE I TRANSFORMATY DFT I DCT) ORAZ JEDNO ĆWICZENIE LABORATORYJNE (FILTRACJA CYFROWA). SĄ ONE OPISANE W MODULE 4.

Spis treści

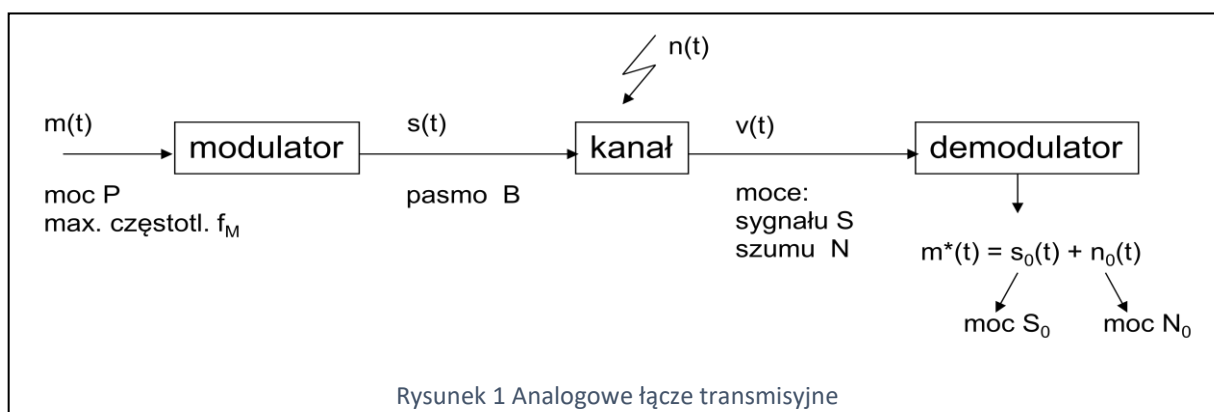
| | | |
|-------|---|----|
| 1 | Sygnały w łączy telekomunikacyjnym | 3 |
| 2 | Sygnały i układy analogowe (repetitorium)..... | 7 |
| 2.1 | Podstawowe przekształcenia sygnału | 7 |
| 2.2 | Energia i moc sygnału | 8 |
| 2.3 | Korelacja | 8 |
| 2.4 | Operacja splotu i jej zastosowanie do opisu układów liniowych | 9 |
| 3 | Transformata Fouriera (repetitorium) | 10 |
| 3.1 | Widmo sygnału | 10 |
| 3.2 | Właściwości transformaty Fouriera | 11 |
| 3.2.1 | Przesunięcie w czasie | 11 |
| 3.2.2 | Przesunięcie w częstotliwości | 12 |
| 3.2.3 | Różniczkowanie | 12 |
| 3.2.4 | Splot i autokorelacja | 12 |
| 3.2.5 | Gęstość energii i gęstość mocy..... | 12 |
| 3.2.6 | Impuls Diraca | 13 |
| 3.2.7 | Widma sygnałów harmonicznycy i okresowych | 14 |
| 3.2.8 | Odwracalność transformaty Fouriera (materiał dodatkowy) | 15 |
| 3.2.9 | Opis układów liniowych w dziedzinie częstotliwości | 16 |
| 4 | Próbkowanie..... | 16 |
| 4.1 | Próbkowanie idealne | 16 |
| 4.2 | Próbkowanie momentalne | 20 |
| 4.3 | Próbkowanie sygnałów pasmowych..... | 21 |
| 4.4 | Symulacje próbkowania sygnałów audio i sygnału sinusoidalnego | 22 |
| 5 | Analiza widmowa sygnałów dyskretnych..... | 22 |
| 5.1 | Transformaty DTFT i DFT | 22 |
| 5.2 | Transformata DCT..... | 25 |
| 5.3 | Wpływ okna czasowego na analizę widmową..... | 27 |
| 5.4 | Symulacje DFT i DCT sygnałów audio i sygnału sinusoidalnego | 28 |
| 6 | Transformata Zet..... | 28 |
| 6.1 | Związek transformaty Zet z DTFT..... | 28 |
| 6.2 | Właściwości transformaty Zet | 29 |
| 6.3 | Delta Kroneckera | 31 |
| 6.4 | Obliczanie prostej i odwrotnej transformaty Zet | 31 |
| 6.5 | Obliczanie widma DTFT z transformaty Zet..... | 33 |
| 7 | Filtry cyfrowe..... | 34 |
| 7.1 | Cyfrowe układy liniowe niezależne od czasu..... | 34 |
| 7.2 | Stabilność układu | 35 |
| 7.3 | Równania różnicowe..... | 35 |
| 7.4 | Filtry o skończonej i nieskończonej odpowiedzi impulsowej | 36 |
| 7.5 | Charakterystyka częstotliwościowa filtru | 36 |
| 7.6 | Projektowanie filtrów | 38 |

| | | |
|-------|---|----|
| 7.6.1 | Projektowanie filtrów FIR metodą próbkowania w dziedzinie częstotliwości..... | 39 |
| 7.6.2 | Projektowanie filtrów FIR metodą okien czasowych | 40 |
| 7.6.3 | Filtr Butterwortha jako przykład filtru o nieskończonej odpowiedzi impulsowej | 42 |
| 7.6.4 | Filtr eliptyczny (Cauera)..... | 43 |
| 7.6.5 | Ćwiczenie laboratoryjne – filtry cyfrowe..... | 45 |
| 8 | Zadania i testy..... | 45 |
| 8.1 | Przykładowe zadania z rozwiązaniami..... | 45 |
| 8.2 | Zadania do rozwiązania | 51 |
| 9 | Biblioteka..... | 53 |
| 10 | Bibliografia..... | 53 |

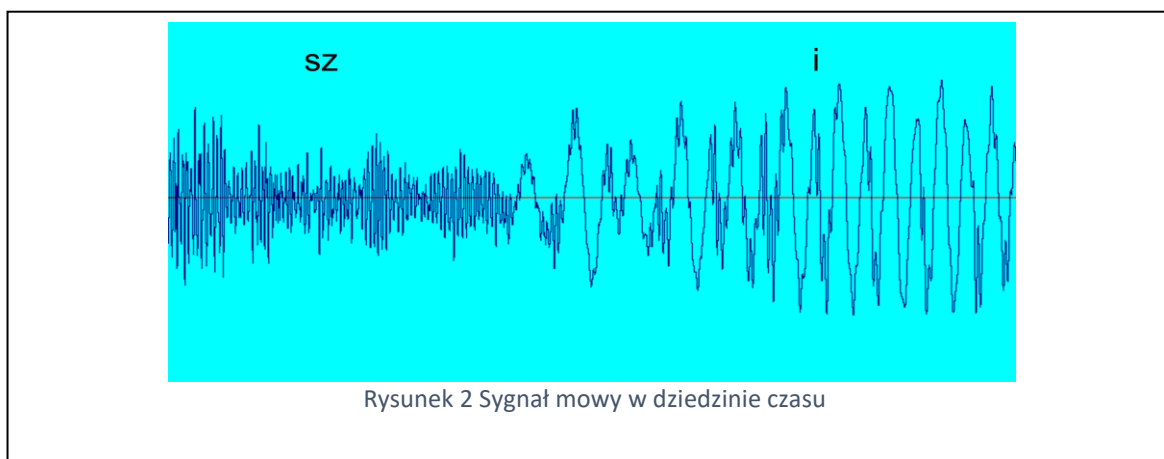
1 Sygnały w łączy telekomunikacyjnym

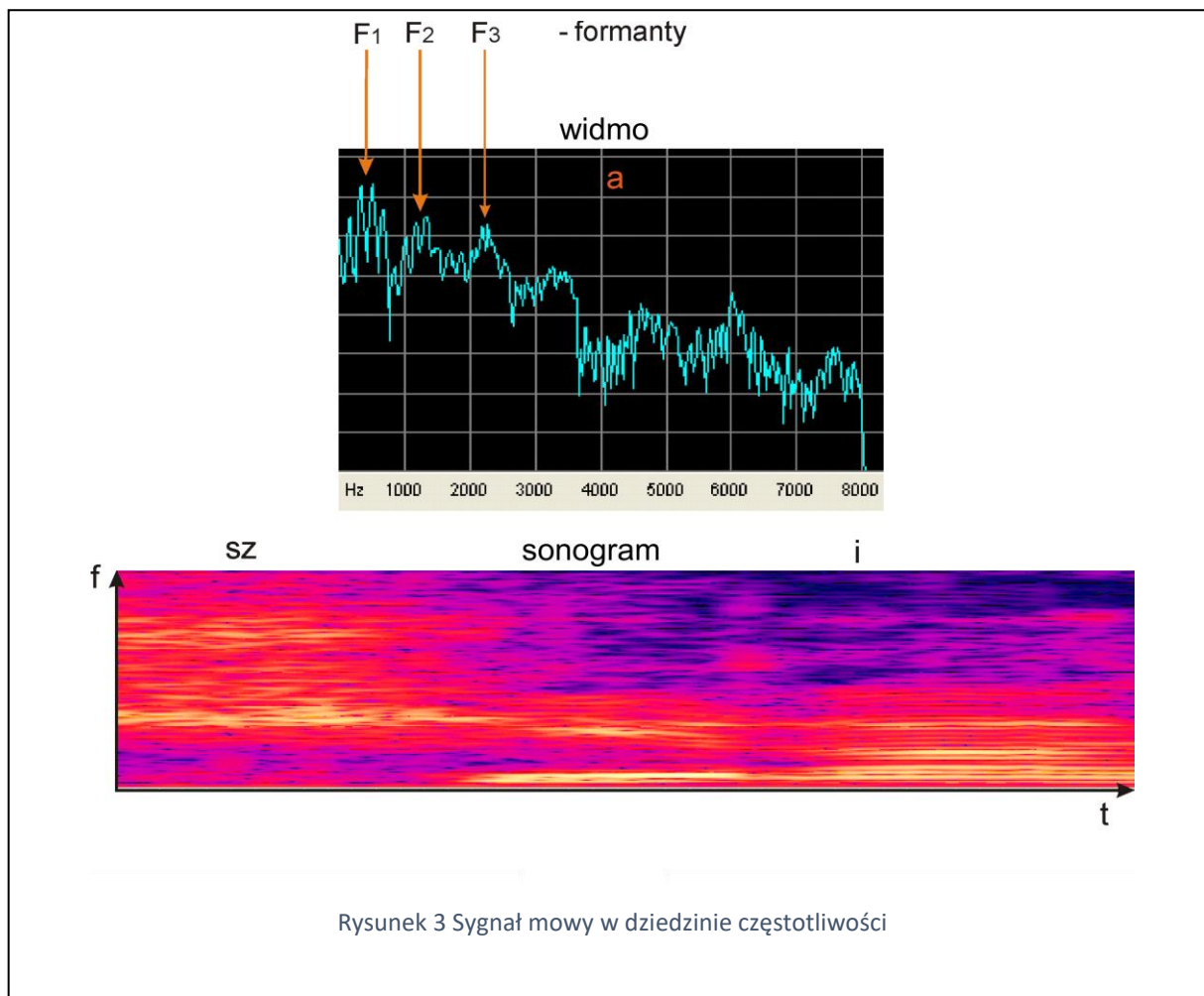
Sygnał to pewna funkcja, najczęściej czasu (np. napięcie na wyjściu mikrofonu) ale też odległości (obraz 2D lub 3D), wykorzystywana do przenoszenia informacji. Informacja może mieć z natury charakter analogowy, tzn. przyjmować nieskończoną liczbę wartości (np. mowa, muzyka, obraz). Może mieć też charakter dyskretny, przyjmując skończoną liczbę wartości (np. tekst). Podobnie przenoszące ją sygnały, mogą mieć charakter analogowy (np. sygnał radiofonii komercyjnej FM) lub cyfrowy (np. alfabet Morse'a). Obecnie sygnały cyfrowe stosuje się do transmisji wiadomości z natury analogowych, dzięki przetworzeniu analogowo-cyfrowemu mowy, muzyki czy obrazu.

Przyjrzyjmy się sygnałom występującym w analogowym łączy transmisyjnym (Rys.1). Na wejściu mamy **sygnał modulujący**, oznaczony przez $m(t)$, np. sygnał mowy. Ma on moc P watów i zawiera składowe o niskich częstotliwościach, do częstotliwości f_M . Jest to szerokość pasma tego sygnału.

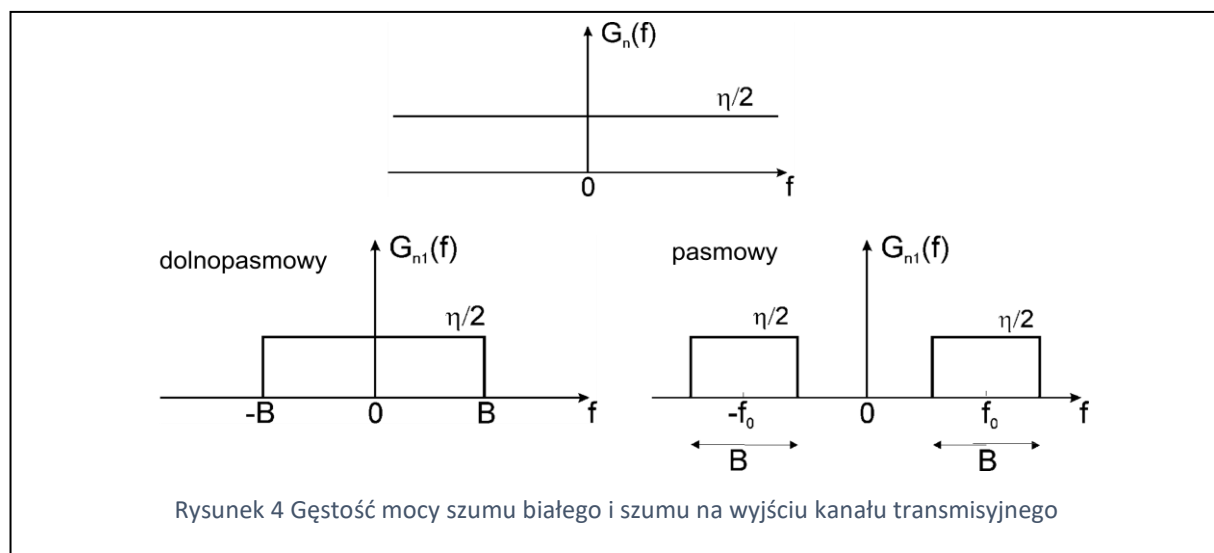


Na Rys.2 pokazano przykładowy fragment sygnału mowy, składający się z głoski bezdźwięcznej „sz” i dźwięcznej „i”. Mowa dźwięczna składa się z podobnych do siebie segmentów, mówimy że jest pseudookresowa. Ta właściwość wykorzystywana jest w koderach mowy, m.in. koderach telefonii komórkowej, do uzyskania efektywnej kompresji. Na Rys.3 pokazano widmo głoski dźwięcznej „a”, a ściślej - moce składowych o różnych częstotliwościach określone w dB. Powyżej częstotliwości 4 kHz moce składowych harmonicznych maleją, z tego względu przez długi czas ograniczono pasmo mowy w telefonii do 4 kHz. Moc sygnału mowy dźwięcznej koncentruje się w kilku wąskich podpasmach częstotliwości, są to tzw. **formanty**. Ich położenie zależy od wypowiedzanej głoski, dzięki czemu jesteśmy w stanie je rozróżnić. Na Rys 3 pokazano też zmiany widma w funkcji częstotliwości dla sygnału z Rys.2, tzw. sonogram. Oś częstotliwości obejmuje zakres 0-8 kHz, kolor żółty oznacza silną koncentrację mocy. Można zauważyć, że głoska bezdźwięczna posiada szersze pasmo sięgające 7-8 kHz. Aby poprawić jakość mowy, w telefonii podnosi się obecnie pasmo do 7 kHz.





Główną rolą modulatora jest podniesienie częstotliwości tego sygnału, aby dało się go przesać kanałem bezprzewodowym. Na wyjściu modulatora mamy **sygnał zmodulowany** $s(t)$, który zajmuje pasmo B Hz, najczęściej szersze niż sygnał $m(t)$. W kanale pojawiają się zakłócenia, np. szum pochodzenia termicznego.



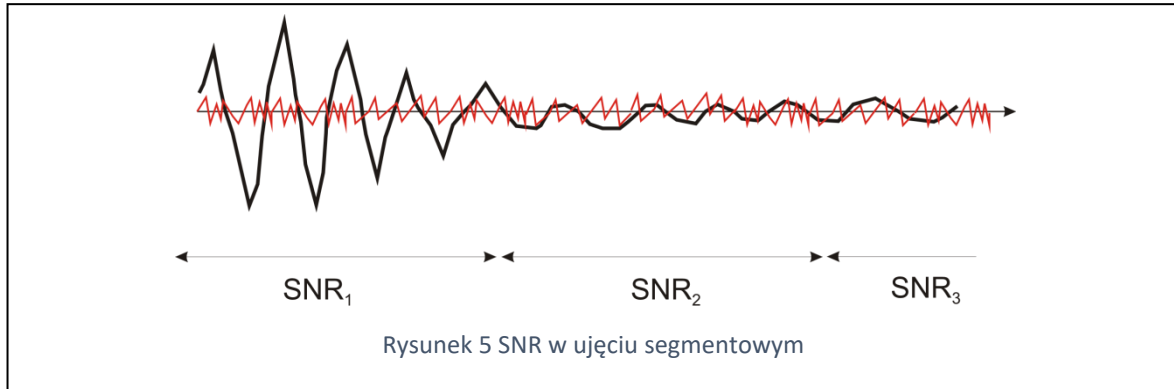
Szum modeluje się jako addytywny biały szum gaussowski (AWGN – additive white Gaussian noise). Jest to model matematyczny, gdyż taki sygnał nie istnieje. „Biały” oznacza stały rozkład mocy (tzw. gęstość mocy) na osi częstotliwości – na Rys. 4 η W/Hz ($\eta/2$ przy dwustronnej osi częstotliwości). Po przejściu przez kanał transmisyjny, który ma zawsze ograniczone pasmo (B Hz), szum posiada już skończoną moc $N = \eta B$.

Na wyjściu kanału pojawia się sygnał $v(t)$, na który składa się sygnał użyteczny o mocy S i szum o mocy N . Można w tym miejscu określić jakość odebranego sygnału, obliczając stosunek mocy sygnału użytecznego do mocy szumu (Signal to Noise Ratio, SNR). SNR wyraża się najczęściej w decybelach (dB):

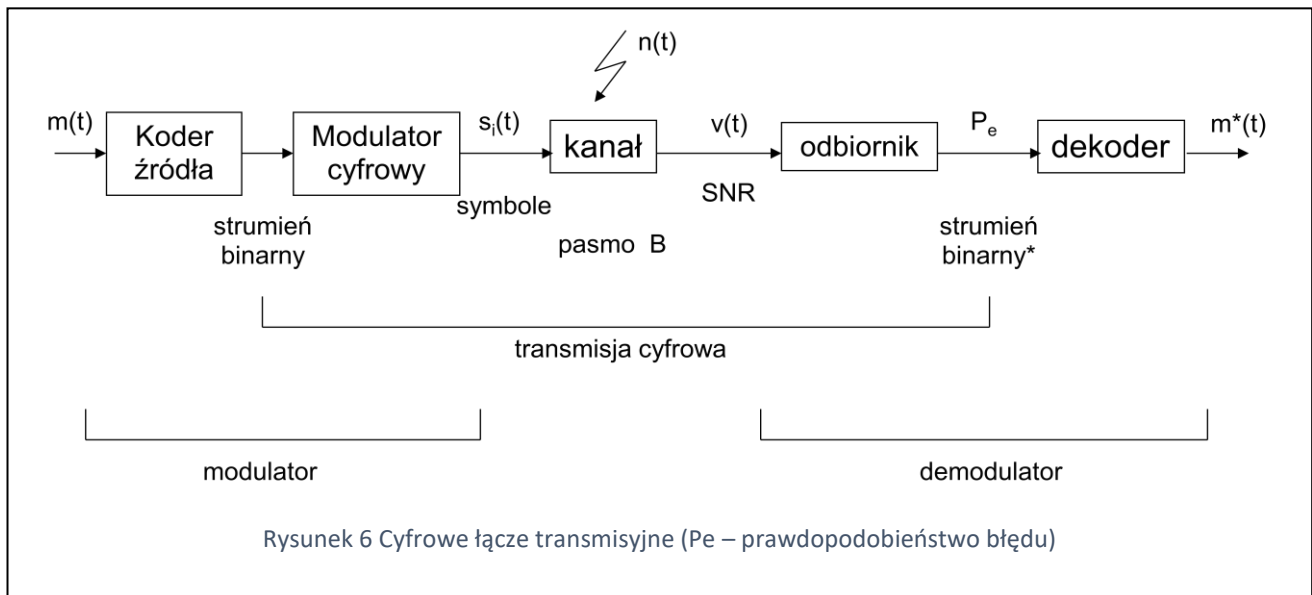
$$SNR = \frac{S}{N} \quad SNR[dB] = 10 \log_{10} \frac{S}{N} \quad (1)$$

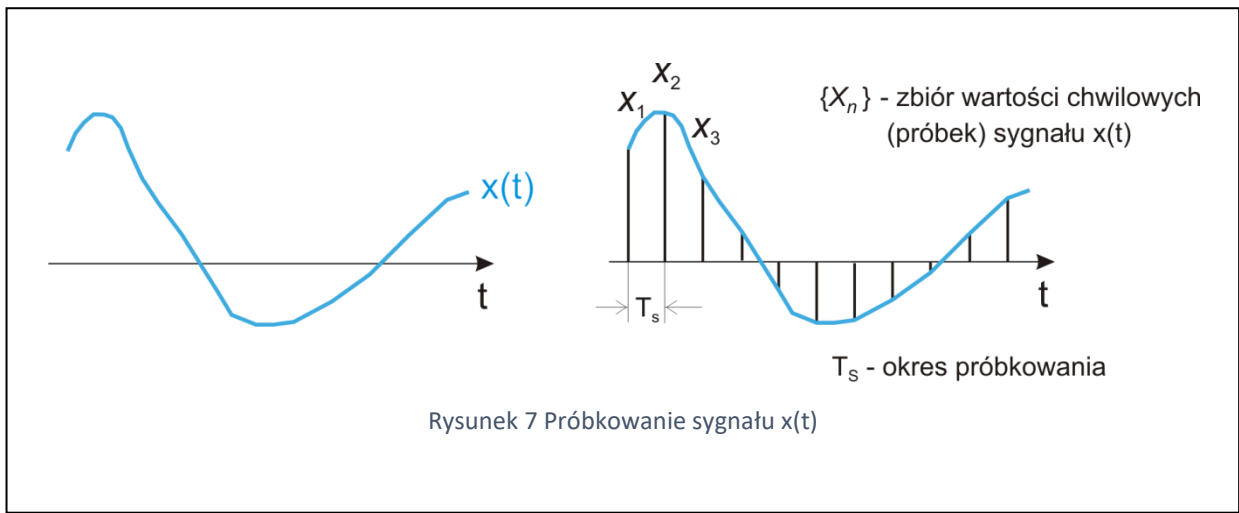
Demodulator odzyskuje kopię sygnału modulującego $s_0(t)$ z szumem $n_0(t)$. Jakość **sygnału zdemodulowanego** $m^*(t)$ określa się stosunkiem mocy obu składowych, podobnie jak w (1): $SNR_0 = S_0/N_0$. SNR nie jest najlepszym kryterium jakości, co pokazano schematycznie na Rys. 5. Sygnały akustyczne charakteryzują się silnymi zmianami mocy w czasie. Dodanie szumu o charakterze stacjonarnym spowoduje, że segmenty o małej mocy będą niesłyszalne na tle szumu. Wartość SNR obliczona jako stosunek średniej mocy sygnału akustycznego do mocy szumu może jednak przyjąć wysoką wartość, dzięki głośnym segmentom sygnału akustycznego. Aby zwiększyć wpływ cichych fragmentów sygnału na wartość SNR , oblicza się SNR w segmentach 10-30 ms, wyraża w dB i uśrednia:

$$SNR_{seg}[dB] = \frac{1}{M_s} \sum_{i=1}^{M_s} SNR_i[dB] \quad (2)$$

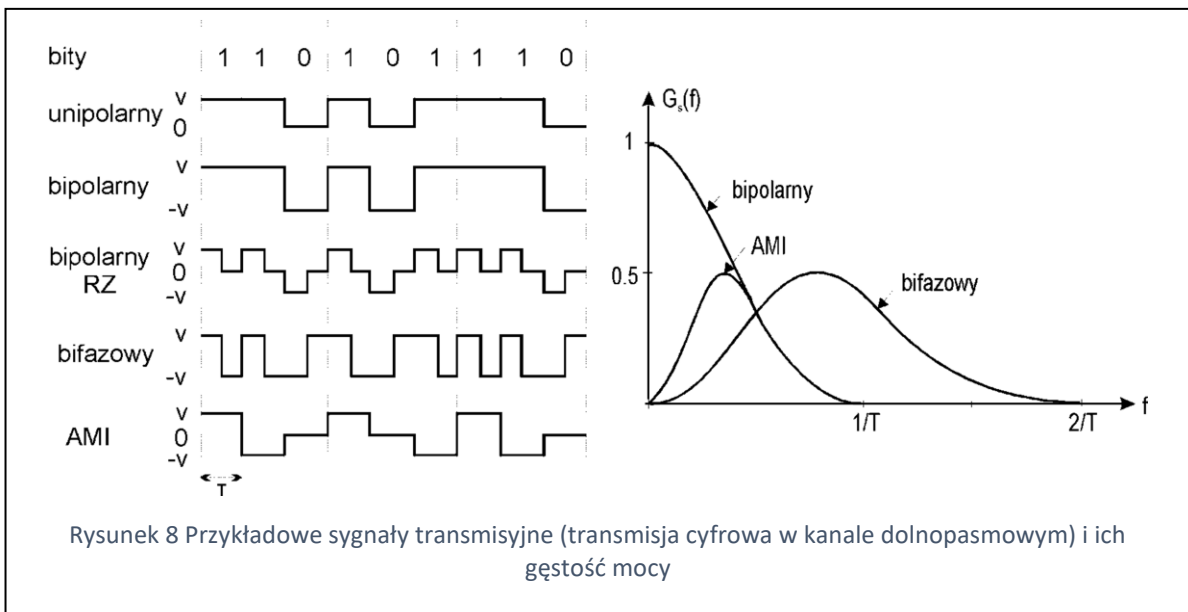


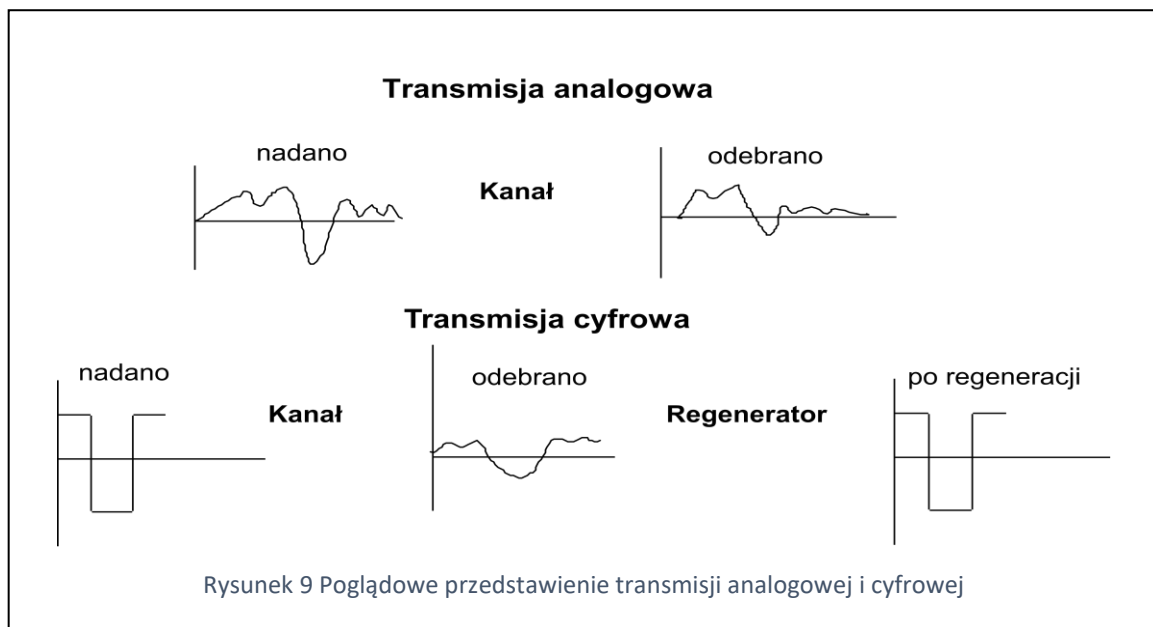
W transmisji cyfrowej (Rys.6) przesyła się strumień binarny. Może on pochodzić z sygnału analogowego, np. przetworzenia sygnału mowy na postać cyfrową w koderze źródła. Niezbędną czynnością jest tu próbkowanie – zastąpienie ciągłego sygnału szeregiem wartości chwilowych, tzw. próbek (Rys.7). W procesie kwantyzacji zaokrągla się wartości próbek do skończonej liczby wzorców, tzw. poziomów kwantyzacji. W procesie kodowania przypisuje się skwantowanym próbkom ciągi bitów. Operacje próbkowania, kwantyzacji i kompresji zostaną omówione w dalszej części podręcznika.





Transmitowanym bitom lub ciągom bitów (słowom kodowym) przypisuje się sygnały, tzw **symbole transmisyjne**. Ich charakter, w szczególności skład widmowy, zależy od kanału transmisyjnego (np. transmisja bezprzewodowa wymaga wykorzystania fali nośnej o wysokiej częstotliwości). Na Rys.8 pokazano przykładowe symbole wykorzystywane w transmisji kablowej na niskich częstotliwościach (tzw. pasmo podstawowe). Z rysunku wynika, że transmisja $1/T$ bitów na sekundę wymaga szerokości pasma kanału co najmniej $1/T$ Hz lub dwukrotnie większej. Okazuje się jednak, że można zmniejszyć to pasmo jeszcze dwukrotnie (twierdzenie Nyquista, omówione w Module 2).





Historycznie rzecz ujmując, transmisja cyfrowa wyprzedziła transmisję analogową (telegraf wykorzystujący elektromagnes znany był wcześniej niż telefon Bella). Na przełomie XIX i XX w. nastąpił burzliwy rozwój telefonii a latach 20-tych zeszłego wieku radiofonii analogowej. Od połowy zeszłego wieku wracamy jednak do telekomunikacji cyfrowej. Istotną przyczyną jest większa odporność na zakłócenia, co wyjaśniono w uproszczony sposób na Rys.9. W transmisji analogowej następuje kumulacja szumu w kolejnych kanałach – wzmacnianie stłumionego w kanale sygnału nie poprawia wartości SNR. Transmisja cyfrowa polega na rozpoznawaniu symboli – jeśli nie popełnimy błędów, jesteśmy w stanie zregenerować symbole i przesyłać je dalej.

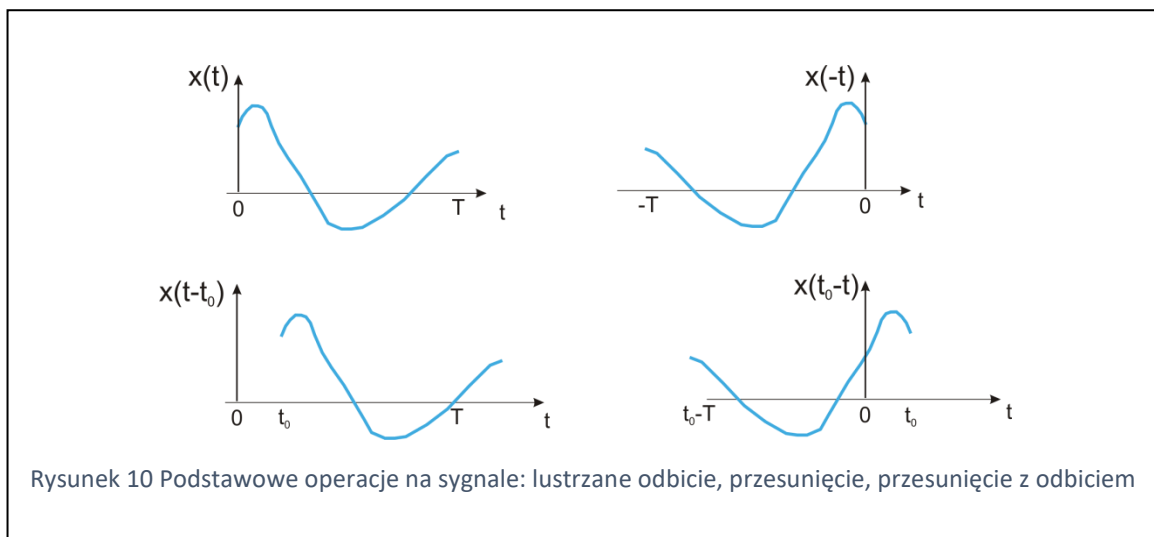
W Module 2 bardziej szczegółowo zajmiemy się transmisją sygnałów, w szczególności poszukamy odpowiedzi na bardzo istotne pytania:

- Ile symboli transmisyjnych na sekundę można przesłać w kanale o szerokości pasma B [Hz]? (maksymalna szybkość modulacji)
- Ile bitów na sekundę można przesłać bez przekłamań w kanale o szerokości pasma B [Hz], przy gęstości mocy szumu η [W/Hz], dysponując nadajnikiem o mocy S [W]? (maksymalna przepływność binarna [bit/s])
- Czym ograniczona jest jakość sygnału na wyjściu odbiornika, czyli jaka jest maksymalna wartość $SNR_0 = S_0/N_0$

2 Sygnały i układy analogowe (repetitorium)

2.1 Podstawowe przekształcenia sygnału

Przypomnijmy sobie podstawowe działania na sygnale $x(t)$ w dziedzinie czasu. Najczęściej mamy do czynienia z przesunięciem, $x(t-t_0)$ oznacza opóźnienie o t_0 . Odbicie lustrzane względem osi poziomej to odwrócenie polaryzacji ($-x(t)$), a pionowej to zmiana kierunku przebiegu czasu ($x(-t)$). Skalowanie w dziedzinie czasu jest opisane wzorem $x(at)$. Przesunięcie z lustrzanym odbiciem (Rys.10) posłuży nam do obliczania splotu dwóch sygnałów.



2.2 Energia i moc sygnału

W teorii sygnałów wyobrażamy sobie, że $x(t)$ to napięcie przyłożone do opornika 1Ω . Wówczas prąd jest równy napięciu, moc chwilowa wynosi $x^2(t)$, a energia wydzielona w czasie T wynosi

$$E = \int_0^T x^2(t) dt \quad (3)$$

Moc średnią otrzymamy dzieląc energię przez czas:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (4)$$

Sygnały o nieskończonym czasie trwania mogą mieć skończoną energię, np. sygnał

$x(t) = \exp(-at)$, $t \in (0, \infty)$, $a > 0$ ma energię

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_0^{\infty} (e^{-at})^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{-2a} e^{-2at} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{-2a} [0 - 1] = \frac{1}{2a}$$

Z kolei sygnały o nieskończonej energii mogą mieć skończoną moc średnią, do takich należy sygnał o stałej wartości chwilowej $x(t) = A$ i sygnał harmoniczny $x(t) = A \cos 2\pi f_0 t$.

Istotnie, moc chwilowa sygnału o stałej wartości chwilowej A wynosi A^2 i taka sama jest też moc średnia P .

Aby obliczyć moc średnią, w ogólnym przypadku oblicza się energię wydzieloną w czasie T , $E_T = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$

następnie dzieli się ją przez T i szuka się granicy dla $T \rightarrow \infty$:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_T}{T} \quad (5)$$

Dla sygnału harmonicznego $x(t) = A \cos 2\pi f_0 t$ otrzymuje się kolejno:

$$x^2(t) = A^2 \cos^2(2\pi f_0 t) = A^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t) \right] = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos(4\pi f_0 t)$$

$$\begin{aligned} E_T &= \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A^2}{2} dt + \frac{A^2}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(4\pi f_0 t) dt = \\ &= \frac{A^2 T}{2} + \frac{A^2}{8\pi f_0} [\sin(4\pi f_0 t)]_{-T/2}^{T/2} = \frac{A^2 T}{2} + \frac{A^2}{8\pi f_0} [\sin(2\pi f_0 T) + \sin(2\pi f_0 T)] = \\ &= \frac{A^2 T}{2} + \frac{A^2}{4\pi f_0} \sin(2\pi f_0 T) \\ P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_T}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{4\pi f_0 T} \sin(2\pi f_0 T) \right] = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

2.3 Korelacja

Korelacja dwóch sygnałów rzeczywistych $x(t)$ i $y(t)$ określa ich podobieństwo:

$\langle x, y \rangle = \int x(t)y(t)dt$. Tak zdefiniowana korelacja jest iloczynem skalarnym sygnałów, a autokorelacja – energią sygnału, a także jego normą podniesioną do kwadratu: $\langle x, x \rangle = \int x^2(t)dt = \|x\|^2 = E$. Najczęściej oblicza się korelację dla znormalizowanych sygnałów, podzielonych przez ich normy:

$$\rho(x, y) = \langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \rangle = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \quad (6)$$

Ważnym pojęciem jest **funkcja korelacji**, czyli korelacja sygnału $x(t)$ z przesuniętym w czasie sygnałem $y(t)$:

$$R_{xy}(t_0) = \int x(t)y(t - t_0)dt \quad (7)$$

Korelacja sygnału z jego przesuniętą kopią jest **funkcją autokorelacji**:

$$R_x(t_0) = \int x(t)x(t - t_0)dt \quad (8)$$

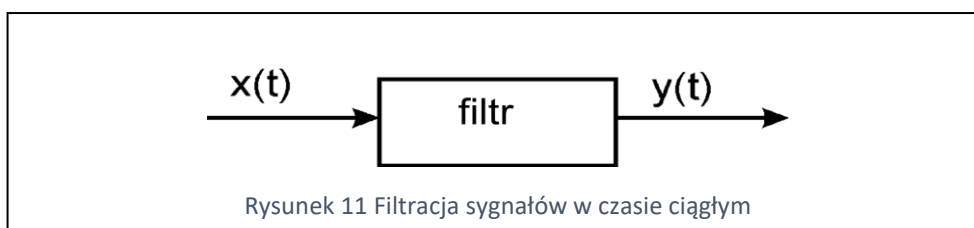
Dla $t_0=0$ przyjmuje ona największą wartość równą energii sygnału: $R_x(0) = \int x^2(t)dt = E$

2.4 Operacja splotu i jej zastosowanie do opisu układów liniowych

Splot dwóch sygnałów jest opisany przekształceniem całkowym:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (9)$$

Służą on do opisu układów (filtrów) liniowych o parametrach niezależnych od czasu.

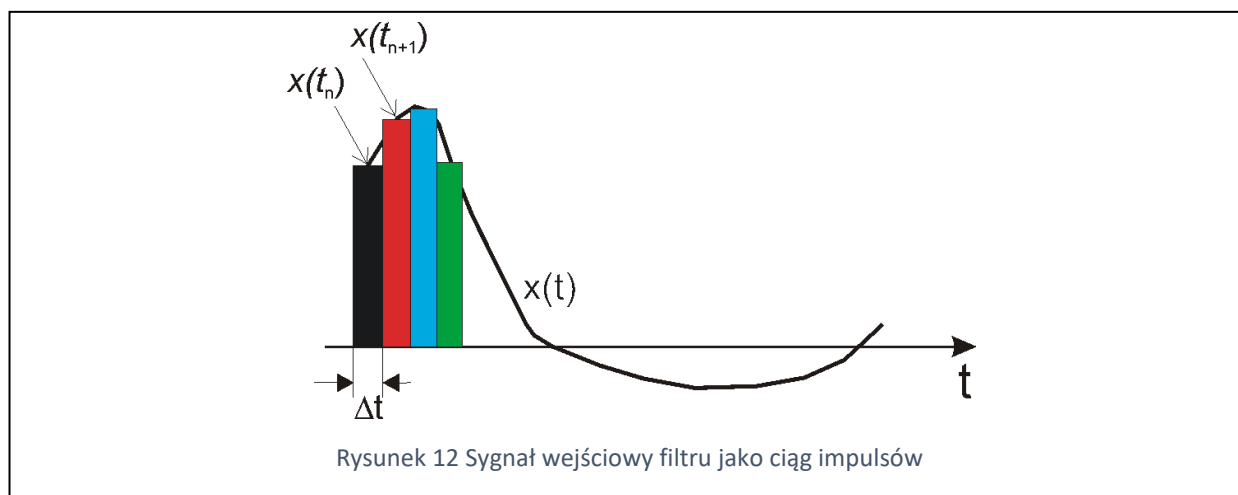


Przypomnijmy sobie co oznacza pojęcie liniowości. Filtr jest **liniowy** gdy spełnia **zasadę superpozycji**:

Jeśli sygnał wejściowy jest kombinacją liniową dwóch sygnałów: $x(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$, to sygnał wyjściowy jest również kombinacją liniową sygnałów, $y(t) = a y_1(t) + b y_2(t)$, z których pierwszy jest odpowiedzią filtru na pierwszy składnik sygnału wejściowego, a drugi – drugiego.

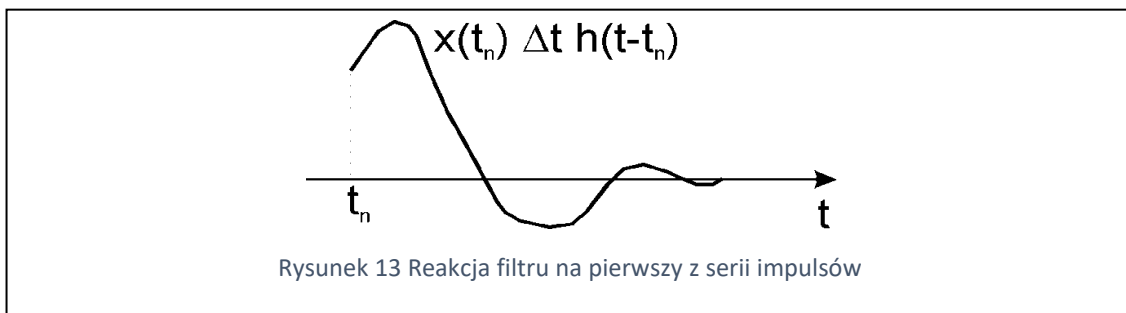
Niezależność filtru od czasu oznacza, że opóźniony sygnał wejściowy $x(t-t_0)$, wywołuje reakcję filtru w postaci $y(t-t_0)$, tzn. przebieg czasowy sygnału wyjściowego ulega jedynie opóźnieniu, jego kształt pozostaje bez zmian.

Jeżeli układ jest liniowy i niezależny od czasu, to sygnał wyjściowy jest splotem sygnału wejściowego i pewnego sygnału, zwanego odpowiedzią impulsową filtru.



Aby to zrozumieć, przedstawmy sygnał wejściowy filtru jako ciąg krótkich impulsów prostokątnych (Rys.12). Reakcję filtru na impuls pojawiający się w chwili t_n pokazano na Rys.13. Jej kształt zależy od samego filtru, natomiast przesunięcie na skali czasu zależy od położenia impulsu wejściowego (wynika to z niezależności

parametrów filtru od czasu). Amplituda sygnału wyjściowego jest proporcjonalna do amplitudy impulsu (wynika to z liniowości filtru). Jest też proporcjonalna do jego czasu trwania pod warunkiem, że rozważamy bardzo krótkotrwałe impulsy. Ostatecznie reakcją filtru na impuls wejściowy pojawiający się w chwili t_n będzie sygnał $x(t_n) \Delta t h(t - t_n)$.



Z liniowości filtru wynika również, że reakcja filtru na szereg impulsów (czyli sygnał wejściowy $x(t)$) jest sumą reakcji na pojedyncze impulsy. Suma we wzorze(10) może być zapisana w postaci całki spłotowej:

$$y(t) = \sum_n x(t_n)h(t - t_n)\Delta t \rightarrow \int x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$$y(t) = x(t) * h(t), \quad (10)$$

gdzie $h(t)$ – odpowiedź impulsowa filtru. Nazwa jest uzasadniona, gdyż z Rys.13 wynika, że $h(t)$ jest reakcją filtru na krótkotrwały impuls pojawiający się w chwili $t=0$, którego całka (w tym wypadku amplituda razy czas trwania) wynosi 1. Taki impuls nazywa się impulsem Diraca (lub deltą Diraca) i oznacza jako $\delta(t)$. Gdy sygnał wejściowy filtru jest impulsem Diraca, to na wyjściu pojawi się odpowiedź impulsowa tego filtru:

$$x(t) = \delta(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \delta(t) * h(t) = h(t) \quad (11)$$

3 Transformata Fouriera (repetitorium)

3.1 Widmo sygnału

Transformata Fouriera jest podstawowym narzędziem analizy widmowej, czyli wyszukiwania w sygnale składowych o różnych częstotliwościach. Transformatę Fouriera można interpretować jako korelację analizowanego sygnału $x(t)$ z zespoloną funkcją $e^{-j2\pi ft}$, zawierającą sygnały harmoniczne (cosinus i sinus) o częstotliwości f : $e^{-j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft)$.

$$X(f) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (12)$$

Zespolone widmo $X(f)$ jest funkcją częstotliwości, którą można wyrazić w hercach (Hz) lub jako pulsację (częstość kątową $\omega = 2\pi f$) w radianach na sekundę. W tym drugim przypadku transformata Fouriera wyraża się wzorem

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = X\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad (13)$$

Dla niemal wszystkich spotykanych w praktyce sygnałów transformata Fouriera jest odwracalna (będzie jeszcze o tym mowa na końcu tego podrozdziału). W dziedzinę czasu przeprowadza nas odwrotna Transformata Fouriera:

$$x(t) = F^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (14)$$

Podstawiając $f = \frac{\omega}{2\pi}$ otrzymuje się równoważny wzór na transformatę odwrotną:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)e^{j\omega t} d\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (15)$$

W dalszej części podręcznika będziemy stosować wzory (12) i (14) ze względu na symetrię i prostotę. Zauważmy, że widmo jest określone również dla częstotliwości ujemnych, co jest niezbędne do obliczenia transformaty odwrotnej. Zapisując widmo we współrzędnych biegunowych:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = |X(f)|e^{j\phi(f)} \quad (16)$$

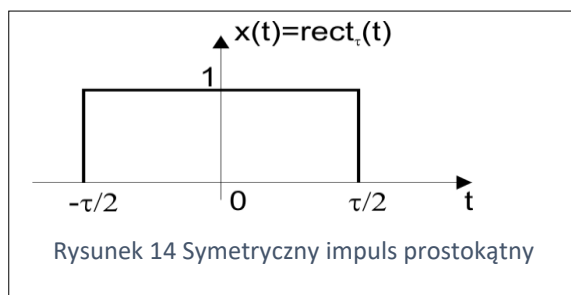
otrzymujemy widmo amplitudowe i fazowe. Widmo amplitudowe jest parzystą funkcją częstotliwości

$$|X(-f)| = |X(f)| \quad (17)$$

a widmo fazowe – funkcją nieparzystą :

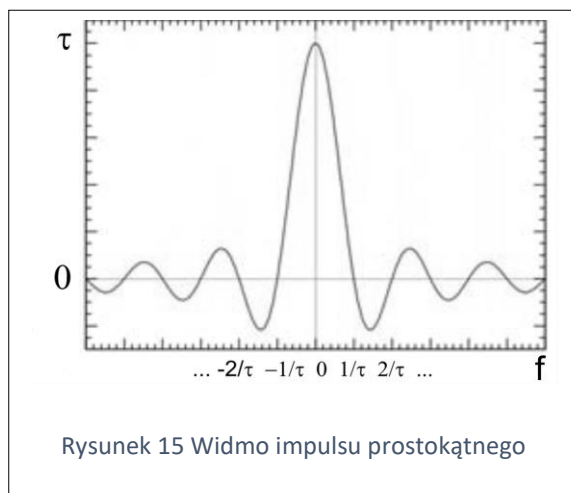
$$\phi(-f) = -\phi(f) \quad (18)$$

Obliczmy widmo symetrycznego impulsu prostokątnego o czasie trwania τ (Rys.14).



$$\begin{aligned} X(f) = F[x(t)] &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{1}{-j2\pi f} [e^{-j\pi f\tau} - e^{j\pi f\tau}] = \\ &= \frac{1}{\pi f} \left[\frac{e^{+j\pi f\tau} - e^{-j\pi f\tau}}{2j} \right] = \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f} = \tau \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} \end{aligned} \quad (19)$$

Ze względu na symetrię, widmo przyjmuje wartości rzeczywiste (część urojona jest równa zero):



3.2 Właściwości transformaty Fouriera

3.2.1 Przesunięcie w czasie

Znając widmo sygnału $x(t)$, $X(f)=F[x(t)]$, obliczmy widmo sygnału $x(t-t_0)$:

$$\begin{aligned} F[x(t-t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi f(t-t_0)} d(t-t_0) = \\ &= e^{-j2\pi ft_0} F[x(t)] = e^{-j2\pi ft_0} X(f) \end{aligned} \quad (20)$$

Widmo sygnału oryginalnego należy pomnożyć przez $e^{-j2\pi ft_0}$.

3.2.2 Przesunięcie w częstotliwości

Widmo przesunięto o f_0 Hz, jak zmieni się przebieg czasowy sygnału? Innymi słowy, znamy transformatę odwrotną widma $X(f)$, $x(t)=F^{-1}[X(f)]$, jaka będzie transformata odwrotna widma $X(f-f_0)$?

$$\begin{aligned} F^{-1}[X(f-f_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f-f_0)e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} X(f-f_0)e^{j2\pi(f-f_0)t} d(f-f_0) = \\ &= e^{j2\pi f_0 t} F^{-1}[X(f)] = e^{j2\pi f_0 t} x(t) \end{aligned} \quad (21)$$

Sygnał oryginalny należy pomnożyć przez $e^{j2\pi f_0 t}$.

3.2.3 Różniczkowanie

Znając transformatę sygnału $x(t)$, obliczymy transformatę jego pochodnej $\frac{d}{dt}x(t)$. Wychodząc od wzoru na transformatę odwrotną

$$x(t) = F^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

obliczymy pochodną lewej i prawej strony:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\left[\frac{d}{dt}e^{j2\pi ft}\right]df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)[j2\pi f e^{j2\pi ft}]df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [j2\pi f X(f)]e^{j2\pi ft} df = F^{-1}[j2\pi f X(f)] \end{aligned} \quad (22)$$

Następnie obliczymy transformatę Fouriera obu stron równości

$$F\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = F\{F^{-1}[j2\pi f X(f)]\} = j2\pi f X(f) \quad (23)$$

Wystarczy zatem pomnożyć widmo przez $j2\pi f = j\omega$.

3.2.4 Splot i autokorelacja

Widmo splotu dwóch sygnałów jest iloczynem ich widm:

$$\begin{aligned} x(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) x(t-\tau) d\tau \\ F[x(t) * y(t)] &= F[x(t)]F[y(t)] = X(f)Y(f) \end{aligned} \quad (24)$$

Dowód opiera się na podstawieniu $e^{-j2\pi f\tau} \cdot e^{j2\pi f\tau} = 1$.

$$\begin{aligned} F[x(t) * y(t)] &= F\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau) e^{-j2\pi f(t-\tau)} d(t-\tau) = X(f)Y(f) \end{aligned}$$

Podobnie można pokazać, że transformata odwrotna splotu widm jest iloczynem sygnałów

$$F^{-1}[X(f) * Y(f)] = F^{-1}[X(f)]F^{-1}[Y(f)] = x(t)y(t) \quad (25)$$

Z tego wynika, że transformata Fouriera iloczynu sygnałów jest splotem ich widm:

$$F[x(t)y(t)] = X(f) * Y(f) \quad (26)$$

Z kolei funkcja autokorelacji przechodzi w widmo amplitudowe podniesione do kwadratu:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t-\tau) dt \\ F[R_x(\tau)] &= X(f)X^*(f) = |X(f)|^2 \end{aligned} \quad (27)$$

Jest to twierdzenie Wienera-Chinczina.

3.2.5 Gęstość energii i gęstość mocy

Kwadrat widma amplitudowego $|X(f)|^2$ nazywamy gęstością energii. Całkując gęstość energii otrzymujemy energię sygnału:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (28)$$

Jest to twierdzenie Parsevala. Dowód opiera się na spostrzeżeniu, że funkcja autokorelacji przy zerowym przesunięciu jest równa energii sygnału:

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = E$$

Z drugiej strony, z twierdzenia Wienera-Chinczina wynika że

$$R_x(\tau) = F^{-1}[X(f)X^*(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)X^*(f)e^{j2\pi f\tau}df$$

Podstawiając zerowe przesunięcie $\tau = 0$, otrzymuje się energię wyrażoną wzorem

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)X^*(f)e^{j2\pi f\cdot 0}df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)X^*(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2df = E$$

Dla sygnałów o nieskończonej energii lecz skończonej mocy posługujemy się gęstością mocy. Nieskończona energia wynika najczęściej z nieskończonego czasu trwania sygnału. W oknie o czasie trwania T mamy skończoną energię sygnału $m(t)$ $E_T = \int_{-T/2}^{T/2} m^2(t)dt$ i możemy obliczyć średnią moc dzieląc energię przez T .

Po przejściu do nieskończoności otrzymujemy średnią moc całego sygnału: $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_T$.

Zgodnie z twierdzeniem Parsevala energię w oknie możemy obliczyć z gęstości energii:

$$E_T = \int_{-T/2}^{T/2} m^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |M_T(f)|^2df$$

gdzie $M_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} m(t)e^{-j2\pi ft}dt$. Moc średnia w oknie wyraża się wówczas wzorem

$$P_T = \frac{E_T}{T} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} m^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} |M_T(f)|^2df$$

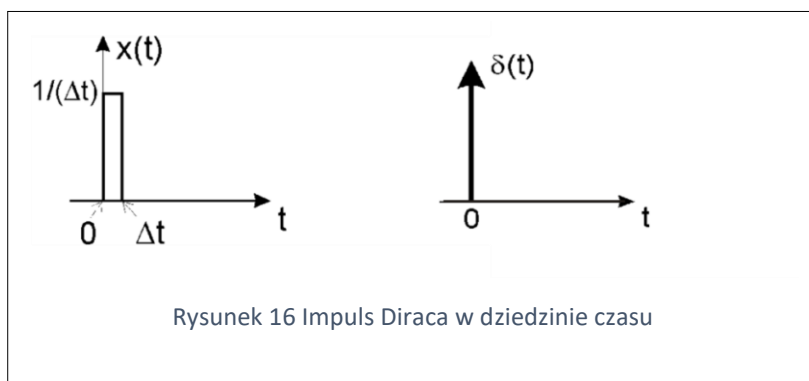
Gdy T dąży do nieskończoności, wówczas P_T staje się średnią mocą sygnału, otrzymaną przez całkowanie gęstości mocy:

$$G_m(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |M_T(f)|^2 \quad (29)$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} G_m(f)df = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} m^2(t)dt \quad (30)$$

3.2.6 Impuls Diraca

Impuls Diraca (zwany deltą Diraca) posłużył nam do wyznaczania odpowiedzi impulsowej filtru (Rys.13). Przybliżaliśmy go impulsem prostokątnym o jednostkowym iloczynie czas trwania razy amplituda, lecz może on mieć dowolny kształt, pod warunkiem zachowania jednostkowej wartości całki $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$ przy czasie trwania dążącym do zera (Rys.16)



Rysunek 16 Impuls Diraca w dziedzinie czasu

Splot sygnału $x(t)$ z impulsem Diraca nie zmienia tego sygnału:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = x(t) \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \delta(t - \tau)d\tau = x(t) \quad (31)$$

Splot z przesuniętym impulsem przesuwa sygnał do momentu, w którym ten impuls wystąpił:

$$x(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - t_0 - \tau)d\tau = \int_{t-t_0-\varepsilon}^{t-t_0+\varepsilon} x(\tau)\delta(t - t_0 - \tau)d\tau = x(t - t_0) \quad (32)$$

Transformata Fouriera impulsu Diraca jest funkcją częstotliwości o stałej wartości

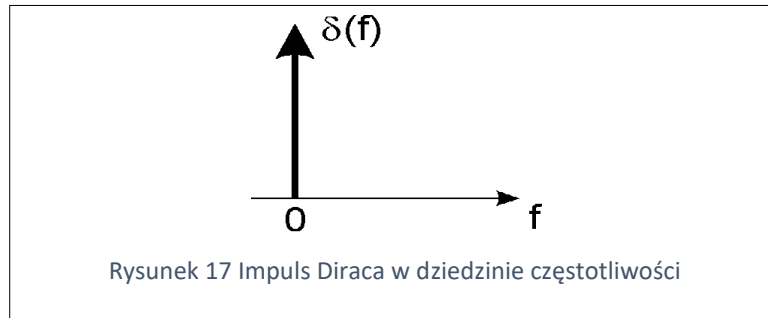
$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1 \quad (33)$$

Oznacza to, że impuls zawiera składowe o wszystkich częstotliwościach i żadna z nich nie jest uprzywilejowana. Z twierdzenia o przesunięciu (20) wynika wzór na transformatę Fouriera przesuniętego impulsu Diraca:

$$F[\delta(t - t_0)] = e^{-j2\pi ft_0} \quad (34)$$

3.2.7 Widma sygnałów harmonicznycy i okresowych

Impuls Diraca możemy też określić w dziedzinie częstotliwości. Jeśli wyrażamy częstotliwość w Hz, właściwości takiego impulsu są takie same jak impulsu określonego w dziedzinie czasu.



Odwrotna transformata Fouriera zwraca wartość stałą

$$F^{-1}[\delta(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} df = 1 \quad (35)$$

Wynika z tego że $\delta(f)$ można uważać za transformatę Fouriera sygnału o wartości stałej, choć taki sygnał nie jest całkowny w nieskończonym przedziale czasu.

Z twierdzenia o przesunięciu widma (21) wynikają następujące równania:

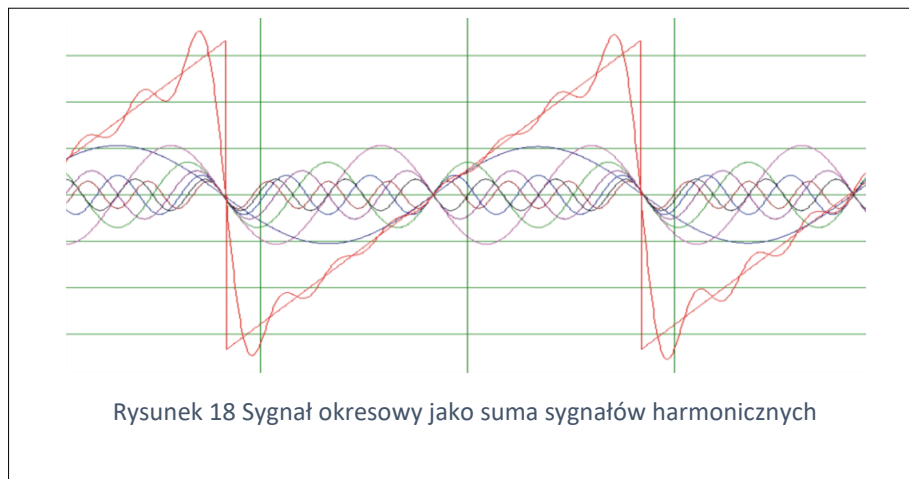
$$\begin{aligned} F^{-1}[\delta(f - f_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi f_0 t} & F[e^{j2\pi f_0 t}] &= \delta(f - f_0) \\ F^{-1}[\delta(f + f_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f + f_0) e^{j2\pi ft} df = e^{-j2\pi f_0 t} & F[e^{-j2\pi f_0 t}] &= \delta(f + f_0) \end{aligned} \quad (36)$$

W konsekwencji otrzymujemy wzory na widma sygnału kosinusoidalnego i sinusoidalnego o częstotliwości f_0 :

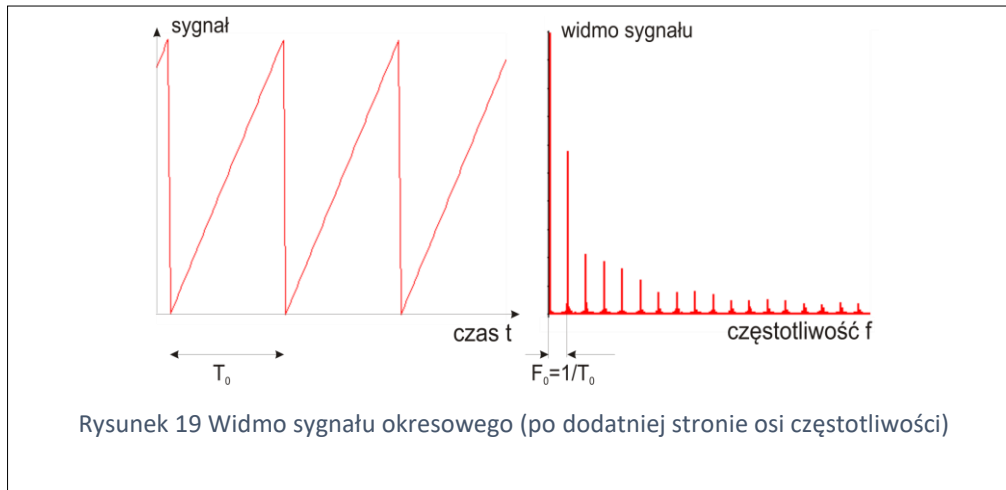
$$\begin{aligned} F[\cos(2\pi f_0 t)] &= F\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right] = \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \\ F[\sin(2\pi f_0 t)] &= F\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}\right] = \frac{1}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \end{aligned} \quad (37)$$

Prążki widmowe występują na częstotliwości f_0 i jej lustrzanym odbiciu $-f_0$.

Ze względu na fakt, że sygnał okresowy można przedstawić szeregiem Fouriera, jako sumę sygnałów harmonicznycy o częstotliwościach $F_n = n/T_0$, gdzie $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ a T_0 jest okresem (Rys. 18), widmo takiego sygnału składa się z prążków leżących na częstotliwościach $\pm F_n$ (Rys.19).



Rysunek 18 Sygnał okresowy jako suma sygnałów harmonicznych



Rysunek 19 Widmo sygnału okresowego (po dodatniej stronie osi częstotliwości)

3.2.8 Odwracalność transformaty Fouriera (materiał dodatkowy)

Podstawową właściwością transformaty Fouriera jest jej odwracalność, z widma można otrzymać dokładną kopię sygnału w dziedzinie czasu: $x(t) = F^{-1} F[x(t)]$. Aby uzasadnić tę właściwość zapiszmy w jednym wzorze transformację prostą i odwrotną.

$$\begin{aligned}
 F^{-1}F[x(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \right] e^{j2\pi f t} df = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} e^{j2\pi f t} df d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f (t-\tau)} df d\tau
 \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy całkę splotową: sygnał $x(t)$ splata się z sygnałem $v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f t} df$:

$$F^{-1}F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) v(t - \tau) d\tau = x(t) * v(t)$$

Gdyby sygnał $v(t)$ był impulsem Diraca ($v(t) = \delta(t)$), wówczas (na podstawie wzoru 31) wynikiem splatania byłby sygnał $x(t)$ i odwracalność byłaby udowodniona:

$$F^{-1}F[x(t)] = x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Wystarczy zatem wykazać, że $\delta(t) = v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f t} df$. Funkcja $e^{j2\pi f t}$ nie jest całkowalna w przedziale nieskończonym, ale można ją pomnożyć przez $e^{-a|f|}$, $a > 0$, scałkować a potem przejść ze współczynnikiem a do zera. Po scałkowaniu otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|f| + j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^0 e^{af + j2\pi f t} df + \int_0^{\infty} e^{-af + j2\pi f t} df = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$$

Gdy $a \rightarrow 0$, wówczas otrzymana funkcja dąży do zera dla każdego $t \neq 0$. Jej wartość dla $t = 0$ nie jest określona, natomiast całka $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 t^2} dt = 1$. Funkcja $v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} df$ przedstawia zatem impuls Diraca i odwracalność transformacji Fouriera jest wykazana.

3.2.9 Opis układów liniowych w dziedzinie częstotliwości

Układy liniowe o parametrach niezmiennych w czasie są opisane splotem (wzór 10): $y(t) = x(t) * h(t)$, gdzie $h(t)$ – odpowiedź impulsowa układu. Ze wzoru (24) wynika, że widmo sygnału wyjściowego jest iloczynem widma sygnału wejściowego i transformaty Fouriera odpowiedzi impulsowej:

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (38)$$

Funkcja $H(f)$ jest nazywana charakterystyką częstotliwościową układu.

Równanie (38) można przepisać w taki sposób, aby odnosiło się ono do widm amplitudy, gęstości energii i gęstości mocy.

$$|Y(f)| = |X(f)| \cdot |H(f)| \quad (39)$$

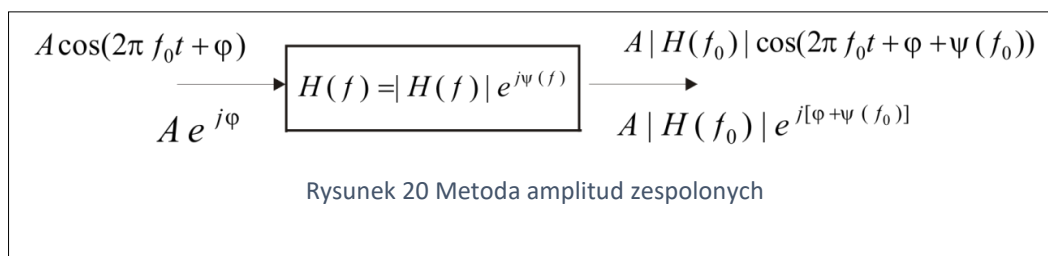
$$|Y(f)|^2 = |X(f)|^2 \cdot |H(f)|^2 \quad (40)$$

$$G_y(f) = G_x(f) |H(f)|^2 \quad (41)$$

Jeśli na wejście układu (filtru) podamy sygnał harmoniczny o częstotliwości f_0 , np. $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ wówczas na wyjściu pojawi się sygnał harmoniczny o tej samej częstotliwości. Na jego amplitudę i fazę będzie miała wpływ wartość charakterystyki częstotliwościowej układu dla częstotliwości f_0 . (pomijamy tu stany przejściowe, wszak sygnał harmoniczny rozciąga się w nieskończoność na osi czasu). Amplituda zostanie pomnożona przez $|H(f_0)|$ a faza przesunięta o $\arg(H(f_0))$. Na wyjściu układu otrzymamy sygnał:

$$y(t) = A|H(f_0)| \cos[2\pi f_0 t + \phi + \arg(H(f_0))] \quad (42)$$

Amplitudę i fazę początkową sygnału wejściowego można zapisać jako liczbę zespoloną $Ae^{j\phi}$ (tzw. amplituda zespolona). Po przejściu przez filtr zostanie ona pomnożona przez $H(f_0) = |H(f_0)|e^{j\arg(H(f_0))} = |H(f_0)|e^{j\psi(f_0)}$. Amplitudę zespoloną i przebieg czasowy sygnału wyjściowego filtru pokazano na Rys. 20.

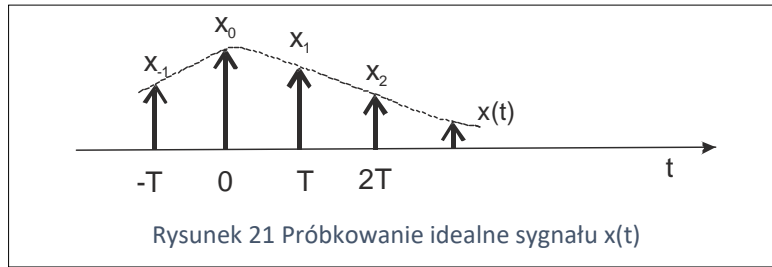


Obecnie proces filtracji przeprowadza się głównie w czasie dyskretnym, przetwarzając ciągłe wartości chwilowych (próbek) sygnału. Z tego względu przedstawiono tu filtrację w czasie ciągłym w sposób uproszczony i w skrócie. Filtracja w czasie ciągłym jest jednak niezbędna do ograniczenia pasma sygnału przed procesem próbkowania i do przetworzenia szeregu próbek na sygnał ciągły.

4 Próbkowanie

4.1 Próbkowanie idealne

Sygnały mowy, muzyki, obrazy ruchome i nieruchome przetwarzamy w urządzeniach cyfrowych jako ciągłe liczby (próbki, pikseli). W szczególności sygnały akustyczne, będące funkcjami czasu ciągłego, są przetwarzane na ciągłe wartości chwilowych (próbki). Pomiar wartości chwilowych odbywają się co T (sekund, milisekund, mikrosekund). T nazywamy okresem próbkowania, a $f_s = 1/T$ jest częstotliwością próbkowania (sampling rate, sampling frequency). Próbkę opisujemy matematycznie jako impulsy Diraca pomnożone przez wartość chwilową sygnału akustycznego w momencie wystąpienia impulsu (Rys. 21).



Sygnał $x(t)$ jest więc pomnożony przez periodyczny ciąg impulsów Diraca (tzw. dystrybucję grzebieniową):

$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum_n \delta(t - nT) = \sum_n x(nT)\delta(t - nT) = \sum_n x_n \delta(t - nT) \quad (43)$$

Widmo (transformata Fouriera) takiego ciągu próbek jest sumą widm przesuniętych impulsów Diraca pomnożonych przez wartość próbki x_n . Widmo impulsu Diraca występującego w chwili $t=0$ jest równe 1 (wzór 33), a występującego w chwili $t=nT$ wynosi $e^{-j2\pi f nT}$ (wzór 34). Stąd widmo ciągu próbek wynosi

$$X_s(f) = F[x_s(t)] = \sum_n x_n e^{-j2\pi f nT} \quad (44)$$

Funkcja $e^{-j2\pi f nT}$ jest okresową funkcją częstotliwości f , jej okres wynosi $\frac{1}{nT}$. Wspólnym okresem dla wszystkich funkcji występujących we wzorze (44) jest $\frac{1}{T} = f_s$. Tak **więc widmo ciągu próbek jest okresową funkcją częstotliwości powtarzającą się co częstotliwość próbkowania**.

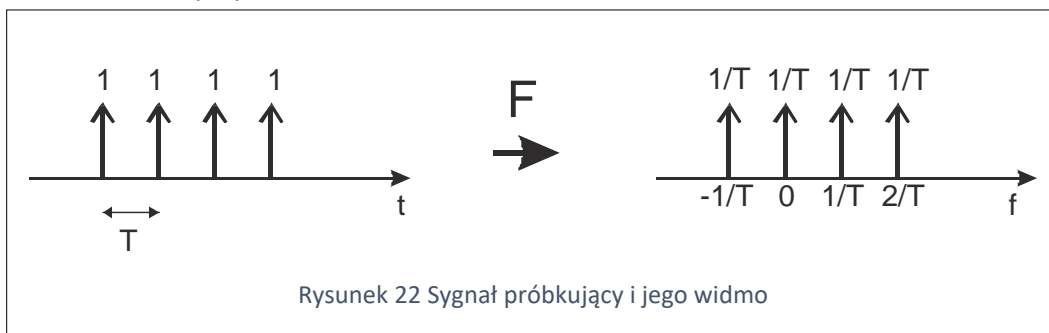
Ze względu na podobieństwo wzorów definiujących prostą i odwrotną transformatę Fouriera (wzory 12 i 14; mówimy o dualizmie czasowo-częstotliwościowym), podobnej właściwości należy się spodziewać po odwrotnej transformacie Fouriera. Jeśli widmo ma charakter „prążkowy” (jest ciągiem impulsów Diraca – wzór 45), to sygnał w dziedzinie czasu jest okresowy (wzór 46).

$$X(f) = \sum_n X_n \delta(f - n/T) \quad (45)$$

$$x(t) = F^{-1}[X(f)] = \sum_n X_n F^{-1}[\delta(f - n/T)] = \sum_n X_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} \quad (46)$$

Prążki widma występują co $\frac{1}{T} = f_s$, a okres sygnału $x(t)$ wynosi T . Potwierdza to obserwację przedstawioną na Rys.19.

Periodyczny ciąg impulsów Diraca, używany do opisu próbkowania idealnego, powinien mieć widmo dyskretne („prążkowe”), gdyż jest sygnałem okresowym, a także okresowe, gdyż jest sygnałem próbek, impulsów Diraca. Innymi słowy, jego widmo też jest periodycznym ciągiem impulsów Diraca, co pokazano na Rys.22. i opisano we wzorze (47).

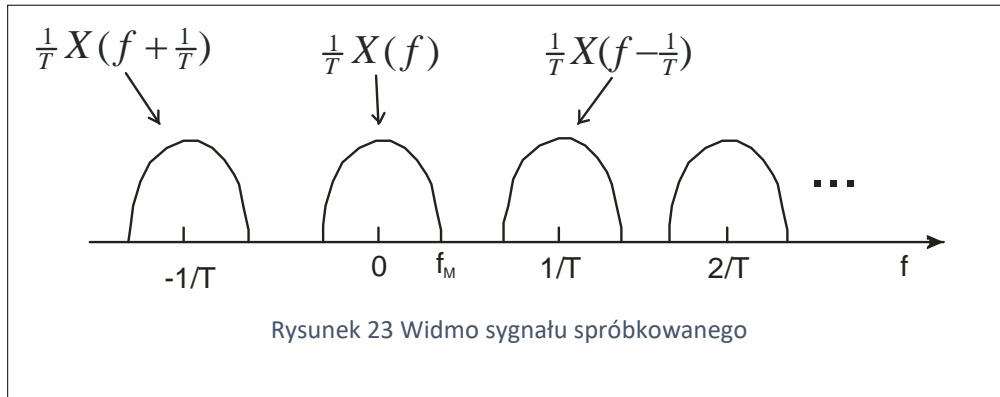


$$F\{\sum_n \delta(t - nT)\} = \frac{1}{T} \sum_n \delta(f - \frac{n}{T}) \quad (47)$$

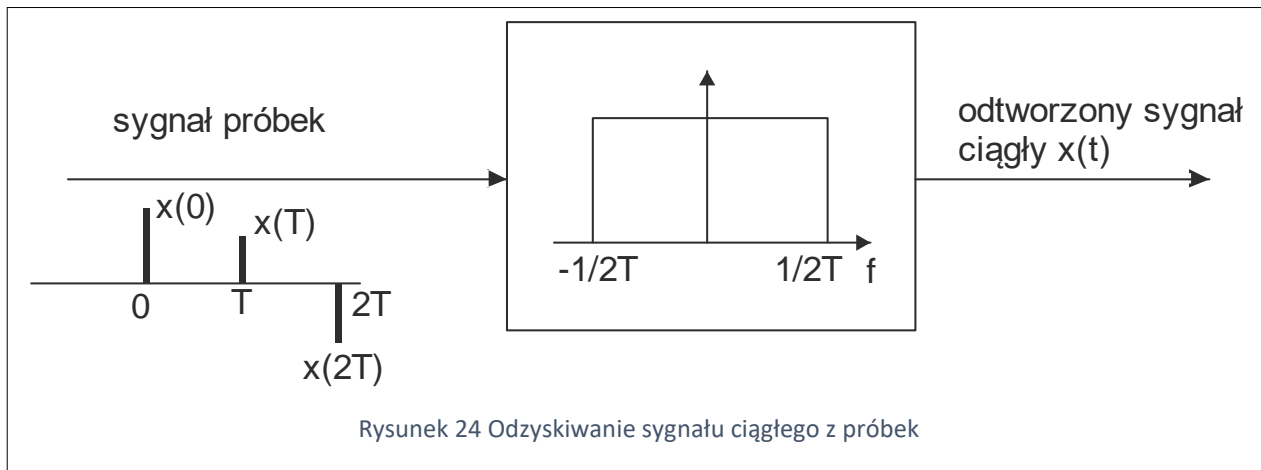
Próbkowanie idealne polega na mnożeniu sygnału ciągłego $x(t)$ przez sygnał próbkujący pokazany na rys.22 (patrz wzór 43). Mnożenie w dziedzinie czasu odpowiada splataniu w dziedzinie częstotliwości (wzór 26). Splot funkcji $X(f)$ z impulsem Diraca oznacza przesunięcie tej funkcji na pozycję wyznaczoną przez ten impuls (wzór 32 opisuje to w dziedzinie czasu, identycznie działa to w dziedzinie częstotliwości). W efekcie widmo $X(f)$ zostaje przemieszczone na pozycje $\frac{n}{T} = n f_s$:

$$X_s(f) = F[x(t) \cdot \sum_n \delta(t - nT)] = X(f) * \frac{1}{T} \sum_n \delta(f - \frac{n}{T}) = \frac{1}{T} \sum_n X(f - \frac{n}{T}) \quad (48)$$

Tak więc widmo sygnału próbkowanego zawiera nieskończoną liczbę kopii widma sygnału ciągłego, przesuniętych względem siebie o częstotliwość próbkowania (rys. 23).



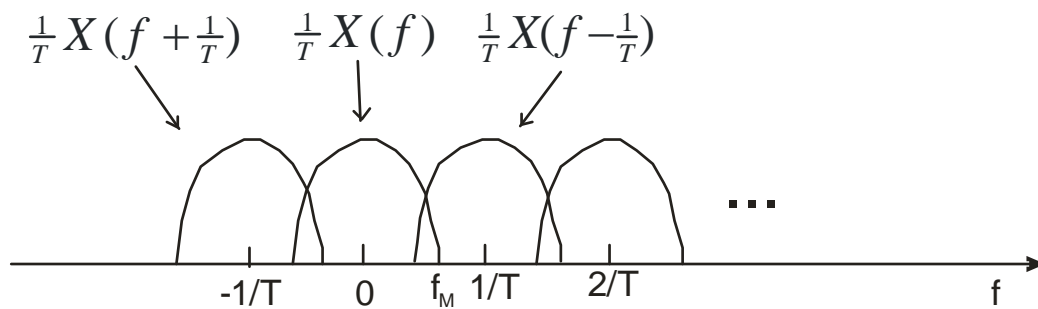
Widmo sygnału próbek zawiera w sobie pełną informację o widmie sygnału ciągłego, w postaci kopii widmowej posadowionej na częstotliwości $f=0$. Sygnał ciągły można odzyskać, wydobywając z widma sygnału próbek tę nieprzesuniętą kopię widmową. Można posłużyć się filtrem dolnoprzepustowym o częstotliwości granicznej równej połowie częstotliwości próbkowania.



Proces ten będzie udany, jeśli kopie widmowe nie będą się pokrywały. Aby spełnić ten warunek, częstotliwość próbkowania $f_s = \frac{1}{T}$ musi być co najmniej 2 razy większa od pasma sygnału ciągłego (f_M). Jest to treść **Twierdzenia o Próbkowaniu** (Shannon, Nyquist, Kotelnikow):

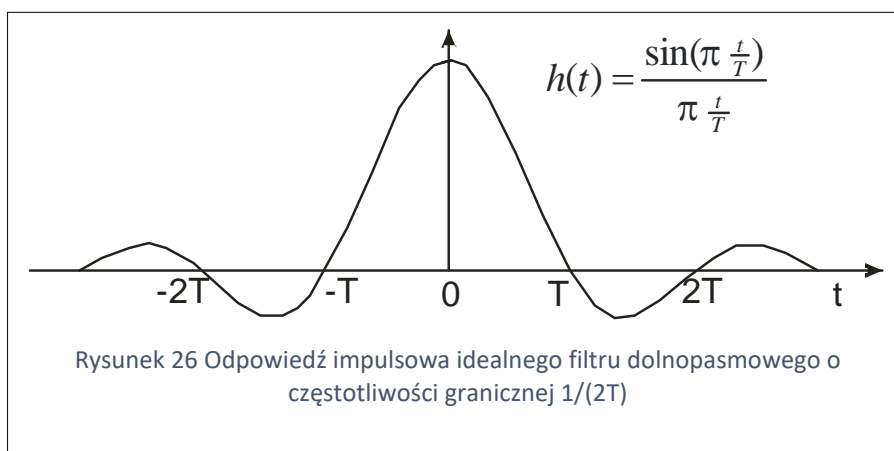
Gdy $f_M < 1/(2T)$, czyli częstotliwość próbkowania ($1/T$) jest co najmniej 2 razy większa od pasma sygnału (f_M), wówczas sygnał ciągły można odzyskać z sygnału próbek metodą filtracji

Jeśli częstotliwość próbkowania jest zbyt niska, wówczas kopie widmowe pokrywają się i nie ma możliwości odtworzenia sygnału ciągłego z sygnału próbek (rys.25).



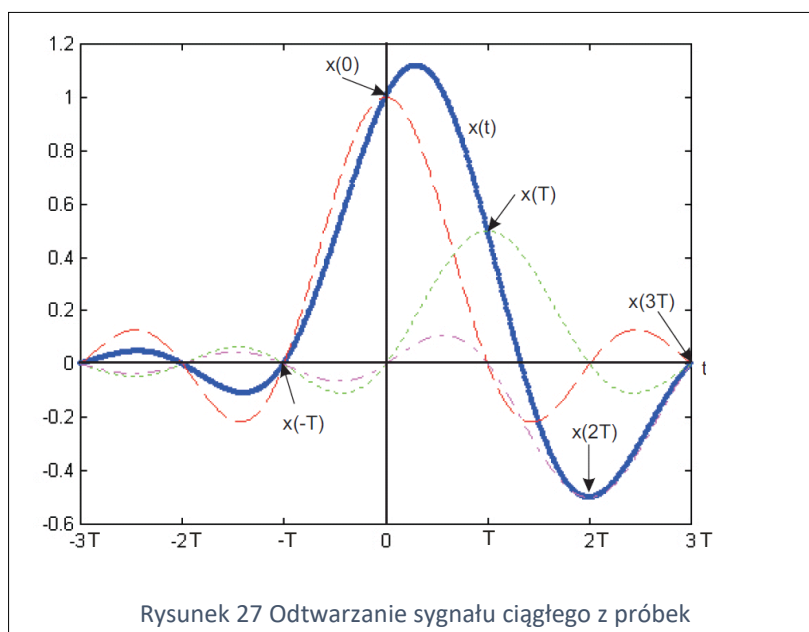
Rysunek 25 Widmo sygnału próbkowanego przy zbyt niskiej częstotliwości próbkowania

Sygnał ciągły $x(t)$ jest odtwarzany z próbek metodą filtracji. Na rys.26 pokazano odpowiedź impulsową $h(t)$ idealnego filtra dolnopasmowego o częstotliwości granicznej $f_s/2 = \frac{1}{2T}$ (patrz 8.1, zad.4).



Rysunek 26 Odpowiedź impulsowa idealnego filtra dolnopasmowego o częstotliwości granicznej $1/(2T)$

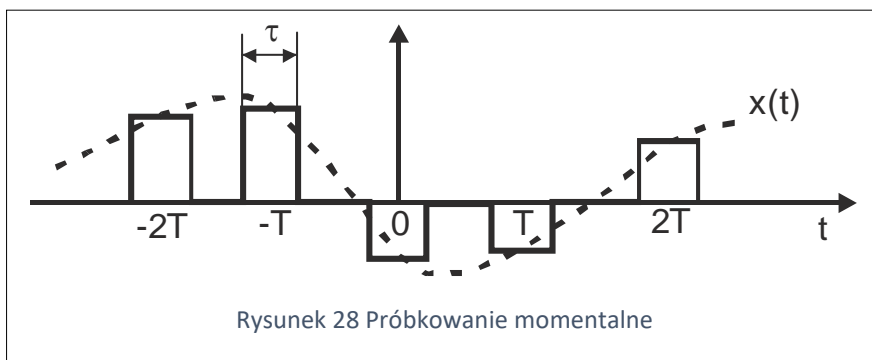
Na pobudzenie pojedynczą próbką (impulsem Diraca pomnożonym przez wartość chwilową sygnału ciągłego) filtr reaguje przesuniętym sygnałem proporcjonalnym do $h(t)$. W rezultacie sygnał ciągły jest odtwarzany jako suma przesuniętych sygnałów o kształcie pokazanym na rys.26. Funkcja $\sin(x)/x$ zwana jest zresztą funkcją próbkującą. Proces odtwarzania sygnału ciągłego pokazano na rys.27.



Rysunek 27 Odtwarzanie sygnału ciągłego z próbek

4.2 Próbkowanie momentalne

Próbkowanie idealne nie jest realizowalne w praktyce, gdyż nie jest możliwe wytworzenie impulsów Diraca. Zastępuje się je impulsami, najczęściej o kształcie prostokątnym i czasie trwania τ (rys. 28).



Amplitudy impulsów są równe wartościom chwilowym sygnału ciągłego mierzonych w chwilach $t = 0, \pm T, \pm 2T, \dots$ gdzie T jest okresem próbkowania. Jest to tzw. próbkowanie momentalne.

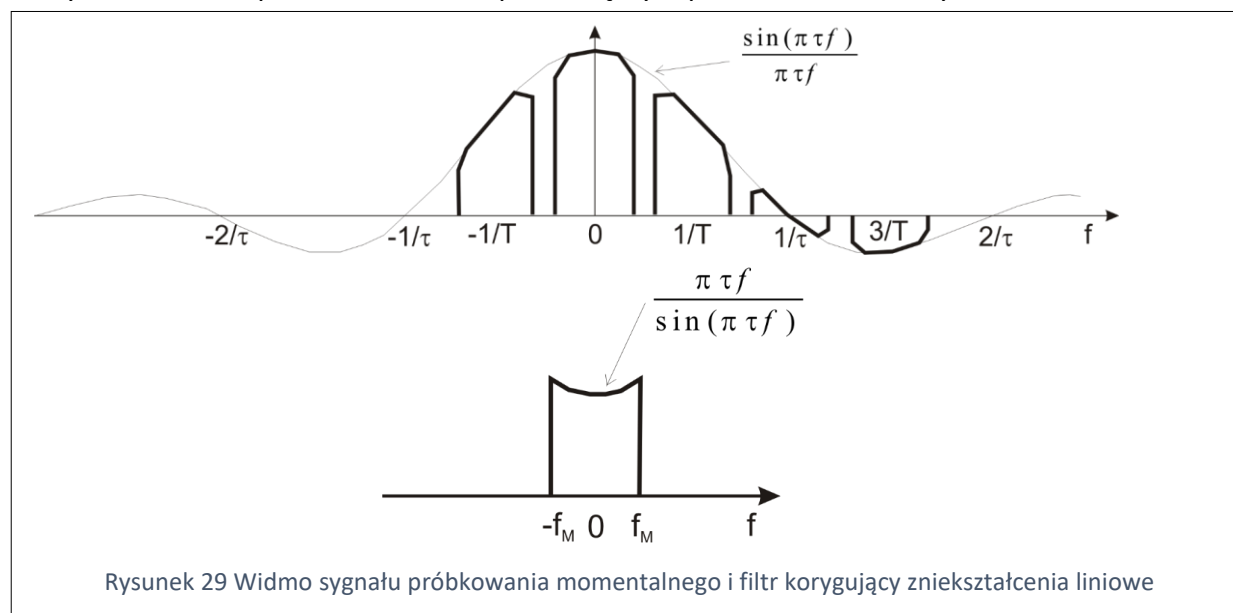
Matematycznie można je opisać wzorem (49), splatając sygnał próbkowania idealnego z symetrycznym impulsem prostokątnym o czasie trwania τ , oznaczonym jako $rect_{\tau}(t)$. Wówczas każdy impuls Diraca zamieni się w prostokąt. Oczywiście nie jest to przepis na praktyczną realizację próbkowania momentalnego.

$$x(t) \cdot \sum_n \delta(t - nT) * rect_{\tau}(t) \quad (49)$$

Widmo (transformatę Fouriera) sygnału próbek otrzymamy, zastępując splot w dziedzinie czasu mnożeniem widma sygnału spróbkowanego idealnie i widma impulsu prostokątnego:

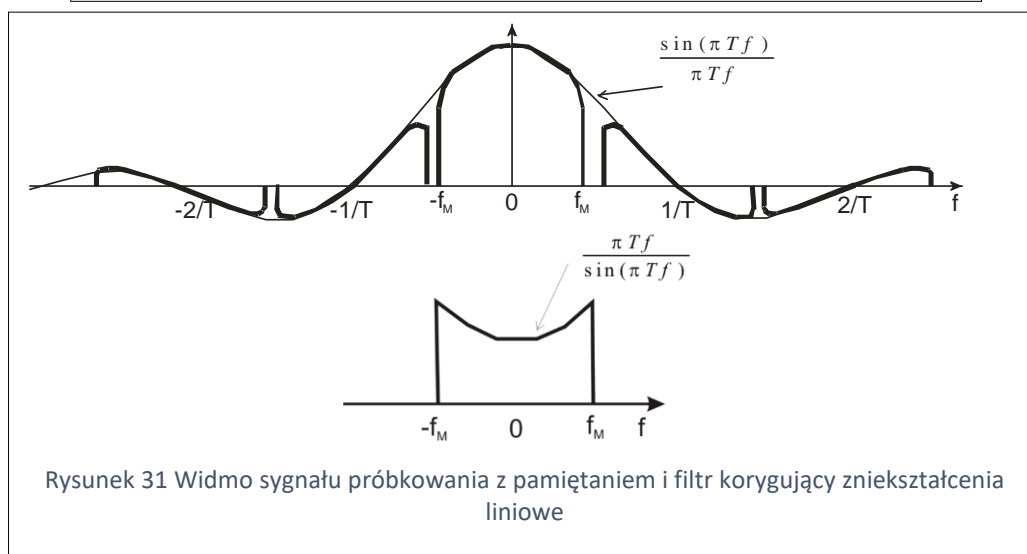
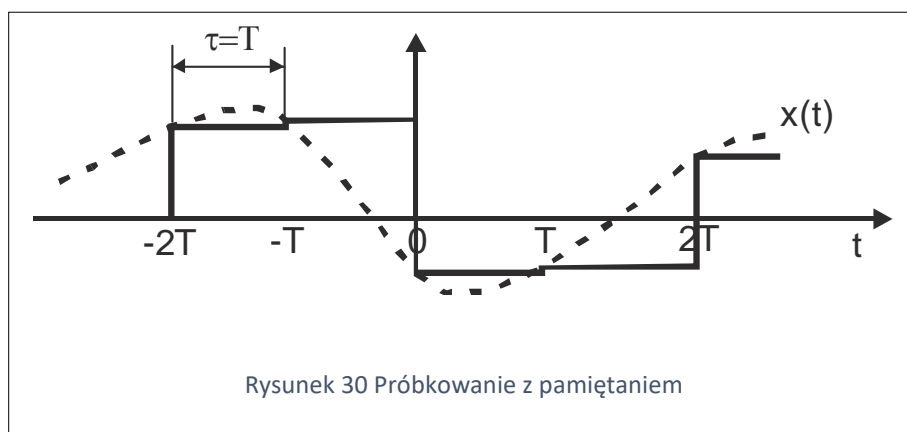
$$F\{[x(t) \cdot \sum_n \delta(t - nT)] * rect_{\tau}(t)\} = \frac{1}{T} \sum_n X(f - \frac{n}{T}) \cdot \tau \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \quad (50)$$

Otrzymane widmo próbek o kształcie prostokątnym przedstawiono na rys. 29.



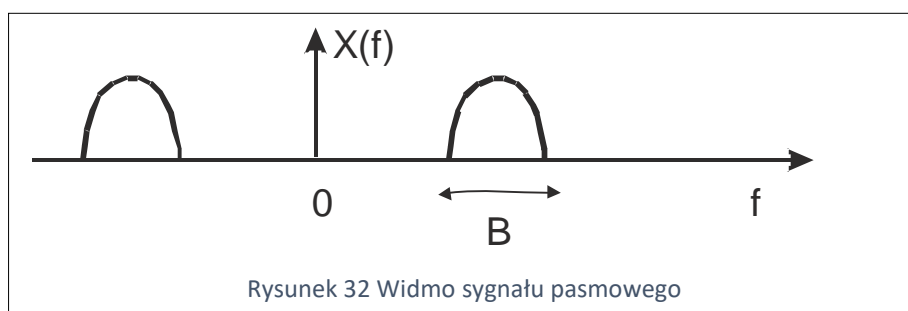
Dla odtworzenia sygnału ciągłego istotna jest jedynie centralna kopia widmowa. Jeśli spełnione jest założenie twierdzenia o próbkowaniu, wówczas można odtworzyć sygnał ciągły, tłumiąc pozostałe kopie widmowe. Wymaga to jednak wzmocnienia wyższych częstotliwości, aby zrekompensować tłumienie wynikające z mnożenia widma przez funkcję $\frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f}$.

Szczególnym rodzajem próbkowania momentalnego jest próbkowanie z pamiętaniem (sample and hold). W tym wypadku impulsy próbkujące się stykają, gdyż czas ich trwania τ jest równy okresowi próbkowania T . Sygnał próbkowania z pamiętaniem pokazano na rys. 30 a jego widmo na rys. 31.



4.3 Próbki sygnałów pasmowych

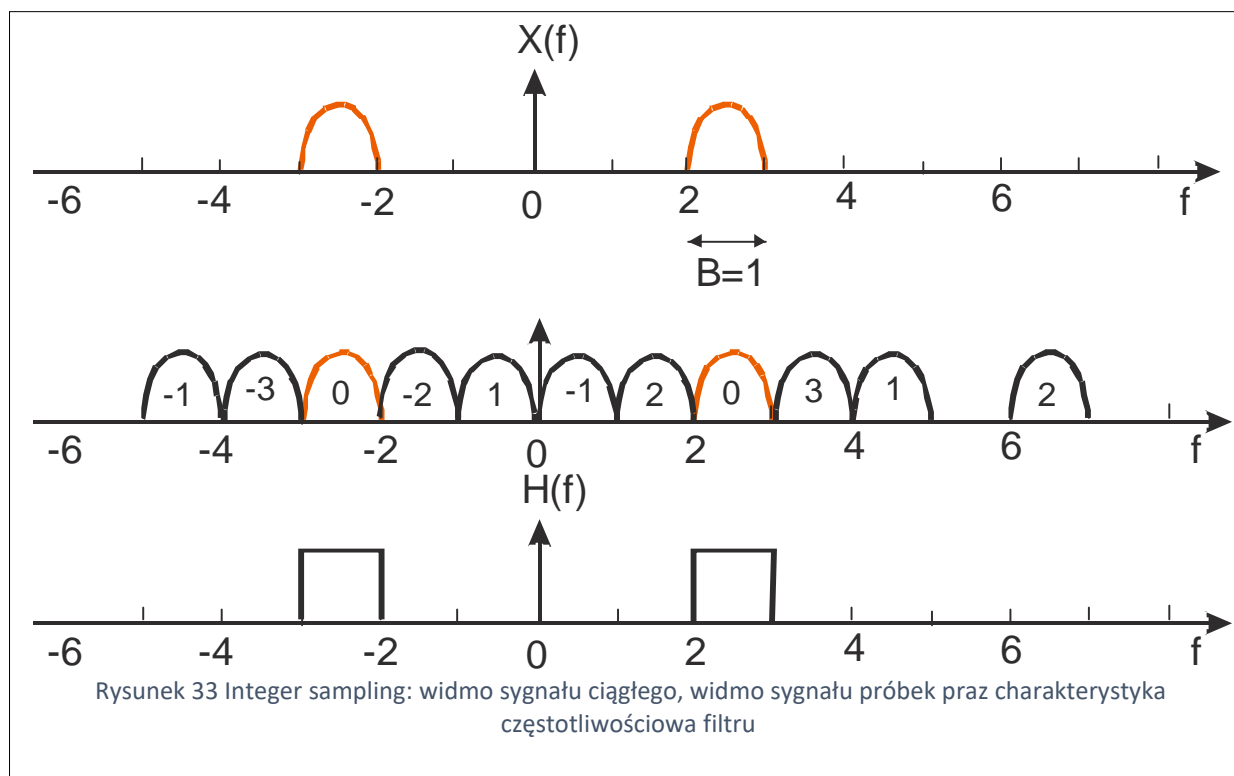
Twierdzenie o próbkowaniu można uogólnić dla sygnałów pasmowych (rys.32).



Głosi ono, że sygnał o paśmie B Hz można zapisać i odtworzyć mając co najmniej $2B$ próbek na sekundę. Nie zawsze jednak próbkowanie można przeprowadzić bezpośrednio, zwykle trzeba zastosować modulację sprowadzającą sygnał do pasma niskich częstotliwości od 0 do B Hz.

W niektórych przypadkach próbkowanie z częstotliwością $2B$ można przeprowadzić bezpośrednio. Jest to tzw. integer sampling i występuje wówczas, gdy skalę częstotliwości można podzielić na podpasma o równej szerokości, a widmo sygnału ciągłego zajmuje całe takie podpasmo.

Weźmy np. pasmo o szerokości $B=1$ kHz, rozciągające się od 2 do 3 kHz (rys.33). Częstotliwość próbkowania wynosi $2B=2$ kHz. Próbkowanie wytwarza kopie widmowe posadowione na częstotliwościach $0, \pm 2, \pm 4 \pm 6 \dots$ kHz. Nieprzesunięta kopia widmowa, zawierająca widmo sygnału ciągłego, nie została zmieszana z innymi kopiami widmowymi, w związku z tym możliwe jest odtworzenie sygnału ciągłego metodą filtracji pasmowej.



4.4 Symulacje próbkowania sygnałów audio i sygnału sinusoidalnego

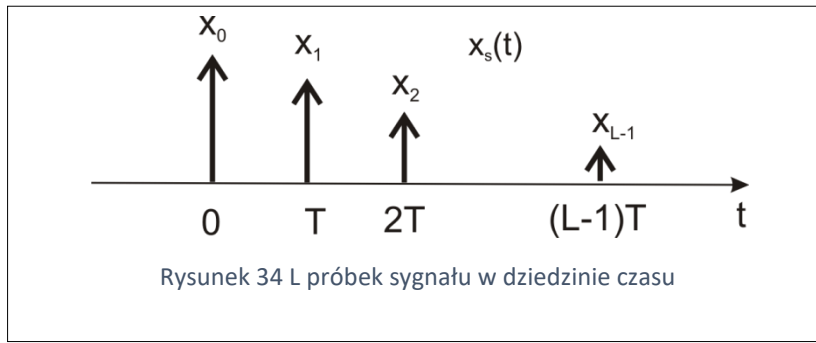
Zachęcam Państwa do przeprowadzenia symulacji układu próbkowania i odzyskiwania sygnału ciągłego z próbek. Program symulacyjny, instrukcję jego obsługi i proponowane eksperymenty znajdą Państwo w Module 4.

5 Analiza widmowa sygnałów dyskretnych

5.1 Transformaty DTFT i DFT

Jak wspomniano w p.3.1, analiza widmowa polega na wyszukiwaniu w sygnale składowych o różnych częstotliwościach. Podstawowym narzędziem analizy widmowej jest transformata Fouriera (wzór 12). Aby wykorzystać algorytmy cyfrowego przetwarzania sygnałów, przeprowadza się operację próbkowania. Transformata Fouriera sygnału próbek opisana jest wzorami (44), (48), patrz też rys.23 i 25. Ze względu na próbkowanie czas przyjmuje tu wartości dyskretne, natomiast częstotliwość jest zmienną ciągłą. Transformata Fouriera sygnału próbek oznaczana jest symbolem **DTFT (Discrete Time Fourier Transform)**.

Jeśli czas trwania sygnału jest nieograniczony, wówczas do obliczenia DTFT należałoby użyć nieskończonej liczby próbek. Obliczenie DTFT ze wzoru (44) nie byłoby wówczas możliwe, z tego względu liczbę próbek ogranicza się do pewnej wartości L . Oznacza to, że analizowany sygnał mnoży się przez okno o czasie trwania LT sekund (T jest okresem próbkowania) – rys. 34.



Obliczenie DTFT nie nastręcza wówczas trudności:

$$X_s(f) = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j2\pi f n T} \quad (51)$$

Należy tu przypomnieć, że $X_s(f)$ jest okresową funkcją f i powtarza się co częstotliwość próbkowania $\frac{1}{T}=f_s$ (rys.23, rys.25). W szczególności oznacza to, że wartości widma DTFT na częstotliwości $(-f)$ i $\frac{1}{T} - f$ są równe. Ponieważ $X_s(-f) = X_s^*(f)$, co wynika ze wzoru definicyjnego transformaty Fouriera (12), to wartości widma DTFT na częstotliwościach f i $\frac{1}{T} - f$ są parą liczb sprzężonych (gwiazdka oznacza sprzężenie). Ten efekt „lustrzanego odbicia” potwierdza wynik podstawienia częstotliwości $\frac{1}{T} - f$ do wzoru (44):

$$X_s\left(\frac{1}{T} - f\right) = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j2\pi\left(\frac{1}{T}-f\right)nT} = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j2\pi n} e^{j2\pi f n T} = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{j2\pi f n T} = X_s^*(f) \quad (52)$$

Wartość DTFT można obliczyć dla każdej częstotliwości f . W komputerowej analizie widmowej należy wybrać skończoną liczbę wartości f , dokonując w ten sposób próbkowania widma DTFT. Spróbujemy je w przedziale częstotliwości od 0 do częstotliwości próbkowania $f_s = \frac{1}{T}$, pobierając L próbek na częstotliwościach $f_k = \frac{k}{TL}$, $k = 0, 1, \dots, L - 1$.

Otrzymamy L wartości

$$X_k = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j2\pi f_k n T} = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j2\pi \frac{k}{TL} n T} = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-j2\pi \frac{kn}{L}}, \quad k = 0, \dots, L - 1 \quad (53)$$

Podstawiając $W_L = e^{-j\frac{2\pi}{L}}$ otrzymamy L wyrażeń liniowych:

$$X_k = \sum_{n=0}^{L-1} x_n W_L^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, L - 1, \quad (54)$$

które można przepisać w postaci macierzowej: $\bar{X} = \bar{W}\bar{x}$:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{L-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_L^{0\cdot0} & W_L^{0\cdot1} & \dots & W_L^{0\cdot(L-1)} \\ W_L^{1\cdot0} & W_L^{1\cdot1} & \dots & W_L^{1\cdot(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ W_L^{(L-1)\cdot0} & W_L^{(L-1)\cdot1} & \dots & W_L^{(L-1)\cdot(L-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{L-1} \end{bmatrix} \quad (55)$$

Zapisaaliśmy w ten sposób wzór na **Dyskretną Transformację Fouriera (DFT)**. Macierz transformaty DFT (\bar{W}) jest zespolona, symetryczna ($W_L^{kn} = W_L^{nk}$) i nieosobliwa. Można pokazać, że $\frac{1}{L}\bar{W}\bar{W}^* = I$ (gwiazdka oznacza sprzężenie). Macierz odwrotna jest równa

$$\bar{W}^{-1} = \frac{1}{L}\bar{W}^* \quad (56)$$

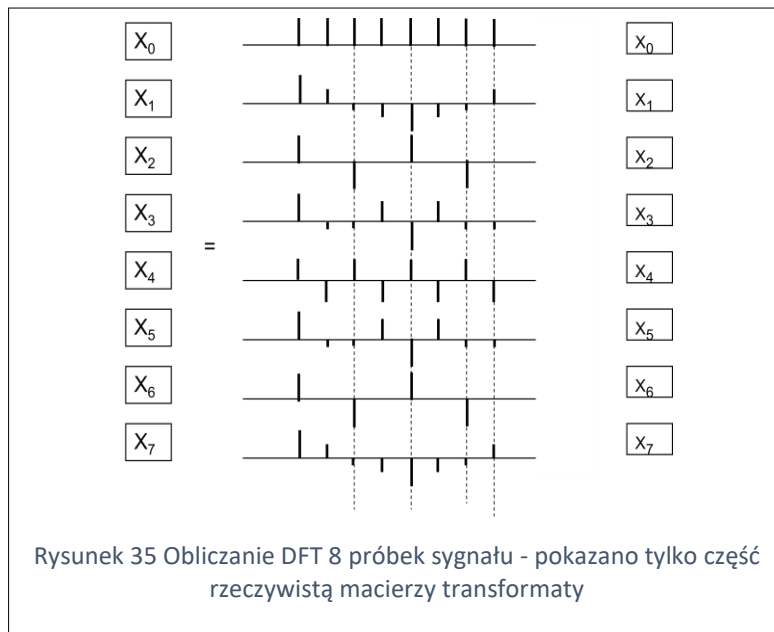
Odwrotna Dyskretna Transformata Fouriera (IDFT) opisana jest zatem wzorem

$$\bar{x} = \overline{W}^{-1} \bar{X} = \frac{1}{L} \overline{W}^* \bar{X} \quad (57)$$

K-ty wiersz transformaty DFT zawiera elementy $e^{-j\frac{2\pi}{L}kn} = \cos(\frac{2\pi}{L}kn) - j \sin(\frac{2\pi}{L}kn)$, czyli próbki sygnału harmonicznego o częstotliwości $f_k = \frac{k}{TL}$. W k-tym wierszu (numerujemy je od zera) zapisana jest k-ta **funkcja bazowa** transformaty DFT zawierająca k okresów sygnału harmonicznego. Ze względu na zjawisko „lustrzanego odbicia” (wzór 52) odpowiednie elementy wierszy numer k i L-k są ze sobą sprzężone.

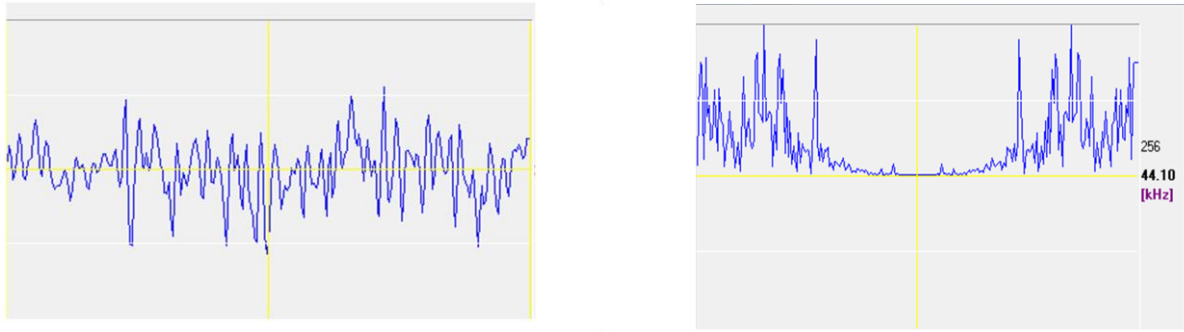
Współczynniki widma DFT są korelacjami analizowanego sygnału z funkcjami bazowymi (wzór 54). K-ty współczynnik powstaje przez pomnożenie k-go wiersza macierzy transformaty przez wektor - kolumnę próbek analizowanego sygnału (rys.35).

Z kolei odwrotna Dyskretna Transformata Fouriera (IDFT) odtwarza wektor próbek analizowanego sygnału w postaci kombinacji liniowej sprzężonych funkcji bazowych (57).



W literaturze spotyka się określenie “szybka transformata Fouriera” (Fast Fourier Transform - FFT). FFT jest szybkim algorytmem obliczania DFT. Wykonywanie mnożenia macierzy przez wektor (wzór 55) wymaga L^2 operacji mnożenia i akumulacji. James Cooley i John Tukey zauważyli w 1965 roku, że te same operacje wykonywane są wielokrotnie. Wykonując je jednorazowo, można ograniczyć ich liczbę do $L \log_2(L)$.

Na rys. 36 pokazano 256 próbek sygnału audio i wartość bezwzględną DFT – 256 próbek widma w zakresie od 0 do częstotliwości próbkowania (44100 Hz).



Rysunek 36 Sygnał audio liczący 256 próbek i wartość bezwzględna DFT (częstotliwość próbkowania 44100 Hz)

5.2 Transformata DCT

W zasadzie każda nieosobliwa macierz \overline{W} mogłaby być wykorzystana jako transformata, jednak do analizy widmowej przydatne są transformaty, których funkcje bazowe (wiersze macierzy) są sygnałami wąskopasmowymi o różnych częstotliwościach. DFT jest oparta na spróbkowanych sygnałach $e^{-j\frac{2\pi}{L}kn} = \cos(\frac{2\pi}{L}kn) - j \sin(\frac{2\pi}{L}kn)$, natomiast Dyskretna Transformata Kosinusoidalna (Discrete Cosine Transform – DCT) – na spróbkowanych funkcjach cosinus. K-ty wiersz macierzy tej transformaty jest opisany wzorem (58):

$$W_{k,n} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}}, & k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\frac{\pi}{2L}(2n+1)k), & k = 1, \dots, L-1 \end{cases} \quad (58)$$

Częstotliwości spróbkowanych sygnałów kosinusoidalnych narastają od 0 Hz do niemal połowy częstotliwości próbkowania. Oznacza to, że analiza widmowa z wykorzystaniem DCT odnosi się do zakresu częstotliwości od 0 do $\frac{f_s}{2}$.

Do obliczenia DCT wg wzoru $\overline{X} = \overline{W}\overline{x}$ można również zastosować szybki algorytm, jak w przypadku DFT. Ze względu na ortogonalność wierszy macierzy DCT spełnione jest równanie $\overline{W}^t \overline{W} = I$, gdzie t oznacza transpozycję, a I – macierz jednostkową. Oznacza to, że macierz transponowana jest jednocześnie macierzą odwrotną $\overline{W}^{-1} = \overline{W}^t$, którą można wykorzystać jako macierz odwrotnej transformacji kosinusoidalnej (IDCT):

$$\overline{x} = \overline{W}^t \overline{X} \quad (59)$$

Na rys.37 pokazano proces obliczania DCT dla 8 próbek sygnału. Macierz transformaty DCT jest rzeczywista, a więc współczynniki transformaty X_0, X_1, \dots, X_{L-1} są liczbami rzeczywistymi. Na rys. 38 pokazano 256 próbek widma DCT sygnału przedstawionego na rys. 36. Współczynniki transformaty odnoszą się do zakresu częstotliwości od 0 do połowy częstotliwości próbkowania (22050 Hz).

W Tabeli 1 porównano właściwości transformat DFT i DCT. Na uwagę zasługuje sposób przechowania informacji o fazie sygnału we współczynnikach transformaty. W DCT faza wpływa na relację pomiędzy częścią rzeczywistą i urojona współczynników, nie wpływa natomiast na ich wartość bezwzględną. W DCT informacja o fazie jest przechowywana w rzeczywistych wartościach współczynników transformaty, stąd widma DCT sygnału sinusoidalnego i kosinusoidalnego są różne.

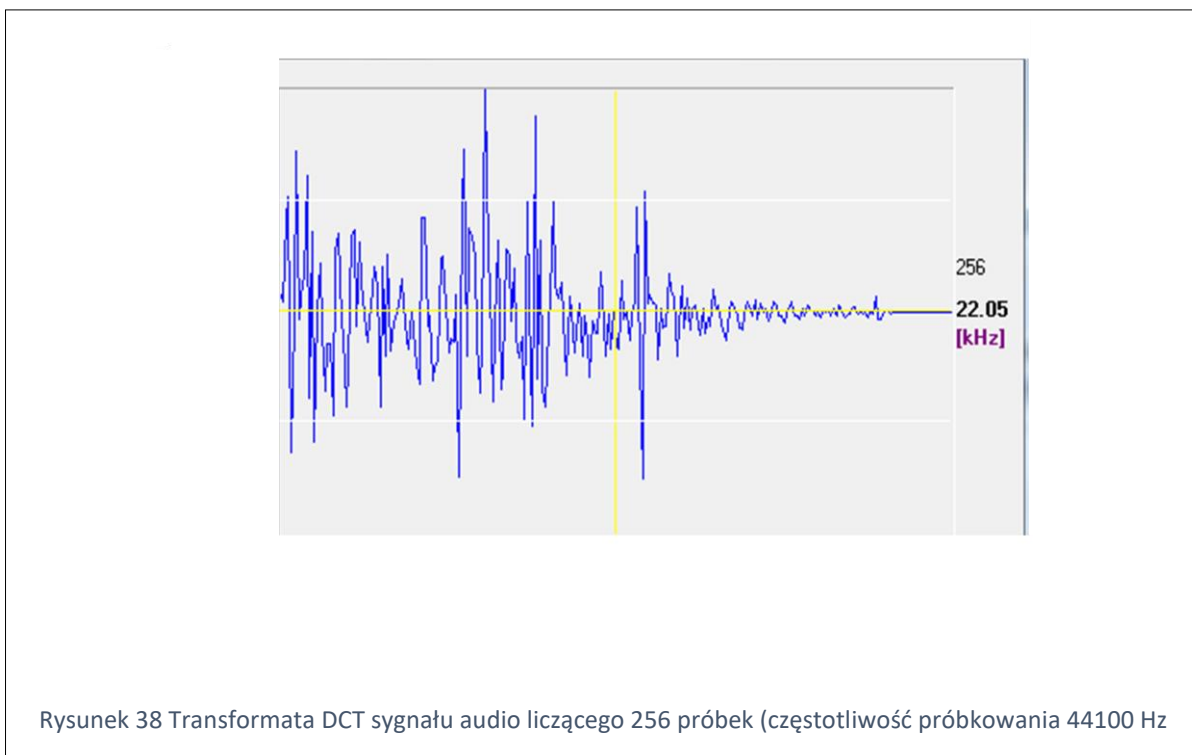
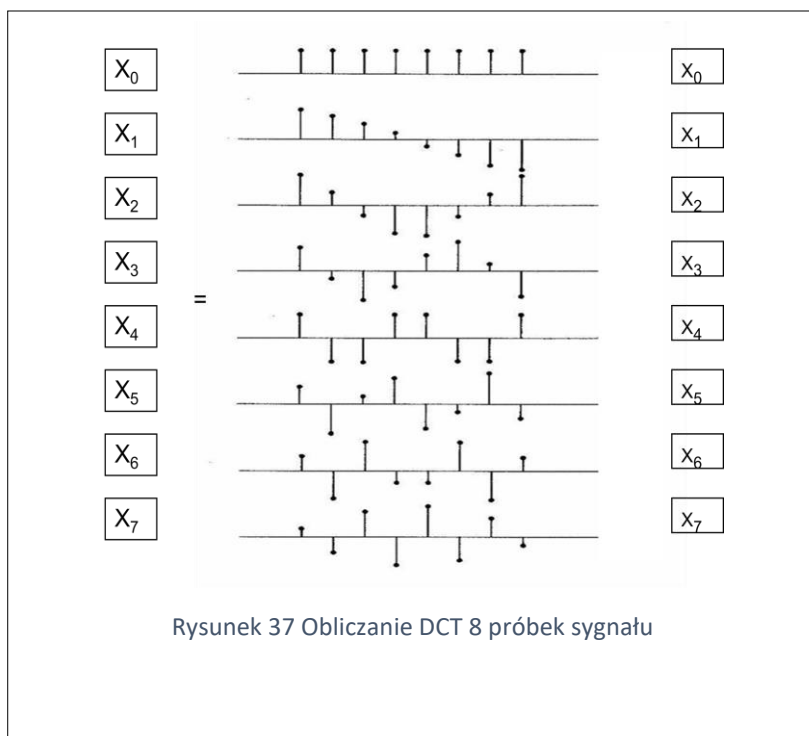


Tabela 1 Porównanie DFT i DCT

| DFT | DCT |
|--|---|
| zespolona | rzeczywista |
| Zakres częstotliwości od 0 do częstotliwości próbkowania | Zakres częstotliwości od 0 do połowy częstotliwości próbkowania |
| Widmo amplitudy nie zależy od fazy sygnału | Widmo amplitudy silnie zależy od fazy sygnału |

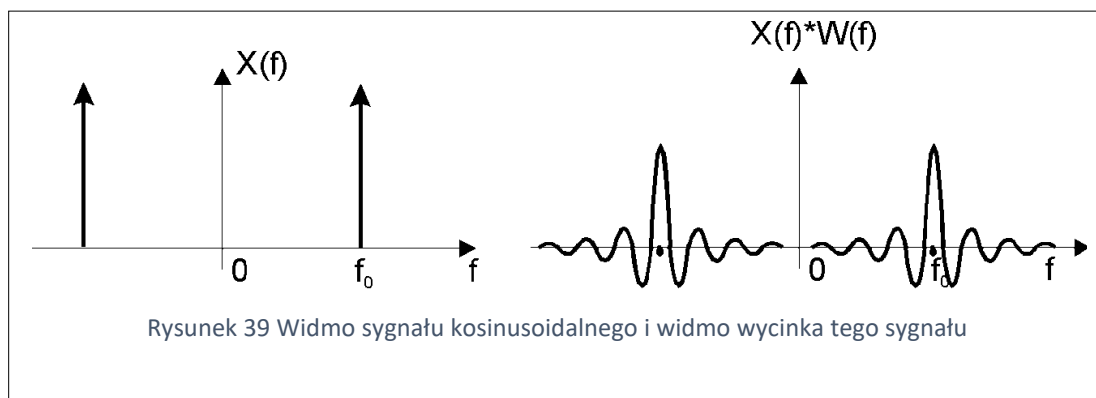
5.3 Wpływ okna czasowego na analizę widmową

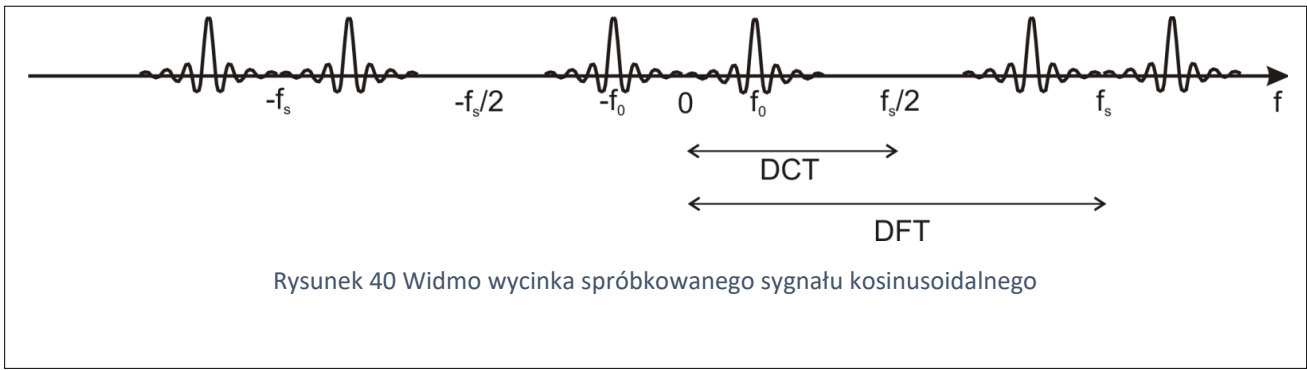
Prawdziwe informacji o składzie widmowym analizowanego sygnału dostarcza nam jedynie transformata Fouriera (wzór 12). Analiza wspomagana komputerowo wymaga próbkowania, co daje efekt w postaci powtarzających się kopii widmowych, w tym „lustrzanego odbicia” widma od częstotliwości próbkowania. Jeśli sygnał ma skończone pasmo, to z problemem tym można sobie łatwo poradzić: próbujemy (zgodnie z twierdzeniem o próbkowaniu) z częstotliwością większą niż podwojone pasmo i odczytujemy widmo DTFT w zakresie od 0 do połowy częstotliwości próbkowania (wzór 44). Widmo to zawiera tę samą informację co widmo fourierowskie obliczone metodą całkowania (wzór 12).

Poważniejszy problem powstaje w przypadku sygnałów o długim (lub nieograniczonym) czasie trwania. Wówczas do analizy bierzemy jedynie L próbek (wzór 51). Oznacza to, że sygnał mnożymy przez okno prostokątne o czasie trwania $\tau = LT$, gdzie T jest okresem próbkowania. Ta operacja zmniejsza widmo, gdyż mnożenie w dziedzinie czasu oznacza splatanie w dziedzinie częstotliwości (wzór 26). Widmo obliczone na podstawie L próbek sygnału jest więc „rozmyte” skutkiem splatania z widmem okna.

Jako przykład weźmy sygnał kosinusoidalny o częstotliwości f_0 . Jego widmo (wzór 37) pokazano na rys.39. Okno prostokątne o czasie trwania τ pokazano na rys. 14 a jego widmo na rys.15. Splot widma sygnału kosinusoidalnego ($X(f)$) z widmem okna ($W(f)$) składa się z przesuniętych kopii widma okna, gdyż splot funkcji z impulsem Diraca jest przesunięciem funkcji w miejsce położenia impulsu (wzór 32) – patrz rys.39. Widmo sygnału harmonicznego zostało więc rozproszone w paśmie o szerokości listka głównego funkcji $\frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau}$, pojawiły się też odległe składowe, związane z listkami bocznymi tej funkcji. Można je zmniejszyć kosztem poszerzenia listka głównego, stosując okna o kształcie nieprostokątnym, np. okno Hamminga. Rozproszenie widma można zmniejszyć poprzez zwiększenie czasu trwania okna (τ), czyli liczby próbek (L). Istotnie, szerokość listka głównego widma okna prostokątnego wynosi $\frac{2}{\tau} = \frac{2}{LT} = \frac{2f_s}{L}$.

Jeżeli uwzględnimy efekt próbkowania, otrzymamy widmo L próbek sygnału kosinusoidalnego jak na rys. 40. Jest to widmo DTFT, widmo DFT otrzymamy, pobierając L próbek w zakresie od 0 do częstotliwości próbkowania. Widmo DCT zawiera L współczynników reprezentujących składowe o częstotliwościach od 0 do połowy częstotliwości próbkowania. Jego kształt będzie jednak zależał od fazy początkowej sygnału harmonicznego w oknie.





5.4 Symulacje DFT i DCT sygnałów audio i sygnału sinusoidalnego

Zachęcam Państwa do przeprowadzenia analizy widmowej sygnałów audio i sygnału sinusoidalnego. Eksperymenty polegają na porównaniu wpływu czasu trwania okna i fazy początkowej na widmo DFT i DCT. Program symulacyjny, instrukcję jego obsługi i proponowane eksperymenty znajdują Państwo w Module 4.

6 Transformata Zet

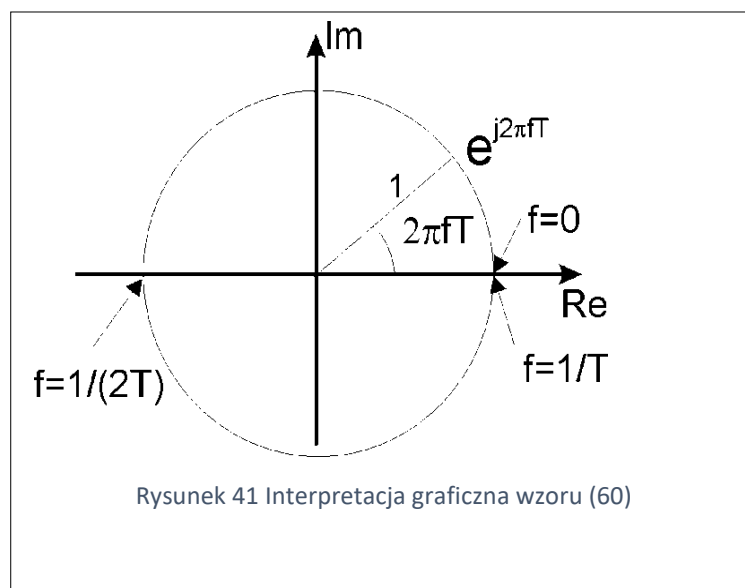
6.1 Związek transformaty Zet z DTFT

Transformata Zet jest uogólnieniem transformaty DTFT. DTFT jest transformatą Fouriera sygnału próbek $x_s(t) = \sum_n x_n \delta(t - nT)$. Przypominamy tu wzór (44): $X_s(f) = \sum_n x_n F[\delta(t - nT)] = \sum_n x_n e^{-j2\pi f n T}$.

Transformatę Zet otrzymujemy przez podstawienie:

$$z = e^{j2\pi f T} = \cos(2\pi f T) + j \sin(2\pi f T) \quad (60)$$

Przypisuje ono częstotliwości f zmienną zespoloną z . Zmienna z jest punktem na okręgu o promieniu jednostkowym. Istotnie, $|e^{j2\pi f T}| = \sqrt{\cos^2(2\pi f T) + \sin^2(2\pi f T)} = 1$. Na rys.41 pokazano związek między zmiennymi f i z .



W zakresie częstotliwości od 0 do częstotliwości próbkowania $f_s = 1/T$ punkt z wykonuje pełny obrót, wracając do wartości $z=1$. W tabelicy 2 podano wartości z odpowiadające kilku częstotliwościom z tego zakresu.

Tabela 2 Wartości zmiennej z dla kilku wybranych częstotliwości

| | | | | | |
|----|---|--------|--------|--------|-----------|
| f: | 0 | 1/(4T) | 1/(2T) | 3/(4T) | $f_s=1/T$ |
| z: | 1 | j | -1 | -j | 1 |

Podstawiając $z = e^{j2\pi fT}$ do wzoru na widmo DTFT: $X_s(f) = \sum_n x_n e^{-j2\pi f n T} = \sum_n x_n z^{-n}$ otrzymuje się wzór na transformatę Zet:

$$X(z) = Z[\{x_n\}] = \sum_n x_n z^{-n} \quad (61)$$

Transformata Zet może być obliczona dla każdej zespolonej wartości zmiennej z, dla której suma (61) jest skończona.

6.2 Właściwości transformaty Zet

1. Liniowość.

Transformata Zet kombinacji liniowej sygnałów dyskretnych jest kombinacją liniową ich transformat Zet:

$$Z[\{ax_n + by_n\}] = aX(z) + bY(z) \quad (62)$$

2. Przesunięcie.

Przesunięcie ciągu próbek o k w lewo oznacza pomnożenie transformaty Zet przez z^k .

$$Z[\{x_{n+k}\}] = \sum_n x_{n+k} z^{-n} = z^k \sum_n x_{n+k} z^{-(n+k)} = z^k X(z) \quad (63)$$

Najczęściej mamy do czynienia z opóźnieniem o jedną próbkę, co oznacza pomnożenie transformaty przez z^{-1}

3. Tłumienie (mnożenie przez ciąg eksponencjalny).

$$Z[\{x_n a^n\}] = \sum_n x_n a^n z^{-n} = \sum_n x_n \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left[\frac{z}{a}\right] \quad (64)$$

4. Splot.

Sumę splotową określamy wzorem (65), a operację splotu oznaczamy gwiazdką:

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} \Rightarrow y_n = x_n * h_n \quad (65)$$

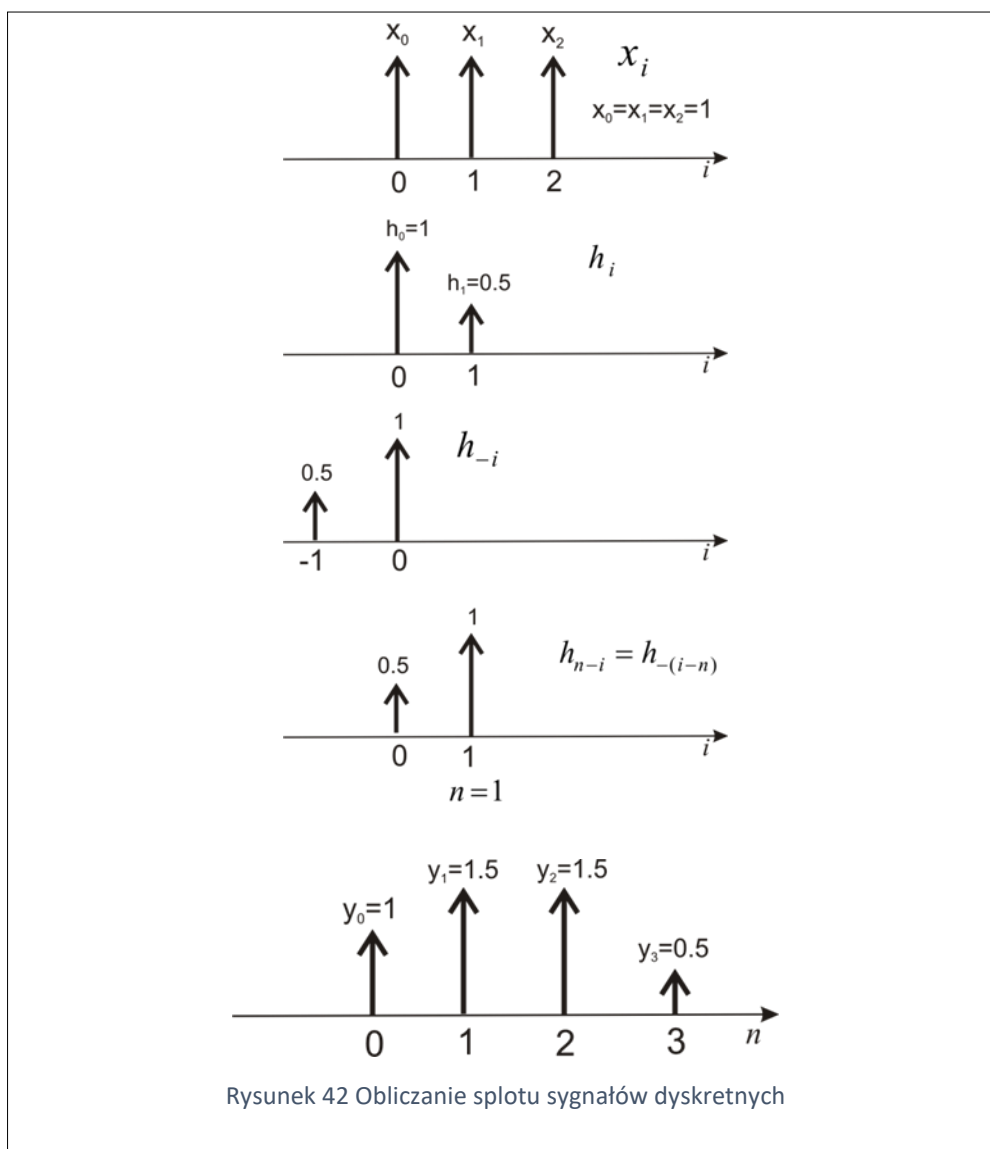
Transformata Zet splotu jest iloczynem transformat

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{n-k} z^{-n} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{n-k} z^{-(n-k)} = X(z) \cdot H(z) \end{aligned} \quad (66)$$

Przykład: Obliczymy spłot dwóch sygnałów dyskretnych: $\{x_n\}$ i $\{h_n\}$ najpierw metodą bezpośrednią, a potem poprzez mnożenie transformat Zet.

Ze wzoru $y_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i h_{n-i}$ wynika, że należy obliczyć lustrzane odbicie ciągu $\{h_i\}$, przesunąć o n pozycji i pomnożyć przez $\{x_i\}$. Operacje te pokazano na rys. 42.

Dla przesunięcia $n=0$ istnieje tylko jedna pozycja $i=0$ wspólna dla ciągów $\{x_i\}$ i z $\{h_{n-i}\}$. Otrzymujemy $y_0 = x_0 h_0 = 1$. Dla $n=1$ wspólne są pozycje 0 i 1 (patrz rys.42). Otrzymujemy $y_1 = x_0 h_1 + x_1 h_0 = 1.5$. Podobnie otrzymujemy $y_2 = 1.5$ i $y_3 = 0.5$. Pozostałe wartości spłotu są równe zeru.



Znacznie prościej jest obliczyć transformaty Zet obu sygnałów dyskretnych i pomnożyć je: $Y(z) = X(z) \cdot H(z)$

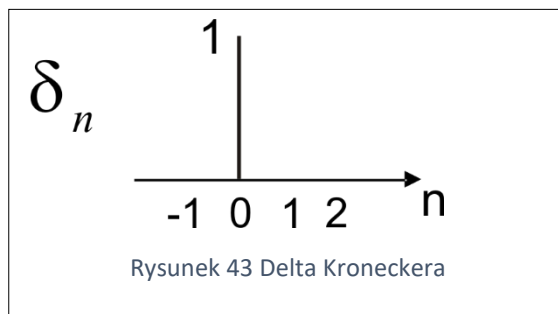
W kolejnych krokach otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= 1 + z^{-1} + z^{-2} \\
 H(z) &= 1 + \frac{1}{2}z^{-1} \\
 Y(z) &= X(z)H(z) = \\
 &= 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3} = \\
 &= 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3} = \\
 &= y_0 + y_1z^{-1} + y_2z^{-2} + y_3z^{-3}
 \end{aligned}$$

Mając transformatę $Y(z)$ możemy bezpośrednio z niej odczytać współczynniki y_n . Wynik jest identyczny z otrzymanym metodą sumowania.

6.3 Delta Kroneckera

Delta Kroneckera jest sygnałem dyskretnym δ_n , którego wszystkie wartości są równe zero, za wyjątkiem wartości $\delta_0 = 1$ (rys.43).



W przetwarzaniu sygnałów dyskretnych pełni ona funkcję podobną do tej jaką impuls Diraca (zwany też deltą Diraca) pełni w przetwarzaniu sygnałów ciągłych. Sygnał dyskretny (zbiór wartości x_n) można zapisać w postaci

$$\sum_i x_i \delta_{n-i} \quad (67)$$

Porównaj ze wzorem (43) dla ciągu próbek opisanych w dziedzinie czasu ciągłego t .

Właściwości delty Kroneckera są podobne do właściwości delty Diraca. Splot z deltą nie zmienia sygnału:

$$y_n = x_n * \delta_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta_{n-k} = x_n \quad (68)$$

Splot z przesuniętą deltą przesuwa sygnał w miejsce położenia delty:

$$y_n = x_n * \delta_{n-m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta_{n-m-k} = x_{n-m} \quad (69)$$

Transformata Zet delty Kroneckera jest równa 1:

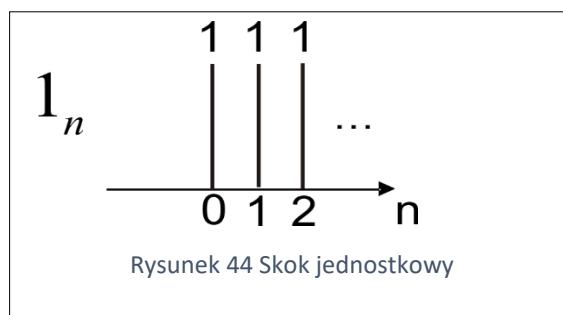
$$Z[\delta_n] = \sum_n \delta_n z^{-n} = 1 \quad (70)$$

Transformata Zet delty przesuniętej o m taktów w prawo (czyli opóźnionej o mT sekund) jest równa z^{-m} :

$$Z[\delta_{n-m}] = \sum_n \delta_{n-m} z^{-n} = z^{-m} \quad (71)$$

6.4 Obliczanie prostej i odwrotnej transformaty Zet

Na rys.44 pokazano sygnał dyskretny, zwany skokiem jednostkowym, oznaczanym przez 1_n lub u_n .



Transformata Zet skoku jednostkowego jest sumą wyrazów ciągu geometrycznego:

$$Z[1_n] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1} \quad (72)$$

Wzór (72) jest słuszny gdy suma ma wartość skończoną (czyli dla $|z| > 1$).

Wartość splotu sygnału x_k ze skokiem jednostkowym, obliczona w chwili n , jest równa sumie wartości sygnału x_k do chwili n włącznie. Innymi słowy jest to akumulacja wartości sygnału x_k .

$$y_n = x_n * 1_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k 1_{n-k} \xrightarrow{k \leq n} \sum_{k=-\infty}^n x_k \quad (73)$$

Z twierdzenia o splotcie (wzór 66) transformata Zet zakumulowanych wartości sygnału x_k wynosi

$$Y(z) = Z[x_n * 1_n] = X(z) \frac{z}{z-1} \quad (74)$$

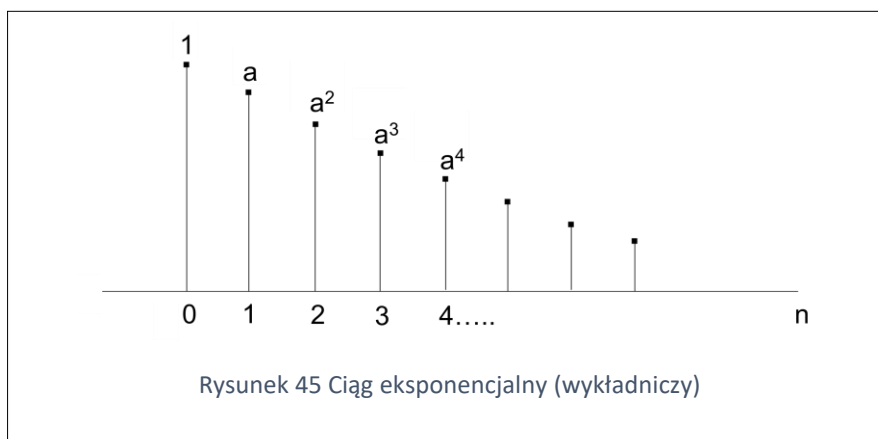
W analizie sygnałów i układów czasu dyskretnego często zakłada się, że sygnał ma wartości zerowe w ujemnych chwilach czasu: $x_n = 0, n < 0$. Dla takich sygnałów transformata Zet staje się prawostronną transformatą Zet:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \quad (75)$$

Obliczmy transformatę Zet ciągu eksponencjalnego $y_n = a^n 1_n$ (rys.45). Można to uczynić poddając tłumieniu sygnał skoku jednostkowego (wzór 64), lub wykonać obliczenia bezpośrednio z definicji transformaty Zet (wzór 61):

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a} \quad (76)$$

Wzór (76) jest słuszny gdy suma ma wartość skończoną (czyli dla $|z| > |a|$).



W przypadku gdy ciąg zawiera skończoną liczbę elementów, wówczas obliczamy transformatę Zet bezpośrednio z definicji (wzór 61). Np. transformata Zet sygnału składającego się z dwóch elementów: $x_1 = 2, x_2 = -1$ wynosi $X(z) = \sum_{n=1}^2 x_n z^{-n} = 2z^{-1} - z^{-2}$.

Odwrotną transformatę Zet (Z^{-1}) najłatwiej jest obliczyć w przypadku, gdy transformata Zet jest wielomianem. Wartości sygnału są współczynnikami tego wielomianu. Np. dla $X(z) = 2z - 1 + z^{-2}$ natychmiast odczytujemy $x_{-1} = 2, x_0 = -1, x_2 = 1$.

W przypadku gdy transformata Zet ma postać opisaną we wzorze (76), sygnał jest eksponencjalny.

$$Y(z) = \frac{z}{z-a} \rightarrow y_n = a^n 1_n \quad (77)$$

Podobnie jest w następującym przypadku

$$Y(z) = \frac{za}{(z-a)^2} \rightarrow y_n = na^n 1_n \quad (78)$$

W przypadku gdy w liczniku zamiast zmiennej z do potęgi pierwszej mamy inny wykładnik, zapisujemy transformatę Zet w postaci $z^m \frac{z}{z-a}$ i interpretujemy z^m jako przesunięcie o m taktów (próbek). Np.

$Z^{-1}\left[\frac{b}{z-a}\right] = bZ^{-1}\left[\frac{1}{z-a}\right] = bZ^{-1}\left[\frac{1}{z} \frac{z}{z-a}\right] = b 1_{n-1} a^{n-1}$. Mnożenie przez stałą b przenosi się w dziedzinę czasu, co wynika z liniowości transformaty Zet (wzór 62).

Gdy transformata Zet jest funkcją wymierną, dążymy do zapisania jej w postaci sumy wyrażeń opisanych w (77), (78). Innymi słowy, dokonujemy **rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste**:

$$X(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0} = \frac{(z - \hat{z}_1)(z - \hat{z}_2) \dots (z - \hat{z}_m)}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)} = \sum_{i=1}^m \frac{r_i z}{(z - z_i)} \quad (79)$$

Następnie, korzystając z (77), konstruujemy sygnał x_n jako sumę ciągów eksponencjalnych:

$$x_n = \sum_{i=1}^m r_i (z_i)^n 1_n \quad (80)$$

Problemem jest jedynie obliczenie współczynników r_i . Zauważmy, że mnożąc (79) przez $\frac{z-z_1}{z}$ i podstawiając $z = z_1$, otrzymamy współczynnik r_1 . Podobnie otrzymujemy kolejne współczynniki.

$$r_i = \lim_{z \rightarrow z_i} X(z) \frac{z - z_i}{z} \quad (81)$$

Odwrotna transformata Zet w postaci (80) może być ciągiem dążącym do zera, utrzymującym stałą amplitudę oscylacji lub dążącym do nieskończoności. Zależy to od biegunów funkcji wymiernej $X(z)$, czyli zer wielomianu znajdującego się w mianowniku. Aby ciąg x_n dążył do zera, wszystkie bieguny muszą spełniać warunek $|z_i| < 1$. Geometrycznie, muszą znajdować się w kole o promieniu jednostkowym. Jeśli choć jeden biegun znajdzie się poza tym kołem ($|z_i| > 1$), wówczas cały ciąg x_n będzie dążył do nieskończoności. Reasumując,

$$\forall i, |z_i| < 1 \Rightarrow x_n \rightarrow 0 \quad (82)$$

$$\exists i, |z_i| > 1 \Rightarrow x_n \rightarrow \infty \quad (83)$$

6.5 Obliczanie widma DTFT z transformaty Zet

Znając transformatę Zet sygnału (ciągu próbek), można otrzymać transformatę Fouriera tego sygnału przez podstawienie równania okręgu o promieniu jednostkowym (wzór 60): $z = e^{j2\pi fT} = \cos(2\pi fT) + j \sin(2\pi fT)$. W Tabeli 2 podano wartości zmiennej z dla kilku częstotliwości z zakresu od zera do połowy częstotliwości próbkowania.

Przed wykonaniem tej czynności należy sprawdzić, czy transformata Zet $X(z) = Z[\{x_n\}] = \sum_n x_n z^{-n}$ jest zbieżna dla wartości z leżących na okręgu o promieniu jednostkowym, tzn. dla $|z| = 1$. Transformata Zet ciągu eksponencjalnego (rys.45) jest zbieżna do $\frac{z}{z-a}$ dla $|z| > |a|$, patrz wzór (76). Jeśli $|a| < 1$, wówczas transformata Zet jest zbieżna na okręgu jednostkowym i można obliczyć DTFT. Jeśli $|a| > 1$, DTFT nie istnieje, gdyż ciąg eksponencjalny dąży do nieskończoności.

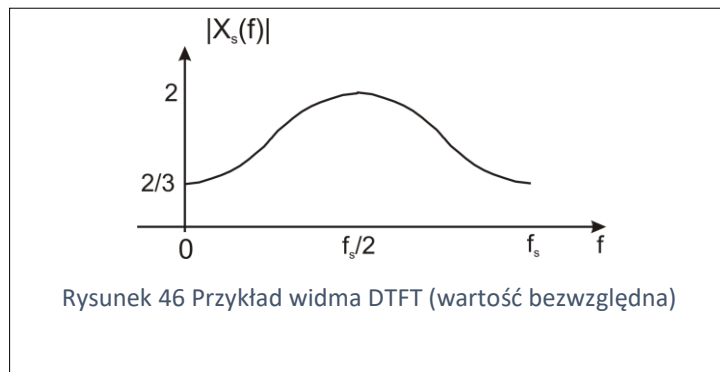
W praktyce wystarczy sprawdzić warunek (82): jeśli wszystkie bieguny transformaty Zet leżą w kole o promieniu jednostkowym, wówczas DTFT istnieje i można skorzystać z podstawienia $z = e^{j2\pi fT}$.

Przykład: $X(z) = \frac{z}{z+0.5}$. Oblicz DTFT i naszkicuj wartość bezwzględną w zakresie od 0 do częstotliwości próbkowania $f_s = \frac{1}{T}$.

$X(z)$ ma biegun w punkcie $z_1 = -0.5$, spełnia więc warunek (82). Po podstawieniu $z = e^{j2\pi fT} = e^{j2\pi f/f_s}$ otrzymuje się widmo DTFT:

$$X_s(f) = \frac{e^{j2\pi fT}}{e^{j2\pi fT} + 0.5}$$

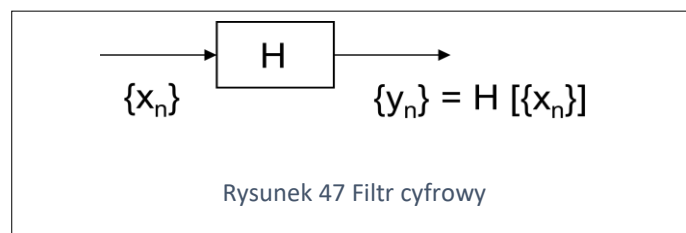
Wartości DTFT dla częstotliwości zerowej i równej połowie częstotliwości próbkowania otrzymamy podstawiając odpowiednio $z = 1$ i $z = -1$ (tablica 2). Wartość bezwzględną DTFT naszkicowano na rys. 46.



7 Filtry cyfrowe

7.1 Cyfrowe układy liniowe niezależne od czasu

Układ czasu dyskretnego (potocznie nazywany układem lub filtrem cyfrowym) przetwarza ciąg wejściowy $\{x_n\}$ na ciąg wyjściowy $\{y_n\}$ – rys.47.



Podobnie jak w układach czasu ciągłego, wprowadza się pojęcie układu liniowego niezależnego od czasu (LTI – linear time invariant):

Układ jest liniowy, gdy spełnia zasadę superpozycji:

| | |
|---|--------------------------------|
| wejście $\{x_n\} = x_0, x_1, x_2 \dots$ | wyjście $\{y_n\} = H[\{x_n\}]$ |
| wejście $\{u_n\} = u_0, u_1, u_2 \dots$ | wyjście $\{v_n\} = H[\{u_n\}]$ |
| wejście $a\{x_n\} + b\{u_n\}$ | wyjście $a\{y_n\} + b\{v_n\}$ |

Układ jest niezależny od czasu, gdy opóźniony sygnał wejściowy x_{n-m} wywołuje reakcję filtra w postaci y_{n-m} , tzn. przebieg czasowy sygnału wyjściowego ulega jedynie opóźnieniu, jego kształt pozostaje bez zmian:

| | |
|-----------------------|-----------------------|
| wejście $\{x_n\}$ | wyjście $\{y_n\}$ |
| wejście $\{x_{n-m}\}$ | wyjście $\{y_{n-m}\}$ |

Układy cyfrowe LTI są opisane w dziedzinie czasu za pomocą splotu podobnie jak układy LTI czasu ciągłego – p.2.4.

| | |
|---|--|
| wejście δ_n (delta Kroneckera) | wyjście $y_n = h_n$ (odpowiedź impulsowa) |
| wejście δ_{n-k} (opóźniona delta Kroneckera) | wyjście $y_n = h_{n-k}$ |
| wejście $x_k \delta_{n-k}$ | wyjście $y_n = x_k h_{n-k}$ |
| wejście $\{x_n\} = \sum_k x_k \delta_{n-k}$ | wyjście $y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} = x_n * h_n$ (84) |

Jeśli odpowiedź impulsowa jest równa zero dla ujemnych chwil czasu dyskretnego ($h_n = 0, n < 0$), wówczas splot (84) można przepisać w postaci

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^n x_k h_{n-k} \quad (85)$$

Mówimy wówczas o **układach przyczynowych**. Istotnie, n-ta próbka sygnału wyjściowego zależy od poprzednich próbek sygnału wejściowego, nie zależy natomiast od próbek następných.

Układy LTI można opisać w dziedzinie zmiennej z , korzystając z twierdzenia o transformacie Zet splotu (wzór 66):

$$Y(z) = X(z)H(z), \quad H(z) = Z[\{h_n\}] \quad (86)$$

Transformata Zet odpowiedzi impulsowej układu jest **transmitancją** układu.

7.2 Stabilność układu

Załóżmy, że sygnał wejściowy układu LTI maleje do zera w miarę upływu czasu: $x_n \rightarrow 0$ gdy $n \rightarrow \infty$. Oznacza to, że wszystkie bieguny transformaty $X(z)$ znajdują się w kole o promieniu jednostkowym (wzór 82). Transformata Zet sygnału wyjściowego jest iloczynem $X(z)$ i transmitancji układu $H(z)$ – wzór (86). Jeżeli wszystkie bieguny $H(z)$ znajdują się w kole jednostkowym, wówczas to samo można powiedzieć o biegunach $Y(z)=X(z) H(z)$ i sygnał wyjściowy $y_n \rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$. O takim układzie (filtrze) mówimy, że jest **stabilny**.

Jeśli choć jeden biegun transmitancji znajduje się poza kołem jednostkowym (wzór 83), wówczas $y_n \rightarrow \infty$. O takim układzie mówimy, że jest **niestabilny**.

Korzystamy tu z pojęcia stabilności w sensie BIBO (Bounded Input – Bounded Output): Jeśli sygnał wejściowy jest ograniczony, to sygnał wyjściowy stabilnego filtru jest również ograniczony.

Aby zbadać stabilność układu LTI, należy obliczyć bieguny jego transmitancji i skorzystać s warunków (82), (83).

Niestabilny układ nie posiada charakterystyki częstotliwościowej, która jest transformatą DTFT odpowiedzi impulsowej. Suma $H(z) = Z[\{h_n\}] = \sum_n h_n z^{-n}$ nie jest zbieżna dla $z = e^{j2\pi fT}$, gdyż odpowiedź impulsowa dąży do nieskończoności ze względu na biegun (lub bieguny) $H(z)$ leżące poza kołem jednostkowym.

Przykład analizy stabilności układu o transmitancji $H(z) = \frac{z^2}{z^2 - z + 0.5}$

Bieguny $H(z)$ są zerami (pierwiastkami) wielomianu $z^2 - z + 0.5$.

Rozwiązujemy równanie $z^2 - z + 0.5 = 0$, otrzymujemy $z_1 = 0.5 + j0.5$ i $z_2 = 0.5 - j0.5$

Odległość obu biegunów od początku układu współrzędnych wynosi $|z_1| = |z_2| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

Bieguny leżą w kole o promieniu jednostkowym, więc układ LTI jest stabilny.

7.3 Równania różnicowe

W praktyce układ (filtr) LTI jest najczęściej opisany równaniem różnicowym:

$$y_n = \sum_{i=0}^N b_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^M a_i y_{n-i} \quad (87)$$

Bieżąca próbka sygnału wyjściowego jest kombinacją liniową $N+1$ próbek sygnału wejściowego i M poprzednich próbek sygnału wyjściowego. Wzór (87) opisuje sieć działań algorytmu filtracji. Obliczmy transmitancję tego filtru,

Podstawiając $a_0=1$, przekształcamy równanie różnicowe: $\sum_{i=0}^M a_i y_{n-i} = \sum_{i=0}^N b_i x_{n-i}$

Obliczamy transformatę Zet obu jego stron:

$$\sum_{i=0}^M a_i Z[y_{n-i}] = \sum_{i=0}^N b_i Z[x_{n-i}] \quad \sum_{i=0}^M a_i z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} X(z)$$

Z twierdzenia o przesunięciu (wzór 63): $Y(z) \sum_{i=0}^M a_i z^{-i} = X(z) \sum_{i=0}^N b_i z^{-i}$

Transmitancja układu:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}} = \frac{z^{-N} \sum_{i=0}^N b_i z^{N-i}}{z^{-M} \sum_{i=0}^M a_i z^{M-i}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

(88)

Transmitancja $H(z)$ jest funkcją wymierną, ma N zer i M biegunów. Wyciągając czynniki z^{-M} i z^{-N} przed sumy, otrzymujemy wielomiany o nieujemnych potęgach. Czynniki z^{-M} i z^{-N} reprezentują jedynie przesunięcie w czasie, opóźnienie o $M-N$ próbek.

7.4 Filtry o skończonej i nieskończonej odpowiedzi impulsowej

Jeśli transmitancję (88) zredukujemy do wielomianu $B(z)$,

$$H(z) = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} \quad (89)$$

otrzymamy transmitancję filtru o **skończonej odpowiedzi impulsowej FIR** (finite impulse response) lub SOI (skończona odpowiedź impulsowa). Równanie różnicowe takiego filtru otrzymamy, podstawiając $M=0$ do (87):

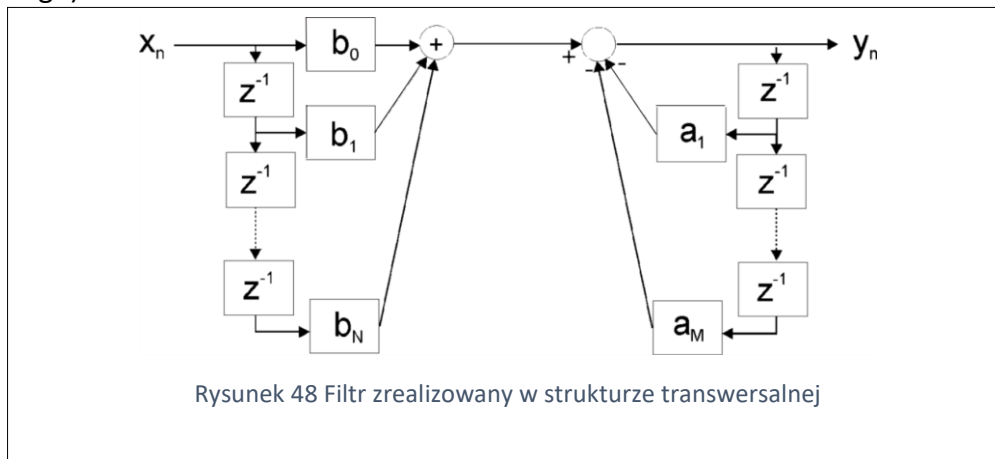
$$y_n = \sum_{i=0}^N b_i x_{n-i} \quad (90)$$

Podając na wejście pojedynczą próbkę w chwili 0 (tj. deltę Kroneckera $x_n = \delta_n$) otrzymamy odpowiedź impulsową: $y_n = \sum_{i=0}^N b_i \delta_{n-i} = b_n$. Odpowiedź impulsowa składa się z $N+1$ niezerowych próbek: - stąd nazwa filtru. Próbka sygnału wyjściowego jest kombinacją $N+1$ próbek sygnału wejściowego (wzór 90). Taki filtr jest **zawsze stabilny**, gdyż wartość próbki $y_n = \sum_{i=0}^N b_i x_{n-i}$ ma skończoną wartość.

Transmitancja filtru FIR ma N zer. Bieguny mogą wystąpić jedynie w punkcie $z=0$, gdyż $H(z) = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} = \frac{1}{z^N} \sum_{i=0}^N b_i z^{N-i}$. Czynniki z^{-N} wywołuje jedynie opóźnienie, nie ma wpływu na stabilność.

W ogólnym przypadku transmitancja (88) odnosi się do układu o **nieskończonej odpowiedzi impulsowej IIR** (infinite impulse response) lub NOI (nieskończona odpowiedź impulsowa).

Na rys.48 pokazano realizację filtru w tzw. strukturze transwersalnej. Operator z^{-1} oznacza opóźnienie o jedną próbkę. Za nieskończony czas trwania odpowiedzi impulsowej odpowiada pętla sprzężenia zwrotnego po prawej stronie schematu. Ona również może być przyczyną niestabilności – decyduje o tym położenie biegunów $H(z)$. Lewa strona schematu przedstawia filtr FIR, który jest zawsze stabilny (nie ma tu pętli sprzężenia zwrotnego).



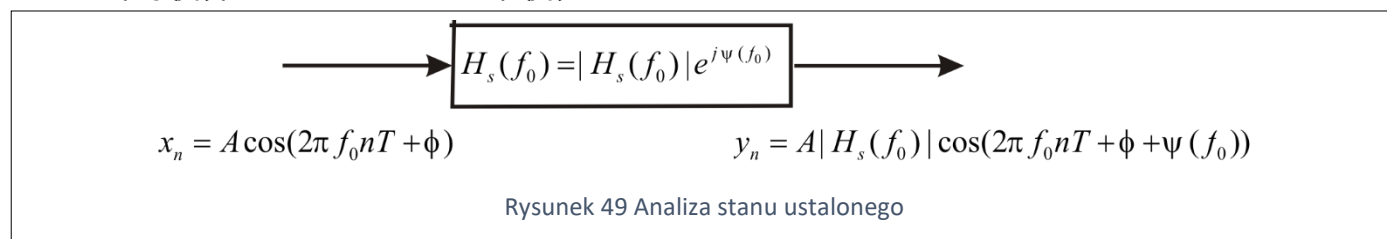
7.5 Charakterystyka częstotliwościowa filtru

Jeżeli filtr jest stabilny, wówczas możemy podstawić $z = e^{j2\pi fT} = e^{j2\pi f/f_s}$ ($f_s = \frac{1}{T}$ jest częstotliwością próbkowania) do wzoru na transmitancję (88) i otrzymać w ten sposób **charakterystykę częstotliwościową** filtru.

$$H(z) = H(e^{j2\pi fT}) = H_s(f) \quad (91)$$

Obliczanie charakterystyki częstotliwościowej jest w istocie obliczaniem widma DTFT odpowiedzi impulsowej, o czym była mowa w p. 6.5.

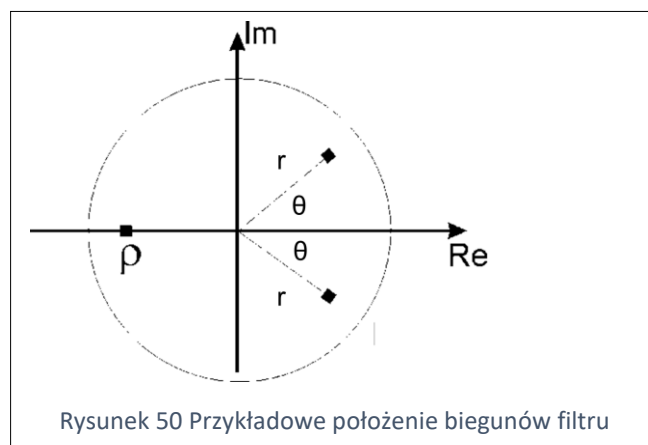
Charakterystyka częstotliwościowa mówi nam o tym, w jaki sposób przetwarzane są w filtrze składowe sygnały wejściowe o różnych częstotliwościach. Jeżeli na wejście filtra podamy sygnał harmoniczny o częstotliwości f_0 : $x_n = A \cos(2\pi f_0 nT + \phi)$, to na wyjściu otrzymamy sygnał o tej samej częstotliwości, różniący się jedynie amplitudą i fazą. Wynika to z równania $Y(z) = H(z)X(z)$, które przechodzi w $Y(e^{j2\pi f_0 T}) = H(e^{j2\pi f_0 T})X(e^{j2\pi f_0 T})$ i dalej w $Y_s(f) = H_s(f)X_s(f)$. Charakterystyka częstotliwościowa dla częstotliwości f_0 jest liczbą zespoloną: $H_s(f_0) = |H_s(f_0)|e^{j\psi(f_0)}$. Wynika stąd, że sygnał wyjściowy będzie miał amplitudę równą $A|H_s(f_0)|$ i fazę przesuniętą o $\psi(f_0)$ - rys.49



W ten sposób przeprowadziliśmy **analizę stanu ustalonego** w układzie pobudzonym sygnałem harmonicznym. Jeżeli sygnał wejściowy składa się z szeregu sygnałów harmonicznych o różnych częstotliwościach, wówczas analizę należy przeprowadzić dla wszystkich składowych (wynika to z liniowości układu). Należy jeszcze raz podkreślić, że taka analiza ma sens **tylko dla stabilnych układów**. Układy niestabilne nie mają charakterystyki częstotliwościowej, gdyż sygnał wyjściowy dąży do wartości nieskończonej.

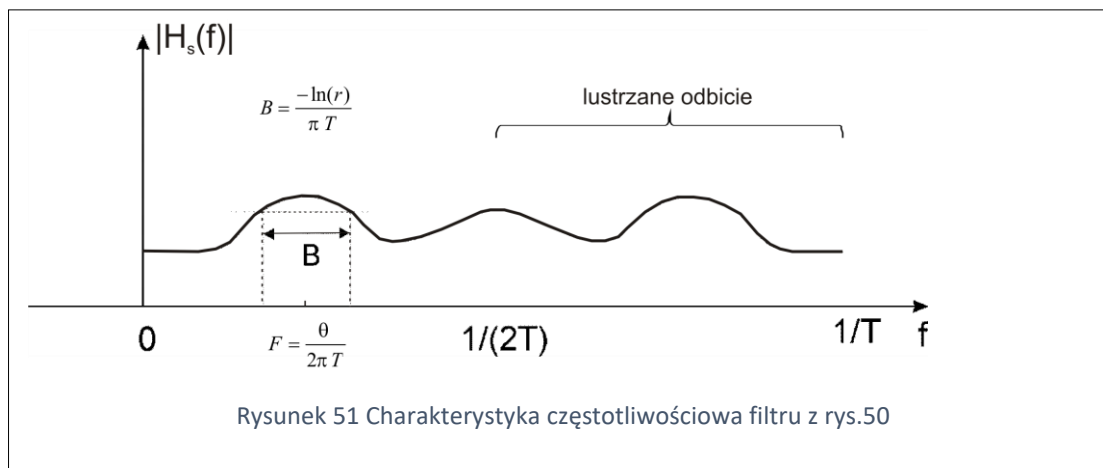
Jeżeli interesują nas **stany przejściowe** w układzie pobudzonym sygnałem wejściowym o określonym początku (najczęściej jest to chwila $n=0$), wówczas obliczamy transformatę Zet sygnału wejściowego i mnożymy ją przez transmitancję filtra. Otrzymujemy Transformatę Zet sygnału wyjściowego: $Y(z) = H(z)X(z)$ i stosując transformatę odwrotną Zet otrzymujemy sygnał na wyjściu układu.

Znając położenia biegunów i zer transmitancji układu, można niekiedy określić, jaki przebieg ma charakterystyka częstotliwościowa. Załóżmy, że układ ma 3 bieguny jak na rys. 50. Bieguny (jak i zera) mogą być rzeczywiste (leżą na osi rzeczywistej) lub zespolone parami sprzężone. Wynika to z faktu, że są to pierwiastki wielomianów $A(z)$ i $B(z)$, których współczynniki są rzeczywiste. Wielomiany o współczynnikach rzeczywistych mogą mieć pierwiastki rzeczywiste lub zespolone parami sprzężone.



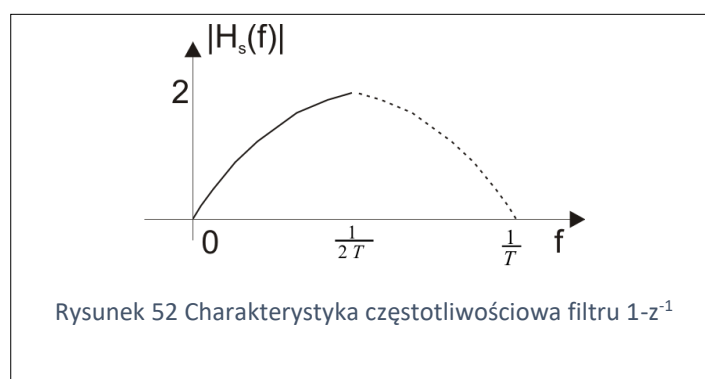
Charakterystyka jest odczytywana na okręgu o promieniu jednostkowym (rys.41). Biegun znajdujący się w pobliżu okręgu wywołuje wzrost wartości charakterystyki (rezonans filtra). Z kolei zero wywołałoby zmniejszenie się charakterystyki (antyrezonans). Na rys. 51 pokazano wartość bezwzględną charakterystyki częstotliwościowej. Rezonans występuje na częstotliwości określonej kątem ϕ (rys.50). 3-decybelowe pasmo

rezonansu ma związek z odległością bieguna od okręgu. Ponadto występuje „podbicie” charakterystyki na częstotliwości równej połowie częstotliwości próbkowania. Ma to związek z trzecim biegunem leżącym na osi rzeczywistej.



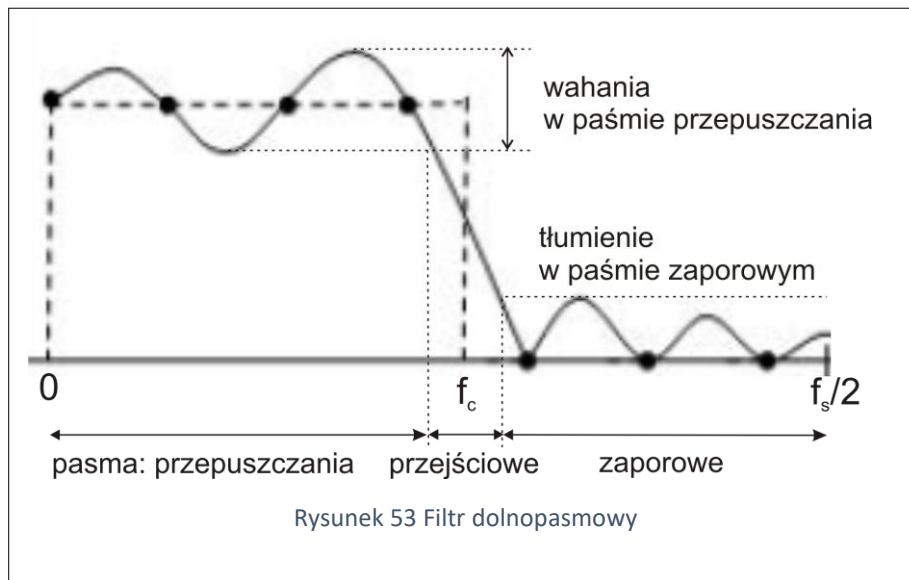
Rozpatrzmy jeszcze przykład prostego filtra o transmitancji $H(z) = 1 - z^{-1} = \frac{z-1}{z}$. Jest to filtr FIR (biegun w początku układu współrzędnych oznacza tylko opóźnienie). Jako FIR jest on stabilny. Jego odpowiedź impulsowa składa się z dwóch próbek: $h_0 = 1$ i $h_1 = -1$. Charakterystykę częstotliwościową otrzymamy przez podstawienie $z = e^{j2\pi fT} = e^{j2\pi f/f_s}$: $H_s(f) = 1 - e^{-j2\pi fT}$. Jeśli interesuje nas częstotliwość $f=0$, ćwierć częstotliwości próbkowania $f=1/(4T)$ czy połowa częstotliwości próbkowania $f=1/(2T)$, to można podstawić odpowiednie wartości zmiennej z z tab. 2. I tak, dla $f=0$ otrzymujemy $H_s(0) = 0$, a dla $f=1/(2T)$, $H_s(\frac{1}{2T}) = 2$.

Miejsce zerowe transmitancji to $z_1=1$. Leży ono na okręgu jednostkowym i sprawia że sygnały o określonej częstotliwości są całkowicie tłumione. Wartości $z_1=1$ odpowiada częstotliwość zerowa. Tak więc próbki sygnału o wartości stałej (czyli ciągi tych samych próbek) zostaną wytłumione. Z kolei spróbkowane sygnały o częstotliwości równej połowie częstotliwości próbkowania będą wzmacnione dwukrotnie -rys.52. Filtr jest górnoprzepustowy, spadek wzmacnienia dla częstotliwości większych od połowy częstotliwości próbkowania wynika jedynie z lustrzanego odbicia, którego przyczyną jest próbkowanie.



7.6 Projektowanie filtrów

Najczęściej rozwiązywanym problemem jest synteza filtra spełniającego określone wymagania odnoszące się do charakterystyki częstotliwościowej. Jako przykład weźmy filtr dolnopasmowy. Na rys.53 pokazano charakterystykę częstotliwościową idealnego filtra (linia przerywana) o częstotliwości granicznej f_c . Typowy filtr zrealizowany w praktyce odbiega od idealnego. Celem projektowania jest powiększenie tłumienia w paśmie zaporowym (zwykle określa się je w decybelach – dB), zmniejszenie wahań w paśmie przepuszczania i zawężenie pasma przejściowego.



7.6.1 Projektowanie filtrów FIR metodą próbkowania w dziedzinie częstotliwości

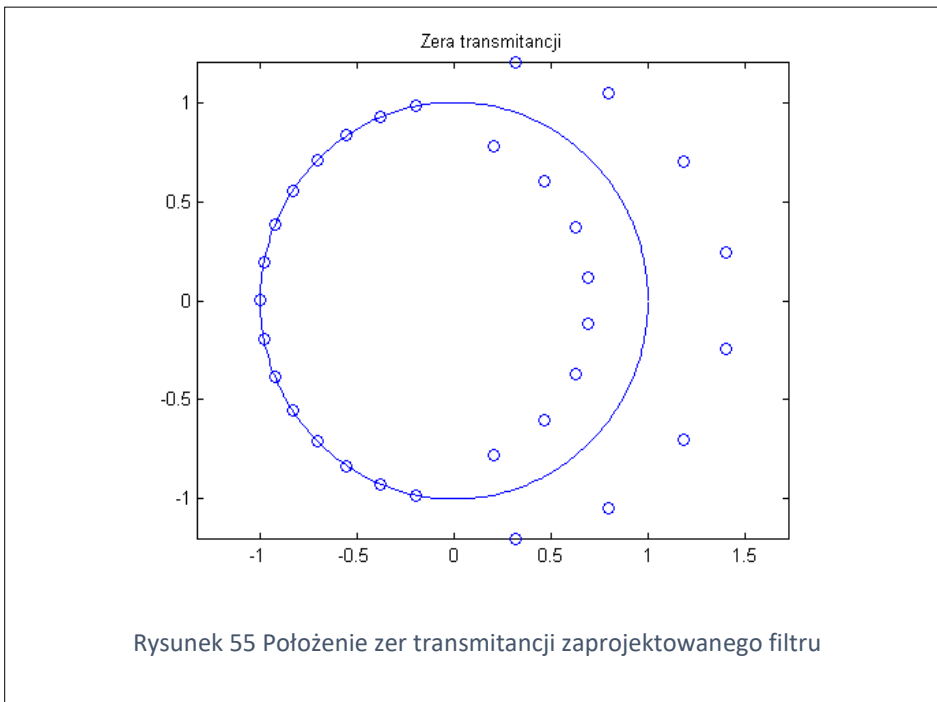
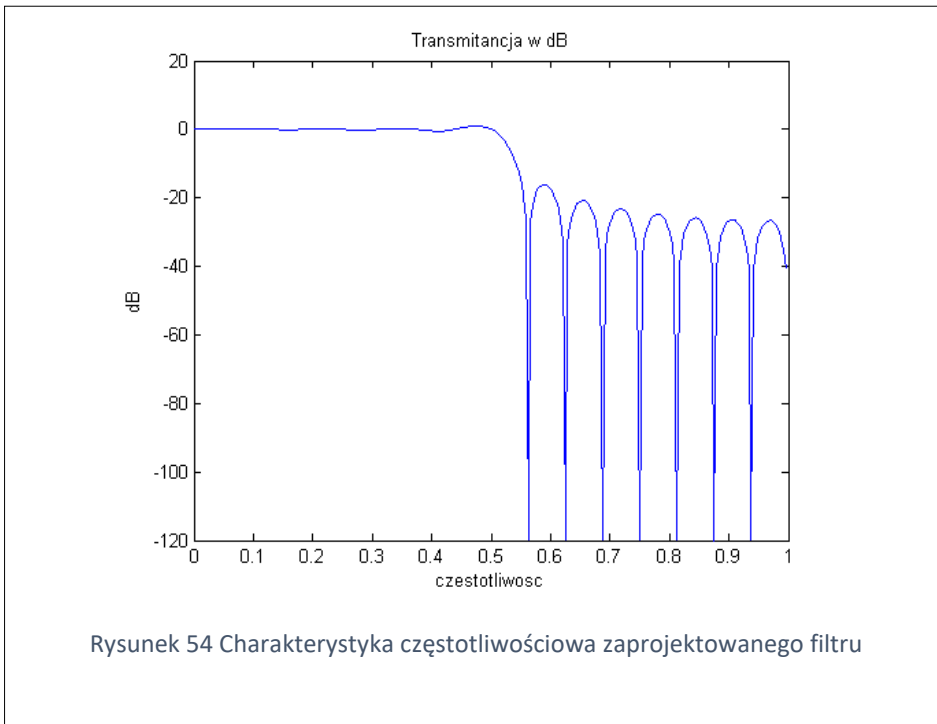
Metoda ta opiera się na wykorzystaniu odwrotnej Dyskretnej Transformaty Fouriera (IDFT):

1. Próbkujemy idealną charakterystykę częstotliwościową (linia przerywana na rys.53) w częstotliwościach $f_k = \frac{k}{TL}$, $k = 0, 1, \dots, L - 1$. Pamiętajmy o odtworzeniu „lustrzanego odbicia”, gdyż obejmujemy zakres częstotliwości od 0 do częstotliwości próbkowania $1/T$ (T jest okresem próbkowania). Oznacza to, że $X_{L-k} = X_k^*$ (gwiazdka oznacza sprzężenie.)
2. Utworzony w ten sposób wektor \bar{H} poddajemy odwrotnej transformacji DFT:

$$\bar{h} = \bar{W}^{-1} \bar{H} = IDFT(\bar{H}) \quad (92)$$

3. Otrzymany wektor \bar{h} zawiera próbki odpowiedzi impulsowej filtru dolnopasmowego. Można go wykorzystać do filtracji sygnału $\{x_n\}$: $y_n = \sum_{i=0}^{L-1} h_i x_{n-i}$.
4. Aby porównać zaprojektowany filtr z filtrem idealnym, obliczamy DTFT odpowiedzi impulsowej, czyli charakterystykę częstotliwościową zaprojektowanego filtru, podstawiając $z = e^{j2\pi fT} = e^{j2\pi f/f_s}$ do wzoru na transmitancję: $H(z) = \sum_{i=0}^{L-1} h_i z^{-i}$.

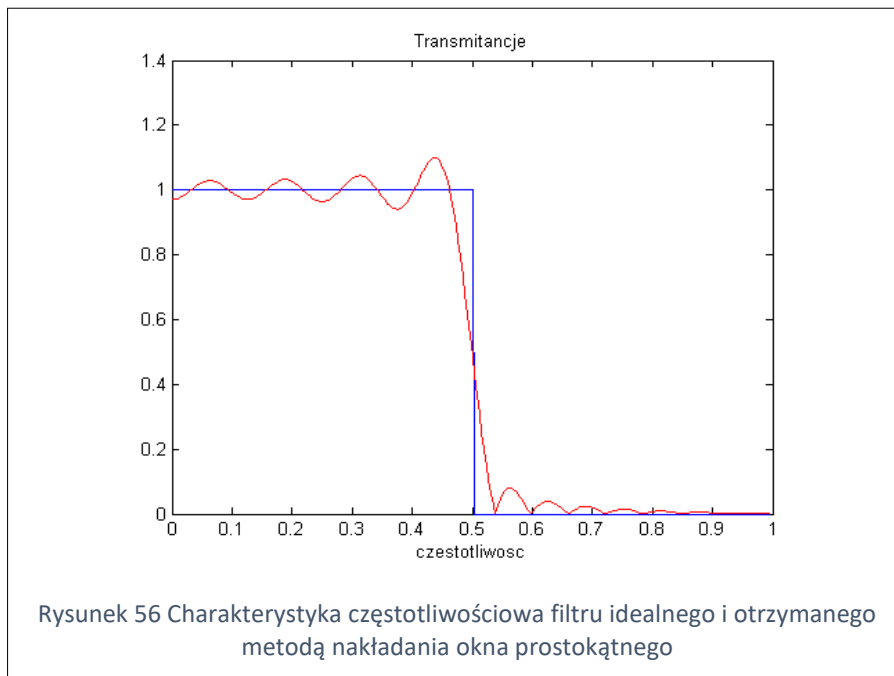
Przykładowe wyniki podano na rys.54, gdzie wykreślono wartość bezwzględną charakterystyki częstotliwościowej w decybelach w zakresie częstotliwości od 0 do połowy częstotliwości próbkowania. Na rys.55 podano położenie zer transmitancji zaprojektowanego filtru. W zakresie do połowy częstotliwości próbkowania występuje 8 zer w paśmie zaporowym. Ich wpływ widać na rys.54: charakterystyka częstotliwościowa osiąga wartość zerową (w decybelach to $-\infty$) w 8 równoodległych punktach. Są to częstotliwości, w których pobraliśmy próbki idealnej charakterystyki częstotliwościowej. Zaprojektowany filtr ma niską wartość tłumienia w paśmie zaporowym, około 20 dB.



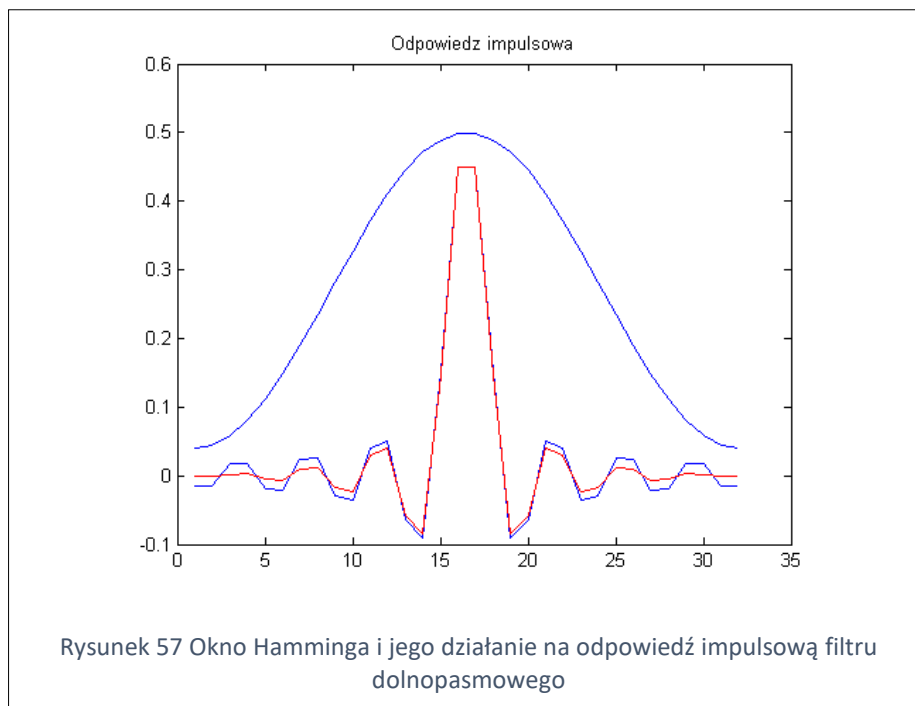
7.6.2 Projektowanie filtrów FIR metodą okien czasowych

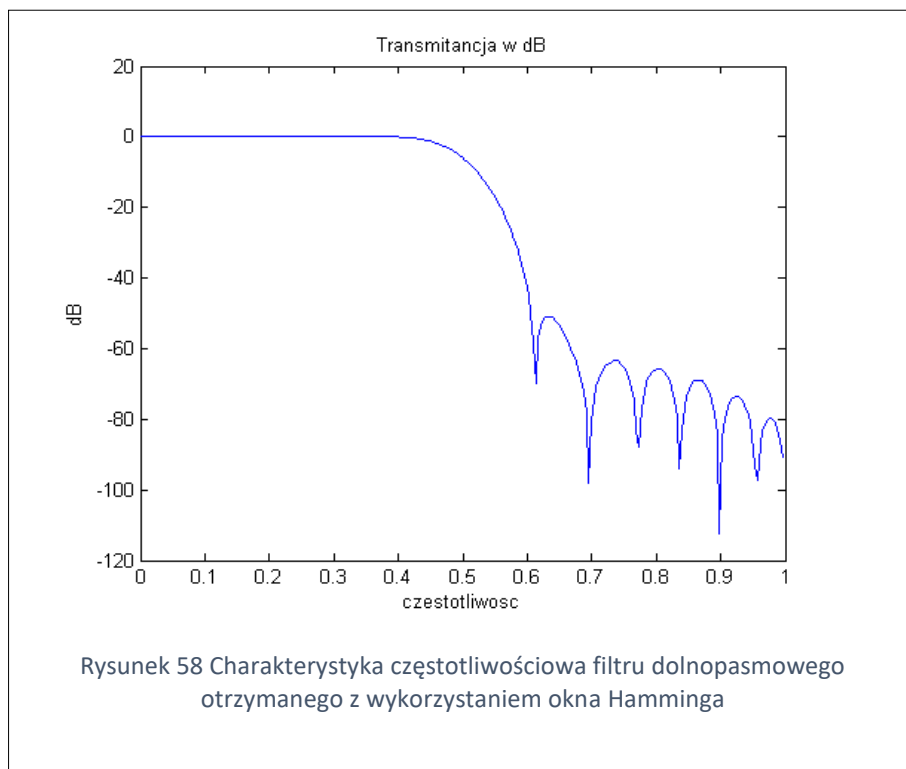
Idealny filtr dolnopasmowy czasu ciągłego ma odpowiedź impulsową $h(t) = 2B \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}$, gdzie B jest pasmem filtra (patrz zadanie 4, p.8.1). Aby ograniczyć czas trwania odpowiedzi impulsowej, mnożymy $h(t)$ przez okno prostokątne $w(t)$ o czasie trwania LT i pobieramy L próbek (T jest okresem próbkowania). Otrzymujemy w ten sposób wektor \bar{h} zawierający próbki odpowiedzi impulsowej filtra dolnopasmowego. Dalej postępujemy jak w p. 7.6.1.

Mnożenie w dziedzinie czasu oznacza splatanie w dziedzinie częstotliwości. Zaprojektowany filtr będzie miał charakterystykę częstotliwościową, która jest splotem charakterystyki filtra idealnego z widmem okna. Na rys.56 pokazano wartość bezwzględną charakterystyki częstotliwościowej filtra otrzymanego tą metodą.



Zaprojektowany filtr charakteryzuje się niewystarczającym tłumieniem w paśmie zaporowym (około 20 dB) i dużymi wahaniami w paśmie przepuszczania. Tłumienie można poprawić i zarazem zmniejszyć wahania charakterystyki, jeśli zastosujemy okno o innym kształcie, np. okno Hamminga (rys.57).





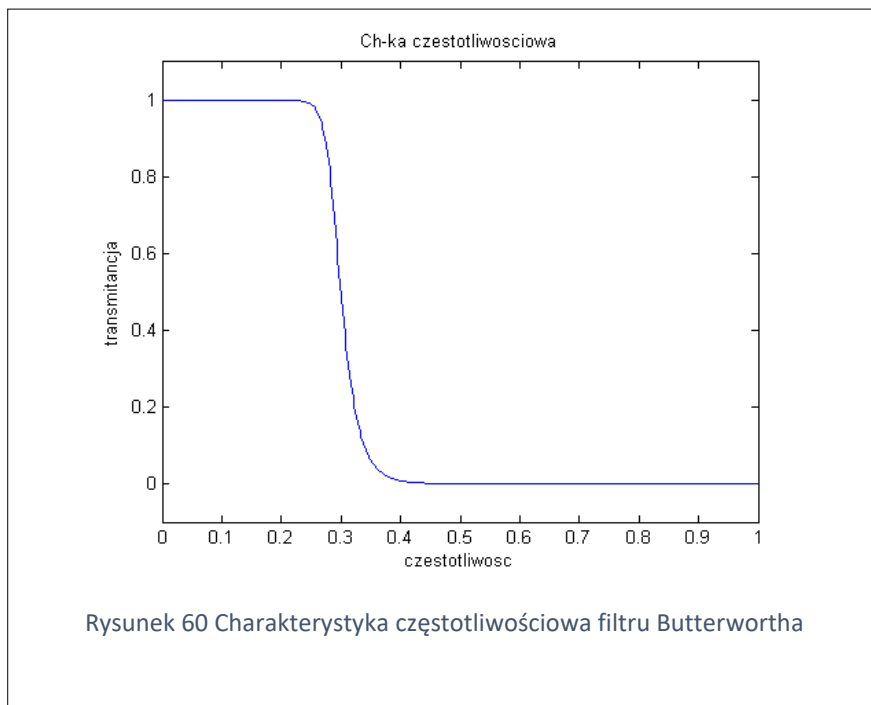
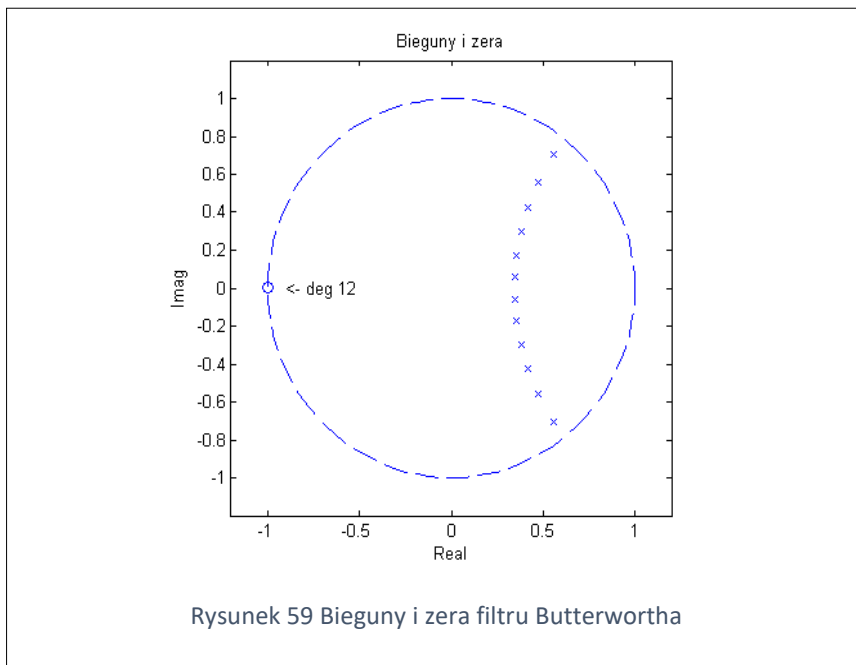
Na rys.58 pokazano charakterystykę częstotliwościową filtra otrzymanego przez nakładanie okna Hamminga. Nastąpiła znaczna poprawa tłumienia (wzrosło o około 30 dB) kosztem niewielkiego poszerzenia pasma przejściowego.

7.6.3 Filtr Butterwortha jako przykład filtra o nieskończonej odpowiedzi impulsowej

Dzięki wykorzystaniu nie tylko zer, ale i biegunów, uzyskujemy większe możliwości kształtowania charakterystyki częstotliwościowej. Przykładem może być filtr Butterwortha o następującej transmitancji:

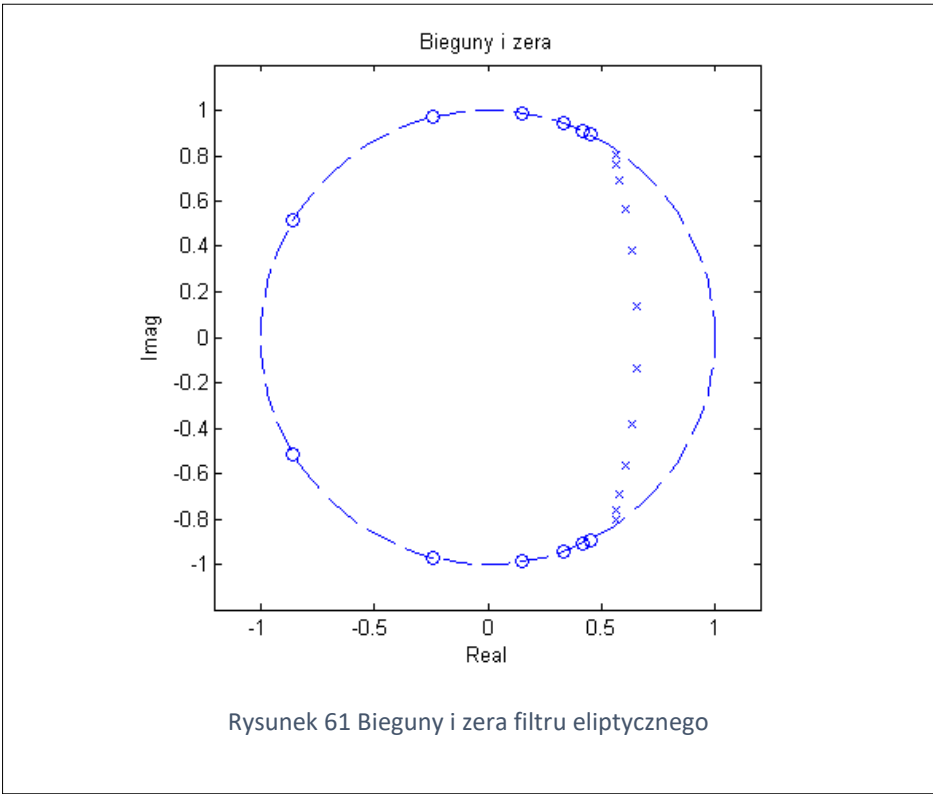
$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{g(z+1)^M}{\prod_{i=1}^M (z - z_i)} \quad (93)$$

Transmitancja jest funkcją wymierną o M zerach i M biegunach. Wszystkie zera leżą w punkcie $z = -1$, który odpowiada częstotliwości równej połowie częstotliwości próbkowania (rys.41). Zapewnia to bardzo dobre tłumienie wysokich częstotliwości i brak wahań w paśmie zaporowym. Położenie biegunów z_1, z_2, \dots, z_M zapewnia stałą wartość charakterystyki częstotliwościowej w paśmie przepuszczania, gdyż $\prod_{i=1}^M |(z - z_i)| = \text{const}$ dla z leżących na okręgu jednostkowym w zakresie niskich częstotliwości – rys.59. W efekcie otrzymuje się charakterystykę częstotliwościową bez wahań w paśmie przepuszczania i zaporowym – rys.60.. Pewną wadą jest szerokie pasmo przejściowe, jednak można je zawęzić, zwiększając liczbę zer i biegunów.

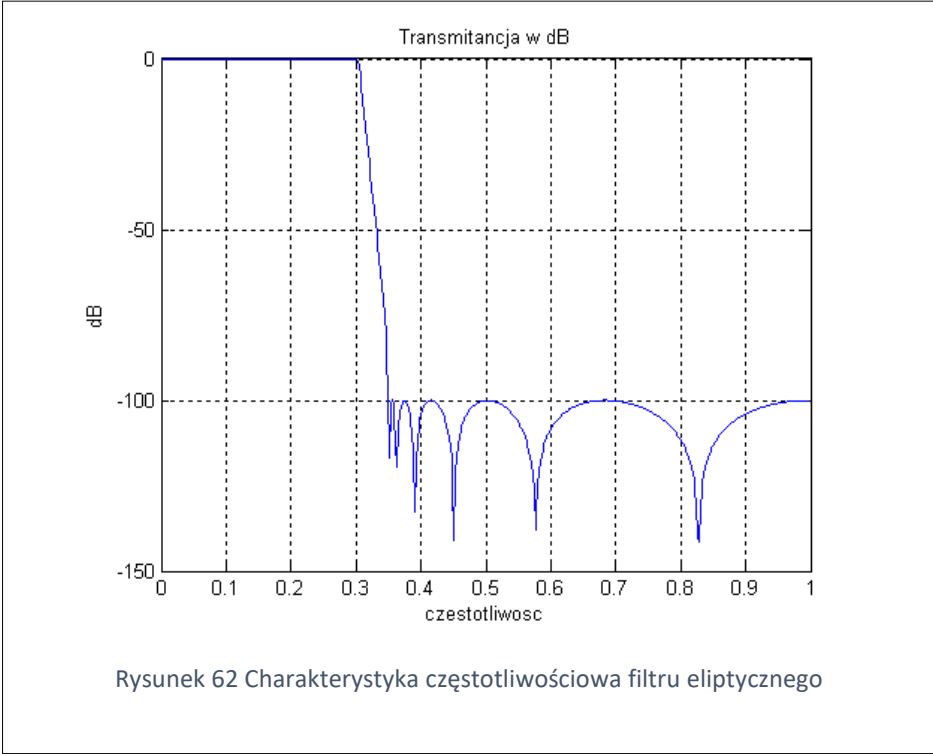


7.6.4 Filtr eliptyczny (Cauera)

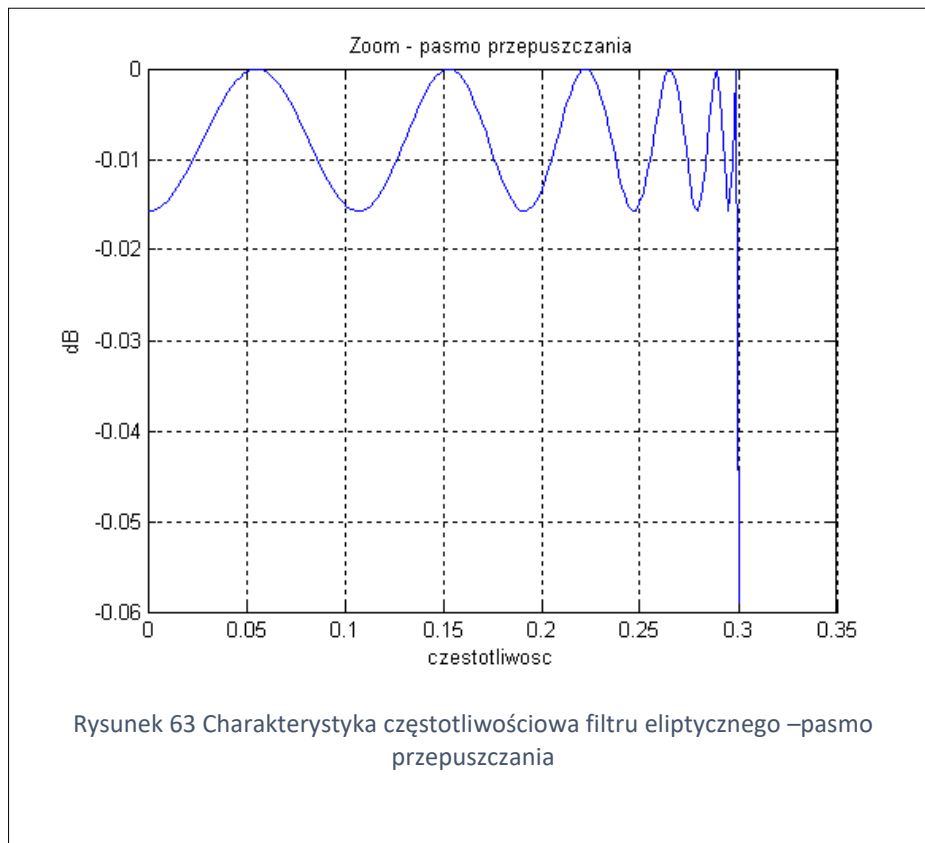
Akceptując niewielkie wahania charakterystyki w zakresie pasma przepuszczania i zaporowego, można osiągnąć wąskie pasmo przejściowe. Te założenia spełnia filtr eliptyczny, którego zera i bieguny pokazano na rys.61. Nierównomierny rozkład zer w zakresie pasma zaporowego zapewnia wysokie tłumienie (100 dB, rys.62). Rozkład biegunów gwarantuje bardzo niskie wahania w paśmie przepuszczania (ułamek decybel, rys.63), a skupienie zer i biegunów w pobliżu wartości zmiennej z odpowiadającej częstotliwości granicznej filtru zapewnia wąskie pasmo przejściowe – patrz rys.62.



Rysunek 61 Bieguny i zera filtru eliptycznego



Rysunek 62 Charakterystyka częstotliwościowa filtru eliptycznego



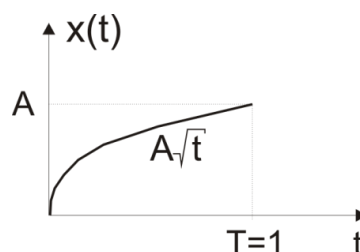
7.6.5 Ćwiczenie laboratoryjne – filtry cyfrowe

W Module 4 znajdą Państwo opis ćwiczenia laboratoryjnego z projektowania filtrów cyfrowych. Obejmuje ono symulacje wymienionych w podrozdziale 7.6 metod projektowania filtrów, porównanie ich charakterystyk częstotliwościowych, badanie wpływu długości odpowiedzi impulsowej, kształtu okna, liczby zer i biegunów na charakterystyki filtrów. Do ćwiczenia opracowano instrukcję i film demonstrujący obsługę programu i wykonywanie symulacji.

8 Zadania i testy

8.1 Przykładowe zadania z rozwiązaniami

1. Oblicz energię sygnału jak na rysunku



Moc chwilowa wynosi $P(t) = x^2(t) = [A\sqrt{t}]^2 = A^2t$

Energia $E = \int_0^T x^2(t)dt = A^2 \int_0^1 t dt = \frac{A^2}{2}$

2. Oblicz splot sygnałów $x(t)$ i $h(t)$ jak na rysunku

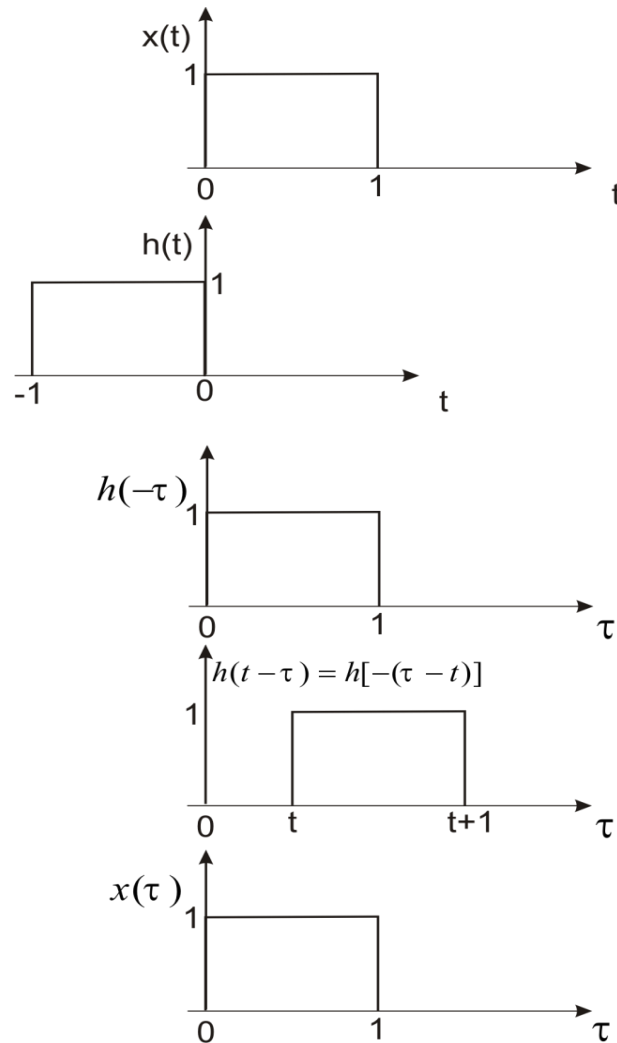
Całka splotowa: $y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t - \tau)d\tau$

Pierwszym krokiem jest obliczenie lustrzanego odbicia $h(-\tau)$.

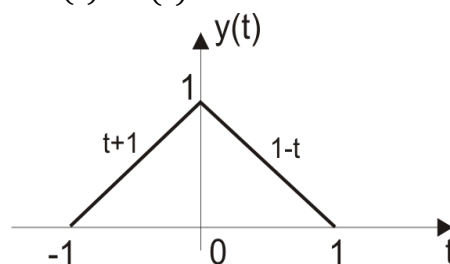
Funkcja $h(t-\tau)$ to $h(-\tau)$ przesunięta w prawo o t .

Funkcję $h(t-\tau)$ mnożymy przez $x(\tau)$ – w tym wypadku otrzymujemy prostokąt będący wspólną częścią $h(t-\tau)$ i $x(\tau)$. Obliczenie całki (pola tego prostokąta) nie nastrocza trudności.

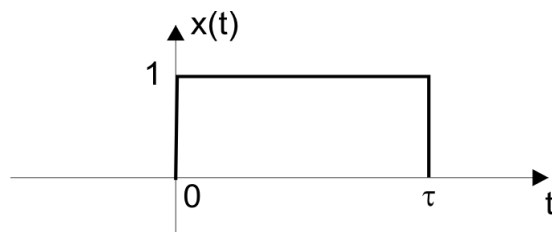
Jeżeli funkcję $h(-\tau)$ przesuniemy w prawo lub w lewo o więcej niż 1, wówczas część wspólna zaniknie i splot będzie równy 0. Przy przesunięciu zerowym ($t=0$) $h(t-\tau)$ i $x(\tau)$ pokrywają się całkowicie i splot przyjmuje największą wartość równą 1.



Poniżej pokazano wykres splotu $y(t) = x(t) * h(t)$.



3. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $x(t)$



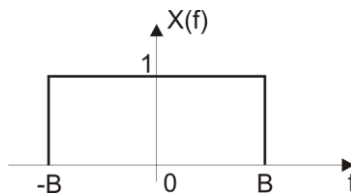
Oczywiście można skorzystać z definicji (wzór 12). Można też uniknąć całkowania, wykorzystując wynik dla impulsu prostokątnego z rys. 14. Naszym zadaniem jest obliczenie transformaty Fouriera sygnału z rys.14 przesuniętego w prawo o $\tau/2$.

$$x(t) = \text{rect}_\tau(t - \frac{\tau}{2})$$

Wynik dla nieprzesuniętego impulsu (wzór 19): $F[\text{rect}_\tau(t)] = \tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}$

Z twierdzenia o przesunięciu (20): $F[\text{rect}_\tau(t - \frac{\tau}{2})] = \tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} e^{-j\pi f \tau}$

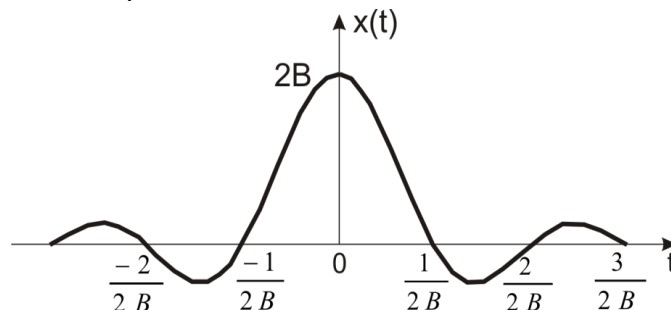
4. Oblicz transformatę odwrotną Fouriera mając dane widmo $X(f)$ jak na rysunku



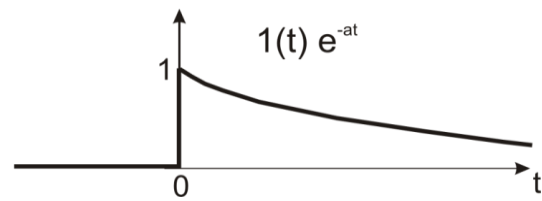
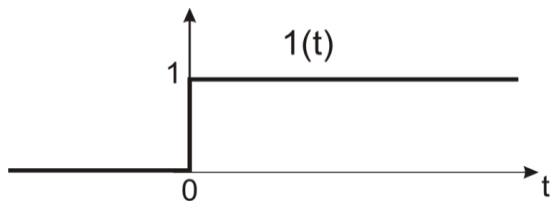
Tym razem obliczymy całkę (14):

$$\begin{aligned} x(t) &= F^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-B}^B e^{j2\pi f t} df = \\ &= \frac{1}{j2\pi t} [e^{j2\pi B t} - e^{-j2\pi B t}] = \frac{1}{\pi t} \frac{e^{j2\pi B t} - e^{-j2\pi B t}}{2j} = \frac{1}{\pi t} \sin(2\pi B t) = \\ &= 2B \frac{\sin(2\pi B t)}{2\pi B t} \end{aligned}$$

Obliczoną funkcję czasu pokazano na rysunku



5. Sprawdź słuszność wzoru Parsevala (28), posługując się przykładowym sygnałem $x(t) = 1(t)e^{-at}$, gdzie $1(t)$ – skok jednostkowy (patrz rysunek).



Wg twierdzenia Parsevala energię sygnału można obliczyć w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstotliwości.

W dziedzinie czasu otrzymujemy:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_0^{\infty} (e^{-at})^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{-2a} e^{-2at} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{-2a} [0 - 1] = \frac{1}{2a}$$

Widmo sygnału $x(t)$:

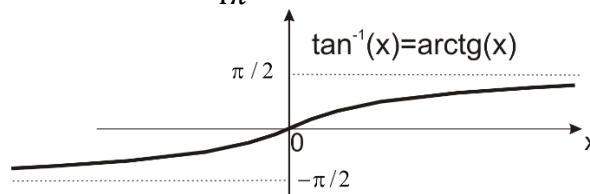
$$X(f) = F[1(t)e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{(-a-j2\pi f)t} dt = \frac{1}{-a-j2\pi f} e^{(-a-j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j2\pi f}$$

Gęstość energii:

$$|X(f)|^2 = X(f)X^*(f) = \frac{1}{a+j2\pi f} \frac{1}{a-j2\pi f} = \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Energia jako całka z gęstości energii

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{a^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{\frac{a^2}{4\pi^2} + f^2} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\frac{a}{2\pi}} \arctg\left(\frac{f}{\frac{a}{2\pi}}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi a} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2a}$$



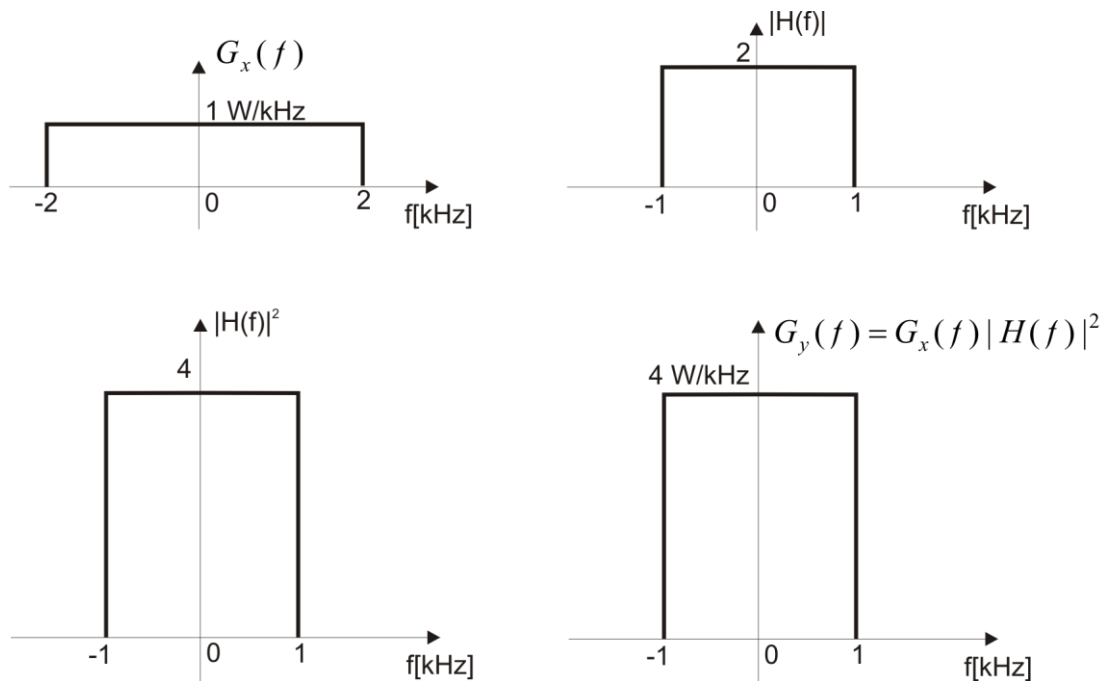
Ten sam wynik otrzymaliśmy w dziedzinie czasu, zgodnie ze wzorem Parsevala:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \frac{1}{2a}$$

6. Na rysunku podano gęstość mocy sygnału $x(t)$: $G_x(f)$ oraz wartość bezwzględną charakterystyki częstotliwościowej filtra liniowego niezależnego od czasu (LTI): $|H(f)|$. Oblicz i naszkicuj gęstość mocy sygnału $y(t)$ na wyjściu tego filtra: $G_y(f)$. Oblicz moc sygnału na wejściu i wyjściu filtra: P_x i P_y .

Rozwiązanie:

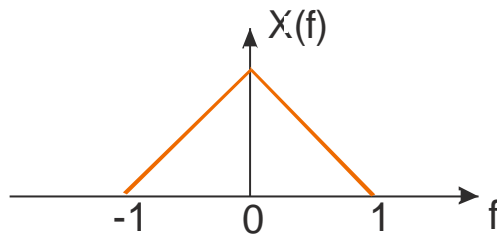
Stosujemy równanie (41): $G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$. Resztę wyjaśniono na rysunku.



Mając gęstości mocy obliczamy moce:

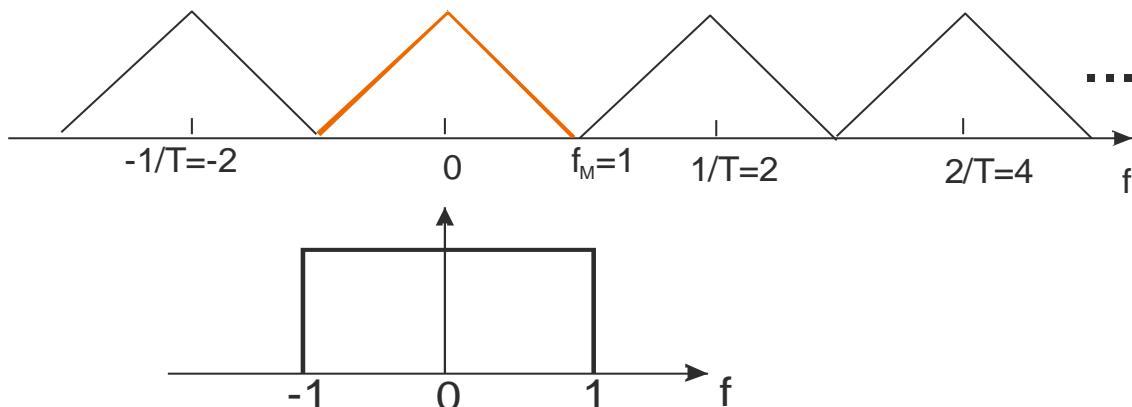
$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = 4W \quad P_y = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f) df = 8W$$

7. Widmo sygnału $x(t)$ pokazano na rysunku. Sygnał poddano próbkowaniu z częstotliwością $f_s = \frac{1}{T} = 2$. Narysuj widmo sygnału próbek. Czy można odtworzyć sygnał $x(t)$ z próbek? A jeśli tak, to w jaki sposób?

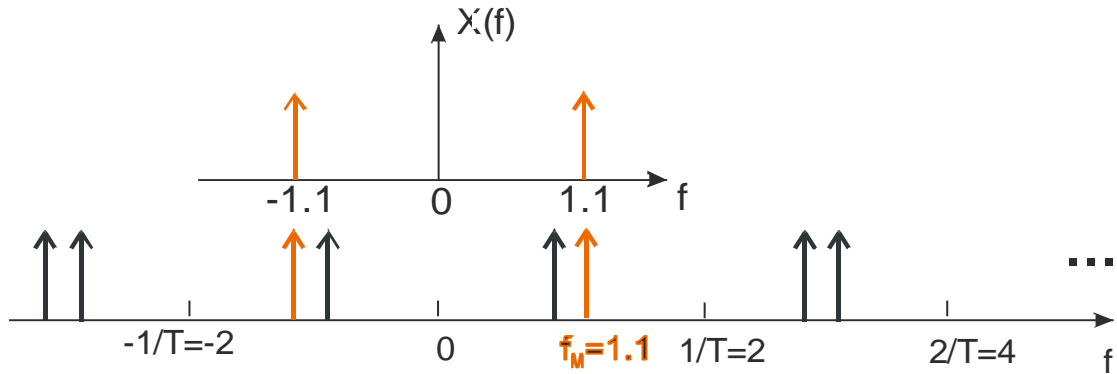


Rozwiązanie:

Widmo sygnału próbek zawiera kopie widmowe sygnału ciągłego, powtarzające się co f_s , co pokazano na rysunku poniżej. Kopie widmowe nie pokrywają się, więc jest możliwe odzyskanie sygnału bez zniekształceń. Wynika to zresztą z twierdzenia o próbkowaniu: pasmo sygnału wynosi 1 a częstotliwość próbkowania jest 2 razy większa. Do odtworzenia sygnału $x(t)$ z próbek potrzebny jest filtr dolnopasmowy o częstotliwości granicznej równej 1, co również pokazano na rysunku.



8. Treść zadania jak poprzednio, z tym, że sygnał $x(t)$ jest sygnałem harmonicznym o częstotliwości 1.1. Na rysunku pokazano widmo sygnału ciągłego i widmo sygnału próbek. Nieprzesuniętą kopię widmową, odpowiadającą sygnałowi ciągłemu $x(t)$, oznaczono kolorem. Po zastosowaniu filtra dolnopasmowego o częstotliwości granicznej równej 1, na wyjściu pojawi się sygnał o częstotliwości $2-1.1=0.9$. Oczywiście wszystkie te problemy wynikają z nieprzestrzegania twierdzenia o próbkowaniu: Częstotliwość próbkowania powinna w tym wypadku przekraczać wartość 2.2.



9. Oblicz odwrotną transformatę Zet, dane $X(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-0.6)}$
 Rozkład na ułamki proste: $X(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-0.6)} = \frac{r_1 z}{(z-0.5)} + \frac{r_2 z}{(z-0.6)}$

Obliczamy współczynniki r_1, r_2 :

$$r_1 = \lim_{z \rightarrow 0.5} X(z) \frac{z-0.5}{z} = \frac{z}{z-0.6} \Big|_{z=0.5} = -5$$

$$r_2 = \lim_{z \rightarrow 0.6} X(z) \frac{z-0.6}{z} = \frac{z}{z-0.5} \Big|_{z=0.6} = 6$$

Otrzymujemy

$$x_n = \sum_{i=1}^2 r_i (z_i)^n 1_n = r_1 (z_1)^n 1_n + r_2 (z_2)^n 1_n = (-5 \cdot 0.5^n + 6 \cdot 0.6^n) 1_n$$

10. Filtr jest opisany równaniem różnicowym $y_n = x_n + \frac{1}{4}y_{n-1} + \frac{1}{8}y_{n-2}$

Czy jest to filtr o skończonej odpowiedzi impulsowej (FIR), czy o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (IIR)?
 Oblicz transmitancję tego filtra $H(z)$.

Czy ten filtr jest stabilny?

Rozwiązanie:

Już na podstawie równania różnicowego można stwierdzić, że jest to IIR, gdyż próbka bieżąca sygnały wyjściowego y_n zależy od poprzednich próbek sygnału wyjściowego.

Po przepisaniu równania różnicowego w postaci $y_n - \frac{1}{4}y_{n-1} - \frac{1}{8}y_{n-2} = x_n$ obliczamy transformatę Zet obu stron równania, korzystając z twierdzenia o przesunięciu: $Z[y_{n-i}] = z^{-i}Y(z)$. Otrzymujemy

$$Y(z) - \frac{1}{4}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{8}z^{-2}Y(z) = X(z)$$

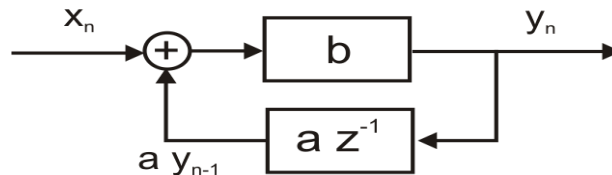
$$Y(z)[1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}] = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}}$$

Transmitancja jest funkcją wymierną, w mianowniku jest wielomian, co potwierdza fakt, że jest to IIR.

Stabilność zależy od położenia biegunów, czyli zer wielomianu $z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}$. Wielomian ma 2 pierwiastki(zera), które są biegunami transmitancji $H(z)$: $z_1 = \frac{1}{2}$ $z_2 = -\frac{1}{4}$. Ich wartości bezwzględne są mniejsze niż 1, bieguny leżą wewnątrz koła o promieniu jednostkowym, a więc filtr jest stabilny.

11. Układ jest opisany schematem blokowym. Oblicz transmitancję tego układu. Jaki jest warunek jego stabilności?



Ze schematu można odczytać równanie różnicowe: $y_n = b(x_n + ay_{n-1})$.

Przepiszemy je w postaci $y_n - aby_{n-1} = bx_n$, a następnie obliczymy transformatę Zet obu stron równania:

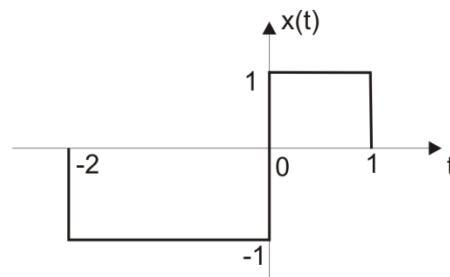
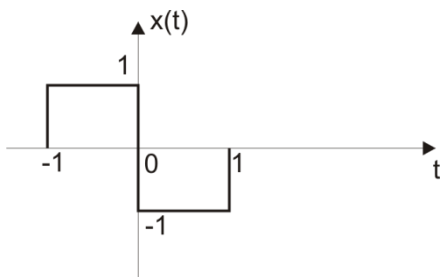
$Y(z) - abz^{-1}Y(z) = bX(z)$. Po przekształceniu otrzymujemy transmitancję:

$$Y(z)[1 - abz^{-1}] = bX(z) \rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b}{1 - abz^{-1}} = \frac{bz}{z - ab}$$

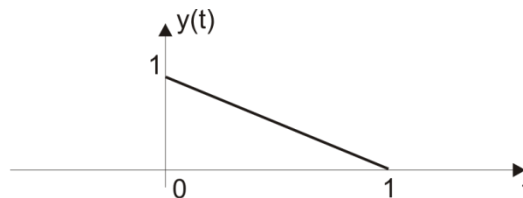
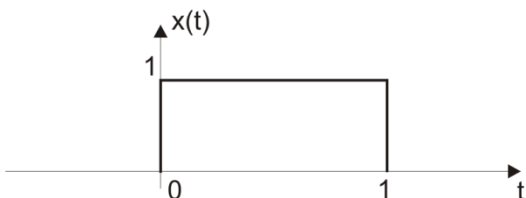
Transmitancja ma biegun w punkcie $z_1 = ab$. Filtr będzie stabilny gdy $|ab| < 1$.

8.2 Zadania do rozwiązania

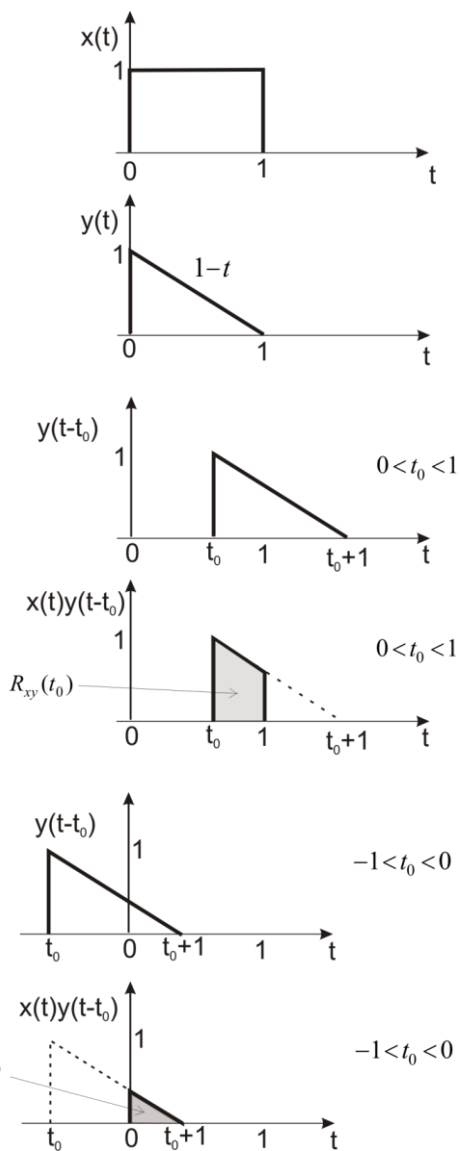
12. Oblicz transformatę Fouriera sygnałów przedstawionych na rysunku



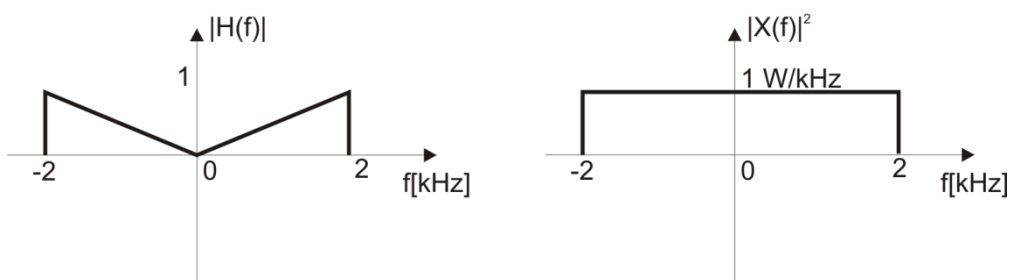
13. Oblicz korelację sygnałów $x(t)$ i $y(t)$ jak na rysunku:



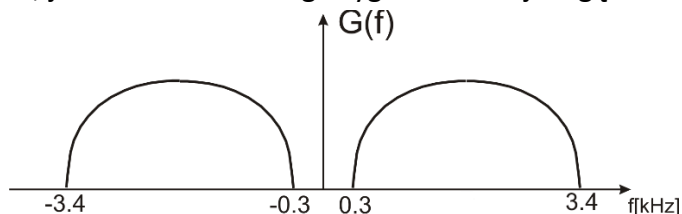
Korelację $R_{xy}(t_0) = \int x(t)y(t - t_0)dt$ oblicza się podobnie jak splot: t_0 jest teraz przesunięciem funkcji $y(t)$. Nie oblicza się lustrzanego odbicia, jak to miało miejsce w splotcie. Dla ułatwienia naszkicowano przesuniętą funkcję $y(t)$ i część wspólną $x(t)$ i $y(t-t_0)$.



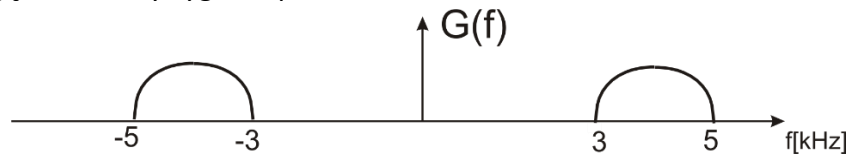
14. Na rysunku podano gęstość energii sygnału $x(t)$: $|X(f)|^2$ oraz wartość bezwzględną charakterystyki częstotliwościowej filtra liniowego niezależnego od czasu (LTI): $|H(f)|$. Oblicz i narysuj gęstość energii sygnału $y(t)$ na wyjściu tego filtra: $|Y(f)|^2$. Oblicz energię sygnału na wejściu i wyjściu filtra: E_x i E_y .



15. Na rysunku podano gęstość mocy telefonicznego sygnału mowy. Czy częstotliwość próbkowania 8 kHz, stosowana w systemie PCM, jest właściwa dla tego sygnału? Jaka jest gęstość mocy sygnału próbek?



16. Jaka jest najniższa częstotliwość próbkowania dla sygnału pasmowego gęstości mocy pokazanej na rysunku? Narysuj gęstość mocy sygnału próbek.



17. Oblicz transformatę Zet ciągu x_n , którego wartości są równe zeru dla $n < 1$, natomiast dla pozostałych wartości n , $x_n = 0.9^{n-1}$
18. Transformata Zet wynosi $X(z) = \frac{4}{(z+0.6)}$. Oblicz próbki sygnału x_n (tzn. oblicz transformatę odwrotną Zet).
19. Sygnał x_n ma transformatę Zet: $X(z) = \frac{z}{z^2+z+0.25}$. Oblicz transformatę Zet sygnału $y_n = 2x_{n-2}$ (tzn. wzmacnionego 2 razy i opóźnionego o 2 próbki).
Wskazówka: skorzystaj z właściwości transformaty Z.
20. Oblicz splot dwóch sygnałów dyskretnych: $x_n = \delta_n - 0.5\delta_{n-1}$ (ma on 2 próbki: $x_0=1$ i $x_1=-0.5$) i sygnału $h_n = 0.5\delta_n + \delta_{n-1} + \delta_{n-2}$ (ma on 3 próbki: $h_0=0.5$, $h_1=1$ i $h_2=1$).
Wskazówka: Można to wykonać mnożąc transformaty Zet.
21. Układ dyskretny (filtr cyfrowy) jest opisany równaniem różnicowym: $y_n = x_n - \frac{2}{3}y_{n-1} + \frac{8}{9}y_{n-2}$. Czy jest to układ o skończonej czy nieskończonej odpowiedzi impulsowej? Jaką ma transmitancję? Czy jest to układ stabilny?
22. Czy filtr o transmitancji $H(z) = \frac{1}{1-4z^{-2}}$ jest stabilny? Uzasadnij odpowiedź.
23. Sporządź orientacyjny wykres modułu charakterystyki częstotliwościowej filtru o transmitancji $H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$ w zakresie częstotliwości od zera do częstotliwości próbkowania. Jakie jest wzmocnienie filtru dla sygnału o wartości stałej, sygnału o częstotliwości równej połowie częstotliwości próbkowania i sygnału o częstotliwości równej częstotliwości próbkowania?

9 Biblioteka

Laboratorium (ćwiczenie „Filtracja cyfrowa” i materiały pomocnicze („Próbkowanie” i „Transformaty DFT, DCT”) opisano w Module 4.

10 Bibliografia

1. T.P. Zieliński "Cyfrowe przetwarzanie sygnałów w telekomunikacji- (PWN 2014)
2. M.Owen "Przetwarzanie sygnałów w praktyce", WKiŁ. 2009
3. A.Oppenheim, R.Shafer "Cyfrowe przetwarzanie sygnałów"
4. S.W.Smith "Cyfrowe przetwarzanie sygnałów - praktyczny poradnik"