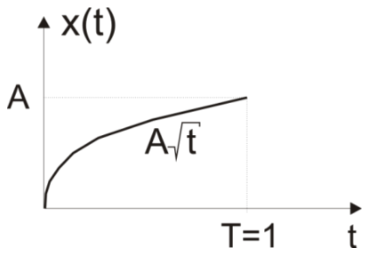
Przykładowe zadania z rozwiązaniami

1. Oblicz energię sygnału jak na rysunku



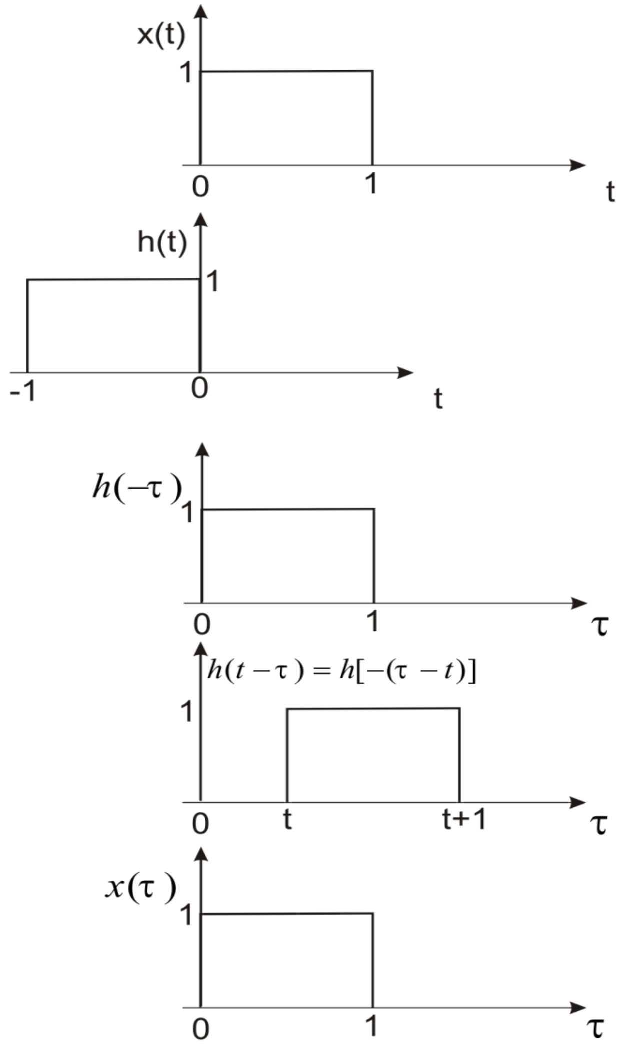
Moc chwilowa wynosi $P(t) = x^2(t) = [A\sqrt{t}]^2 = A^2 t$

Energia $E = \int_0^T x^2(t)dt = A^2 \int_0^1 t\,dt = \frac{A^2}{2}$

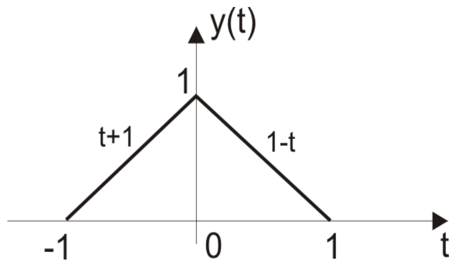
2. Oblicz splot sygnałów x(t) i h(t) jak na rysunku

Całka splotowa: $y(t) \ = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

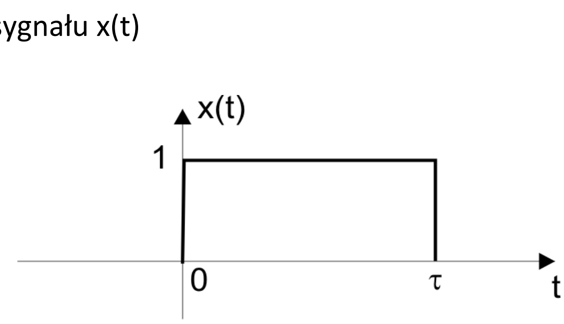
Pierwszym krokiem jest obliczenie lustrzanego odbicia h(-τ).
Funkcja h(t-τ) to h(-τ) przesunięta w prawo o t.
Funkcję h(t-τ) mnożymy przez x(τ) – w tym wypadku otrzymujemy prostokąt będący wspólną częścią h(t-τ) i x(τ). Obliczenie całki (pola tego prostokąta) nie nastręcza trudności.
Jeżeli funkcję h(-τ) przesuniemy w prawo lub w lewo o więcej niż 1, wówczas część wspólna zaniknie i splot będzie równy 0. Przy przesunięciu zerowym (t=0) h(t-τ) i x(τ) pokrywają się całkowicie i splot przyjmuje największą wartość równą 1.



Poniżej pokazano wykres splotu $y(t) = x(t) * h(t)$.



3. Oblicz transformatę Fouriera sygnału x(t)



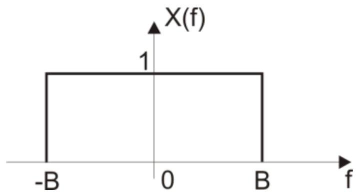
Oczywiście można skorzystać z definicji (wzór 12). Można też uniknąć całkowania, wykorzystując wynik dla impulsu prostokątnego z rys. 14. Naszym zadaniem jest obliczenie transformaty Fouriera sygnału z rys.14 przesuniętego w prawo o $\tau/2$.

$$x(t) = rect_\tau(t - \frac{\tau}{2})$$

Wynik dla nieprzesuniętego impulsu (wzór 19): $F[rect_\tau(t)] = \tau \frac{sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}$

Z twierdzenia o przesunięciu (20): $F[rect_\tau(t - \frac{\tau}{2})] = \tau \frac{sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} e^{-j\pi f \tau}$

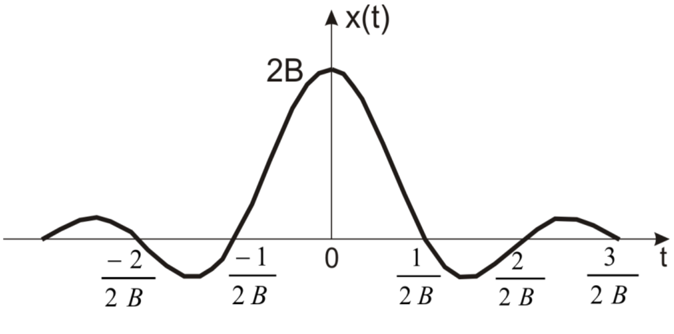
4. Oblicz transformatę odwrotną Fouriera mając dane widmo X(f) jak na rysunku



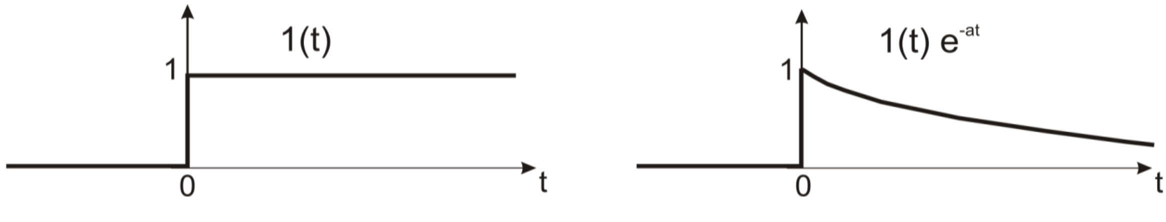
Tym razem obliczymy całkę (14):

$$x(t) = F^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t}\, df = \int_{-B}^{B} e^{j2\pi f t}\, df =$$
$$= \frac{1}{j2\pi t}[e^{j2\pi Bt} - e^{-j2\pi Bt}] = \frac{1}{\pi t} \frac{e^{j2\pi Bt} - e^{-j2\pi Bt}}{2j} = \frac{1}{\pi t} sin(2\pi Bt) =$$
$$= 2B \frac{sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}$$

Obliczoną funkcję czasu pokazano na rysunku



5. Sprawdź słuszność wzoru Parsevala (28), posługując się przykładowym sygnałem $x(t) = 1(t)e^{-at}$, gdzie 1(t) – skok jednostkowy (patrz rysunek).



Wg twierdzenia Parsevala energię sygnału można obliczyć w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstotliwości.

W dziedzinie czasu otrzymujemy:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{0}^{\infty} (e^{-at})^2 dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{-2a} e^{-2at}|_0^{\infty} = \frac{1}{-2a}[0-1] = \frac{1}{2a}$$

Widmo sygnału x(t):

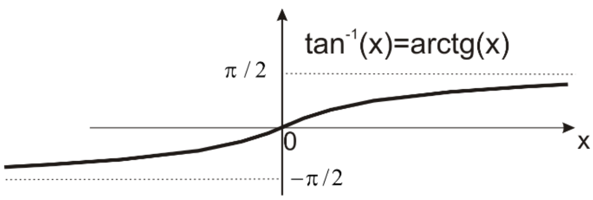
$$X(f) = F[1(t)e^{-at}] = \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{(-a-j2\pi f)t}\, dt = \frac{1}{-a-j2\pi f} e^{(-a-j2\pi f)t}|_0^{\infty}$$
$$= \frac{1}{a+j2\pi f}$$

Gęstość energii:

$$|X(f)|^2 = X(f)X^*(f) = \frac{1}{a+j2\pi f}\,\frac{1}{a-j2\pi f} = \frac{1}{a^2+4\pi^2 f^2}$$

Energia jako całka z gęstości energii

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{a^2+4\pi^2 f^2} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{\frac{a^2}{4\pi^2}+f^2} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{\frac{a}{2\pi}} arctg\left(\frac{f}{\frac{a}{2\pi}}\right)|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{2a}$$

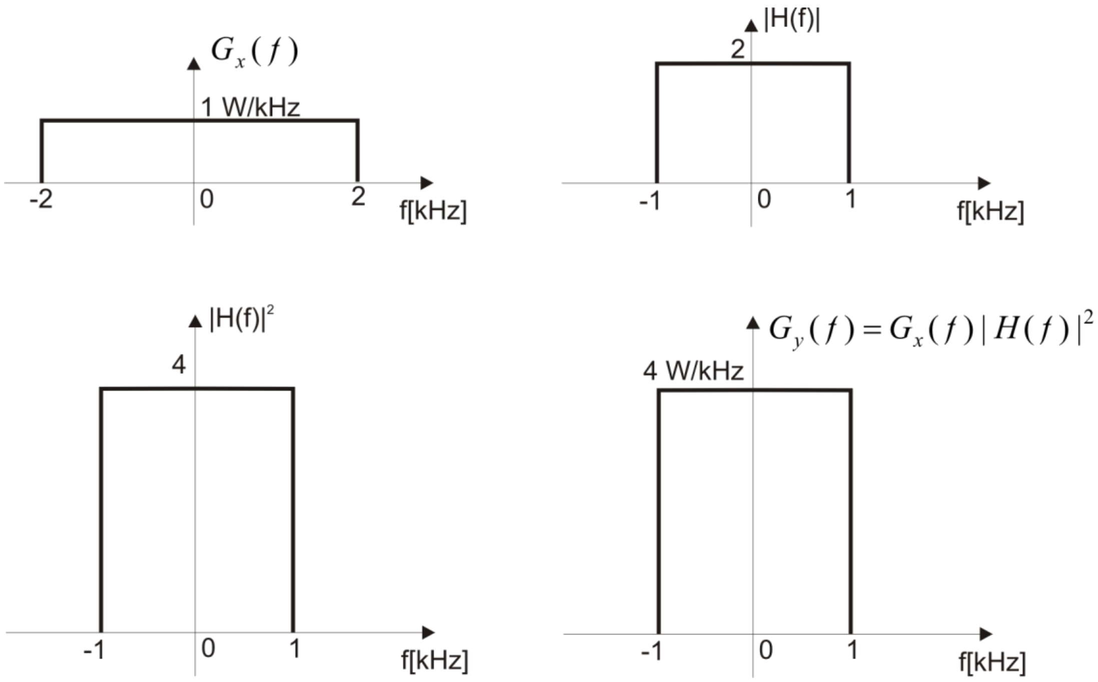


Ten sam wynik otrzymaliśmy w dziedzinie czasu, zgodnie ze wzorem Parsevala:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \frac{1}{2a}$$

6. Na rysunku podano gęstość mocy sygnału x(t): $G_x(f)$ oraz wartość bezwzględną charakterystyki częstotliwościowej filtru liniowego niezależnego od czasu (LTI): $|H(f)|$. Oblicz i naszkicuj gęstość mocy sygnału y(t) na wyjściu tego filtru: $G_y(f)$. Oblicz moc sygnału na wejściu i wyjściu filtru: P_x i P_y.

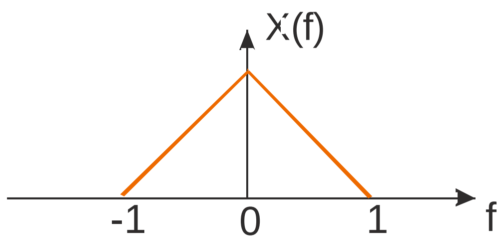
Rozwiązanie:
Stosujemy równanie (41): $G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$. Resztę wyjaśniono na rysunku.



Mając gęstości mocy obliczamy moce:

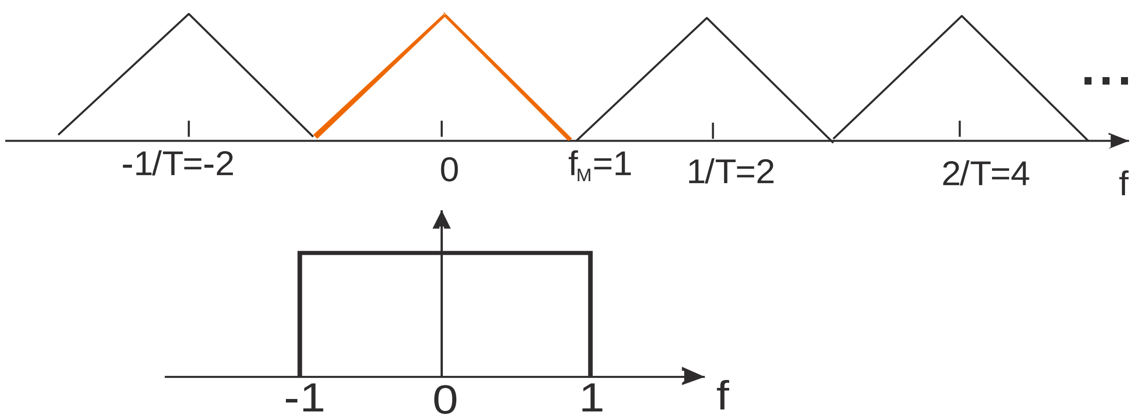
$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)df = 4W \qquad P_y = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f)df = 8W$$

7. Widmo sygnału x(t) pokazano na rysunku. Sygnał poddano próbkowaniu z częstotliwością $f_s = \frac{1}{T} = 2$. Narysuj widmo sygnału próbek. Czy można odtworzyć sygnał x(t) z próbek? A jeśli tak, to w jaki sposób?

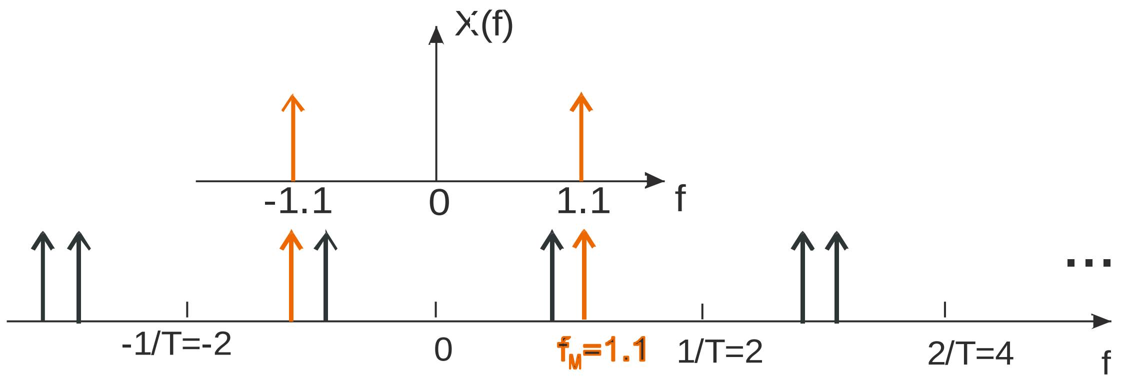


Rozwiązanie:

Widmo sygnału próbek zawiera kopie widmowe sygnału ciągłego, powtarzające się co f_s , co pokazano na rysunku poniżej. Kopie widmowe nie pokrywają się, więc jest możliwe odzyskanie sygnału bez zniekształceń. Wynika to zresztą z twierdzenia o próbkowaniu: pasmo sygnału wynosi 1 a częstotliwość próbkowania jest 2 razy większa. Do odtworzenia sygnału x(t) z próbek potrzebny jest filtr dolnopasmowy o częstotliwości granicznej równej 1, co również pokazano na rysunku.



8. Treść zadania jak poprzednio, z tym, że sygnał x(t) jest sygnałem harmonicznym o częstotliwości 1.1. Na rysunku pokazano widmo sygnału ciągłego i widmo sygnału próbek. Nieprzesuniętą kopie widmową, odpowiadającą sygnałowi ciągłemu x(t), oznaczono kolorem. Po zastosowaniu filtru dolnopasmowego o częstotliwości granicznej równej 1, na wyjściu pojawi się sygnał o częstotliwości 2-1.1=0.9. Oczywiście wszystkie te problemy wynikają z nieprzestrzegania twierdzenia o próbkowania: Częstotliwość próbkowania powinna w tym wypadku przekraczać wartość 2.2.



9. Oblicz odwrotną transformatę Zet, dane $X(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-0.6)}$

Rozkład na ułamki proste: $X(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-0.6)} = \frac{r_1 z}{(z-0.5)} + \frac{r_2 z}{(z-0.6)}$

Obliczamy współczynniki r_1, r_2:

$$r_1 = \lim_{z\to 0.5} X(z)\frac{z-0.5}{z} = \left.\frac{z}{z-0.6}\right|_{z=0.5} = -5$$
$$r_2 = \lim_{z\to 0.6} X(z)\frac{z-0.6}{z} = \left.\frac{z}{z-0.5}\right|_{z=0.6} = 6$$

Otrzymujemy

$$x_n = \sum_{i=1}^{2} r_i (z_i)^n 1_n = r_1 (z_1)^n 1_n + r_2 (z_2)^n 1_n = (-5\cdot 0.5^n + 6\cdot 0.6^n) 1_n$$

10. Filtr jest opisany równaniem różnicowym $y_n = x_n + \frac{1}{4} y_{n-1} + \frac{1}{8} y_{n-2}$

Czy jest to filtr o skończonej odpowiedzi impulsowej (FIR), czy o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (IIR)?
Oblicz transmitancję tego filtru H(z).
Czy ten filtr jest stabilny?

Rozwiązanie:
Już na podstawie równania różnicowego można stwierdzić, że jest to IIR, gdyż próbka bieżąca sygnały wyjściowego y_n zależy od poprzednich próbek sygnału wyjściowego.
Po przepisaniu równania różnicowego w postaci $y_n - \frac{1}{4} y_{n-1} - \frac{1}{8} y_{n-2} = x_n$ obliczamy transformatę Zet obu stron równania, korzystając z twierdzenia o przesunięciu: $Z[y_{n-i}] = z^{-i} Y(z)$. Otrzymujemy

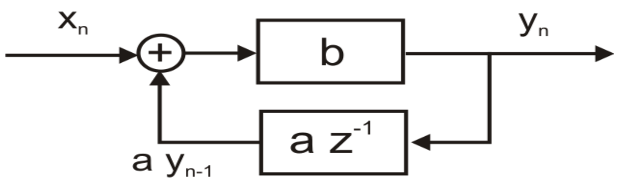
$$Y(z) - \frac{1}{4} z^{-1} Y(z) - \frac{1}{8} z^{-2} Y(z) = X(z)$$

$$Y(z)[1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}]=X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2-\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}}$$

Transmitancja jest funkcją wymierną, w mianowniku jest wielomian, co potwierdza fakt, że jest to IIR. Stabilność zależy od położenia biegunów, czyli zer wielomianu $z^2-\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}$. Wielomian ma 2 pierwiastki(zera), które są biegunami transmitancji H(z): $z_1=\frac{1}{2}z_2=-\frac{1}{4}$. Ich wartości bezwzględne są mniejsze niż 1, bieguny leżą wewnątrz koła o promieniu jednostkowym, a więc filtr jest stabilny.

11. Układ jest opisany schematem blokowym. Oblicz transmitancję tego układu. Jaki jest warunek jego stabilności?



Ze schematu można odczytać równanie różnicowe: $y_n=b(x_n+ay_{n-1})$.
Przepiszemy je w postaci $y_n-aby_{n-1}=bx_n$, a następnie obliczymy transformatę Zet obu stron równania:
$Y(z)-abz^{-1}Y(z)=bX(z)$. Po przekształceniu otrzymujemy transmitancję:

$$Y(z)[1-abz^{-1}]=bX(z) \quad \rightarrow \quad H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b}{1-abz^{-1}}=\frac{bz}{z-ab}$$

Transmitancja ma biegun w punkcie $z_1=ab$. Filtr będzie stabilny gdy $|ab|<1$.