

# Moduł 2

## TRANSMISJA ANALOGOWA I CYFROWA

PRZEMYSŁAW DYMARSKI

MODULACJA AMPLITUDY, MODULACJA CZĘSTOTLIWOŚCI, KODY TRANSMISYJNE, MODULACJE CYFROWE, PRZEPUSTOWOŚĆ KANAŁU

W MODULE 2 PRZEDSTAWIONO PODSTAWY TRANSMISJI SYGNAŁÓW ANALOGOWYCH I CYFROWYCH. POKRÓTCE OMÓWIONO MODULACJE AM I FM, BARDZIEJ SZCZEGÓŁOWO KODY TRANSMISYJNE I MODULACJE CYFROWE. PRZEDSTAWIONO ZAGADNIENIA ODBIORU OPTIMALNEGO SYGNAŁÓW CYFROWYCH. OMÓWIONO GRANICZNE PARAMETRY TRANSMISJI, WYNIKAJĄCE Z TWIERDZENIA SHANNONA O PRZEPUSTOWOŚCI KANAŁU. Z MODULEM 2 SĄ ZWIĄZANE DWA ĆWICZENIA LABORATORYJNE: KODY TRANSMISYJNE I MODULACJE CYFROWE, OPISANE W MODULE 4 .

## Spis treści

1	Analogowa modulacja amplitudy .....	2
1.1	Transmisja analogowa – kryteria jakości .....	2
1.2	Modulacje dwuwstęgowe i jednowstęgowe AM .....	3
1.2.1	Modulacja amplitudy – dwuwstęgowa z wytłumioną falą nośną (AM – DSB-SC double sideband suppressed carrier) .....	3
1.2.2	Modulacja amplitudy – dwuwstęgowa z falą nośną (AM – DSB double sideband) .....	5
1.2.3	Modulacja amplitudy – jednowstęgowa z wytłumioną falą nośną (AM – SSB-SC single sideband suppressed carrier) .....	7
1.3	Modulacja częstotliwości i modulacja fazy .....	8
1.3.1	Modulacja kąta i jej podstawowe parametry .....	8
1.3.2	Widmo i pasmo sygnału FM .....	10
1.3.3	Odbiór sygnału FM .....	14
2	Kody transmisyjne i modulacje cyfrowe .....	16
2.1	Jakość systemu transmisji cyfrowej .....	16
2.2	Kody transmisyjne .....	17
2.3	Modulacje cyfrowe .....	18
3	Odbiór optymalny sygnałów cyfrowych .....	21
3.1	Optymalna reguła decyzyjna w transmisji binarnej .....	21
3.2	Realizacje odbiornika optymalnego .....	23
3.3	Kod unipolarny i kod bipolarny .....	25
3.4	Odbiorniki modulacji wielowartościowej .....	28
3.5	Modulacja DPSK .....	31
4	Graniczne parametry transmisyjne .....	33
5	Zadania i testy .....	39
5.1	Przykładowe zadania z rozwiązaniami .....	39
5.2	Zadania do rozwiązania .....	45
6	Biblioteka .....	47
7	Bibliografia .....	47

# 1 Analogowa modulacja amplitudy

## 1.1 Transmisja analogowa – kryteria jakości

Aby przesać sygnał analogowy (mowa, muzyka) można wykorzystać analogowe lub cyfrowe łącza transmisyjne. To ostatnie wymaga przetworzenia sygnału analogowego na strumień binarny drogą próbkowania i kwantyzacji. Schemat analogowego i cyfrowego łącza transmisyjnego podano w Module 1, jednak zostanie on tu przypomniany dla wygody czytelnika. Modulator w systemie analogowym (Rys.1) służy do przeniesienia sygnału modulującego  $m(t)$  w odpowiednie pasmo częstotliwości, udostępniane przez kanał transmisyjny. W przypadku połączenia kablowego można zastosować transmisję w paśmie podstawowym bez modulatora, jednak i wówczas modulacja staje się niezbędna, jeśli udostępniamy kabel kilku użytkownikom. Sygnał zmodulowany  $s(t)$  zajmuje najczęściej szersze pasmo częstotliwości niż sygnał modulujący, wyjątkiem jest jednowstęgowa modulacja amplitudy. Kanał transmisyjny będziemy modelować jak filtr o paśmie  $B$ , przenoszący wszystkie składowe częstotliwościowe zawarte w sygnale  $s(t)$ . Ponadto uwzględnimy szum  $n(t)$  pochodzenia termicznego. Na wyjściu kanału otrzymamy sygnał  $v(t)$  o mocy  $S$  i szum o mocy  $N$ . Stosunek mocy sygnału do szumu:  $SNR = \frac{S}{N}$  charakteryzuje jakość odebranego sygnału, a co za tym idzie, jakość kanału transmisyjnego. Demodulator ma za zadanie wydzielenie z sygnału  $v(t)$  kopii sygnału modulującego  $s_0(t)$ . Ze względu na szum, udaje się to tylko częściowo: na wyjściu demodulatora otrzymuje się sygnał z szumem:

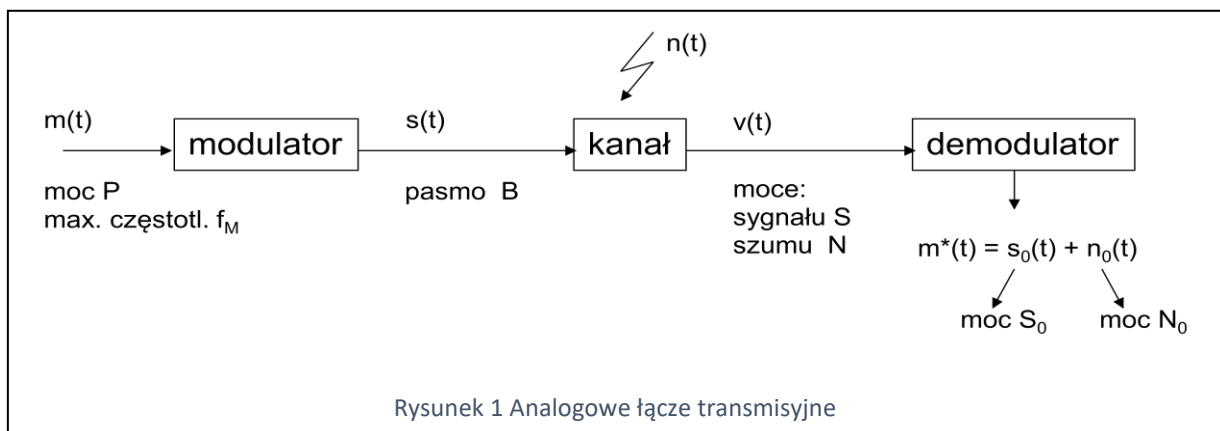
$$m^*(t) = s_0(t) + n_0(t) \quad (1)$$

Stosunek mocy sygnału użytecznego na wyjściu demodulatora ( $S_0$ ) do mocy szumu ( $N_0$ ) jest pewnym wskaźnikiem jakości otrzymanego sygnału:  $SNR_0 = \frac{S_0}{N_0}$ .

Aby ocenić odporność systemu transmisyjnego na szum w kanale, należy porównać  $SNR_0$  i  $SNR$ . Duży przyrost wartości  $SNR$  w demodulatorze świadczy o dużej odporności systemu na zakłócenia.

Innym parametrem charakteryzującym jakość systemu transmisyjnego jest wykorzystane pasmo  $B$ . Oczywiście pasmo zajęte przez sygnał zmodulowany ( $B$ ) jest proporcjonalne do pasma sygnału modulującego ( $f_M$ ).

Oszczędny system charakteryzuje się niewielkim współczynnikiem poszerzenia pasma  $\frac{B}{f_M}$ . Niestety oba kryteria jakości systemu (odporność na zakłócenia i wąskopasmowość) są sprzeczne. Dużą odpornością na zakłócenia charakteryzują się systemy szerokopasmowe.

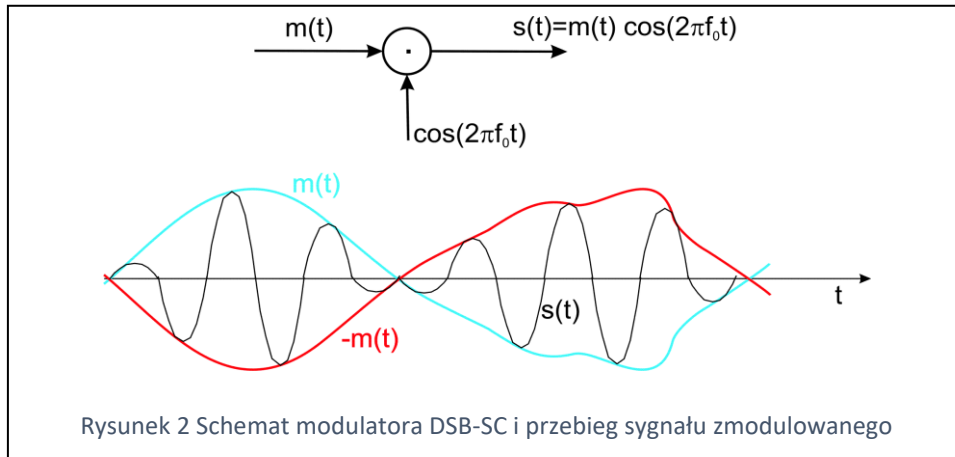


## 1.2 Modulacje dwuwstęgowe i jednowstęgowe AM

### 1.2.1 Modulacja amplitudy – dwuwstęgowa z wytłumioną falą nośną (AM – DSB-SC double sideband suppressed carrier)

Schemat modulatora AM DSB-SC zawiera układ mnożenia sygnału modulującego  $m(t)$  (może to być sygnał mowy lub muzyki) przez sygnał fali nośnej (wzór 2 i rys.2).

$$s(t) = m(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad (2)$$

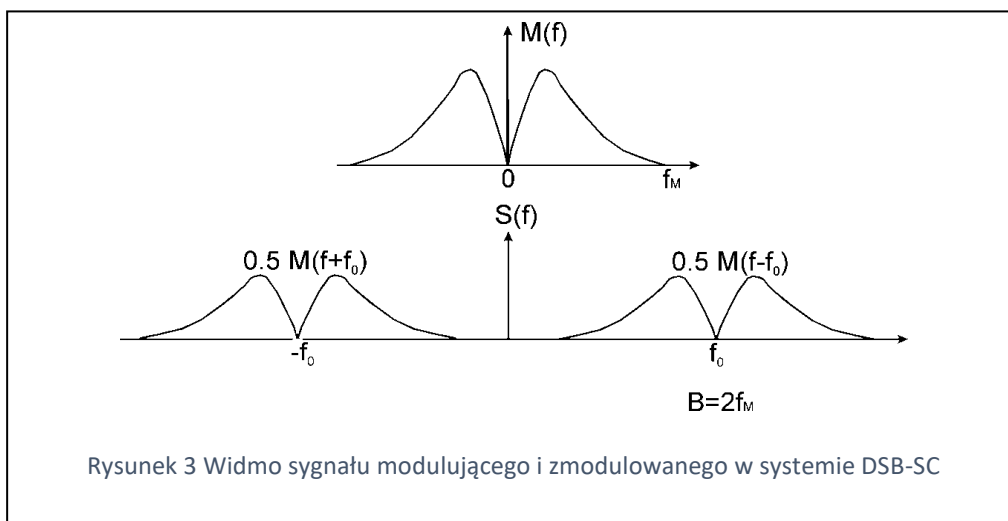


Na tym samym rysunku pokazano sygnał DSB-SC w dziedzinie czasu. Zmniejszono częstotliwość sygnału fali nośnej żeby pokazać zmianę fazy w momencie przejścia sygnału modulującego przez zero.

Założmy, że znamy widmo (transformatę Fouriera) sygnału modulującego:  $M(f) = F[m(t)]$ . Wówczas widmo sygnału zmodulowanego wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} S(f) &= F[m(t) \cos(2\pi f_0 t)] = F[m(t)] * F[\cos(2\pi f_0 t)] = \\ &= M(f) * \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = \frac{1}{2} M(f - f_0) + \frac{1}{2} M(f + f_0) \end{aligned} \quad (3)$$

Wyprowadzając wzór, wzięto pod uwagę, że transformata Fouriera iloczynu jest splotem widm, a splot z impulsem Diraca jest przesunięciem funkcji w miejsce położenia impulsu. Widma sygnałów na wejściu i wyjściu modulatora DSB-SC pokazano na Rys.3. W widmie sygnału zmodulowanego nie widać prążków widma fali nośnej, dlatego mówimy o wytłumionej fali nośnej.



Pasmo częstotliwości zajęte przez sygnał zmodulowany jest dwukrotnie szersze niż pasmo sygnału modulującego. Współczynnik poszerzenia pasma  $\frac{B}{f_M}$  ma wartość 2.

Energie sygnału modulującego i zmodulowanego wyrażają się wzorami (4) i (5):

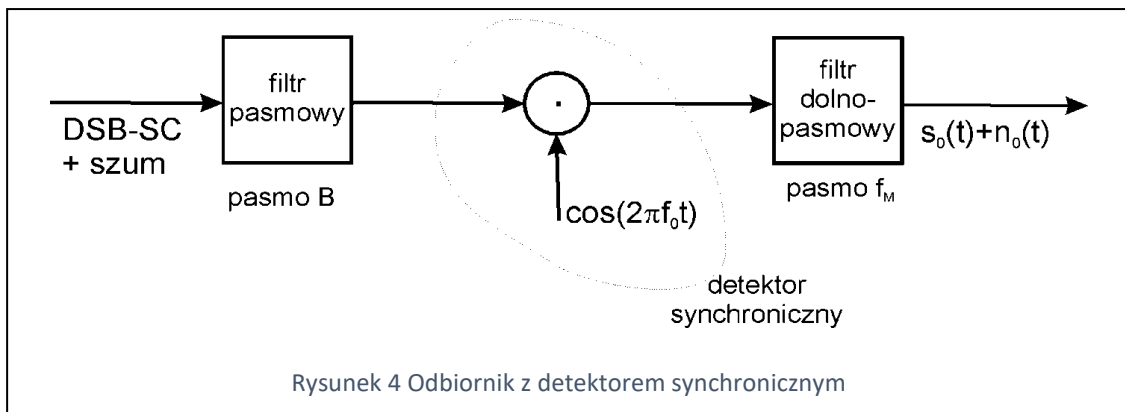
$$E_M = \int_{-f_M}^{f_M} |M(f)|^2 df \quad (4)$$

$$E_S = \int |S(f)|^2 df = \frac{1}{4}E_M + \frac{1}{4}E_M = \frac{1}{2}E_M \quad (5)$$

Wzór (5) jest słuszny gdy amplituda sygnału fali nośnej równa się 1. Ogólnie, energia podąża za kwadratem amplitudy i prawą stronę równania (5) należy pomnożyć przez kwadrat amplitudy sygnału fali nośnej. Pamiętajmy też o ogólnym założeniu, że obliczamy energie i moce, jakie wydzielają się w oporniku o oporności  $1 \Omega$ , gdy napięcie i prąd mają identyczną wartość. Projektując konkretne układy nadajników, musimy przeskalać wartości energii i mocy.

Wzór (5) można również zastosować do mocy sygnałów (uwzględniając powyższe założenia). Po modulacji moc sygnału maleje zatem do połowy:  $S = \frac{1}{2}P$ , gdzie P jest mocą sygnału modulującego.

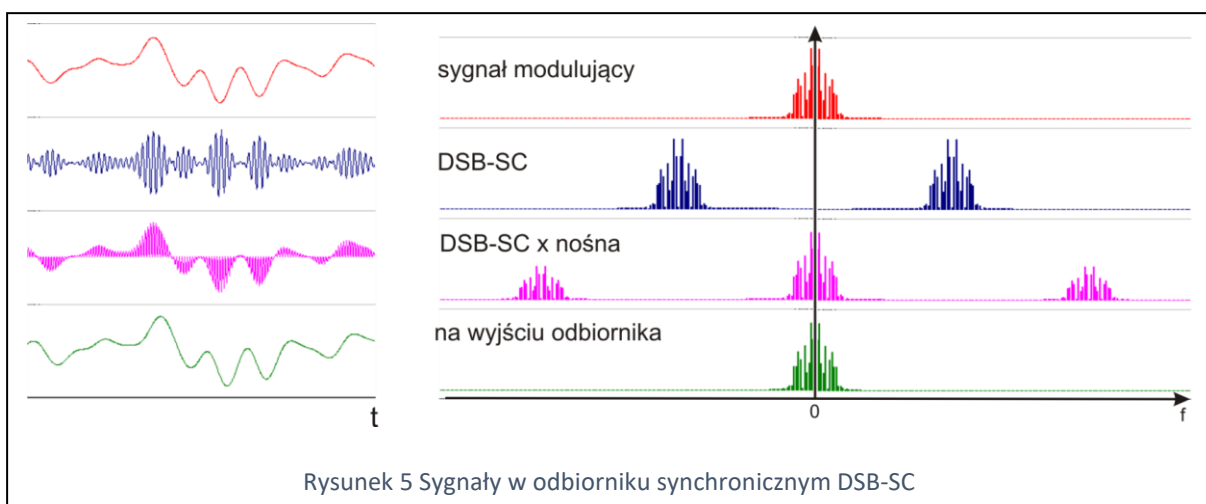
Na Rys.2 można zaobserwować, że tzw. obwiednia sygnału DSB-SC (można ją otrzymać za pomocą detektora szczytowego, rys.9) nie jest kopią sygnału modulującego  $m(t)$ , tylko jego wartości bezwzględnej. Taki detektor nie nadaje się do odbioru sygnału DSB-SC. Należy użyć innego układu, zwanego **detektorem synchronicznym** (Rys.4).



Sygnał użyteczny na wejściu odbiornika jest sygnałem DSB-SC:  $s(t) = m(t) \cos(2\pi f_0 t)$ . Ten sam sygnał pojawi się na wyjściu filtru pasmowego. Uwzględniając zależność  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\alpha)$ , otrzymamy sygnał na wyjściu detektora synchronicznego:  $m(t) \cos^2(2\pi f_0 t) = m(t) [\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t)]$ . Sygnał o wysokiej częstotliwości zostanie zatrzymany w filtrze dolnopasmowym, w związku z czym na wyjściu odbiornika otrzymamy sygnał użyteczny

$$s_0(t) = \frac{1}{2}m(t) \quad (6)$$

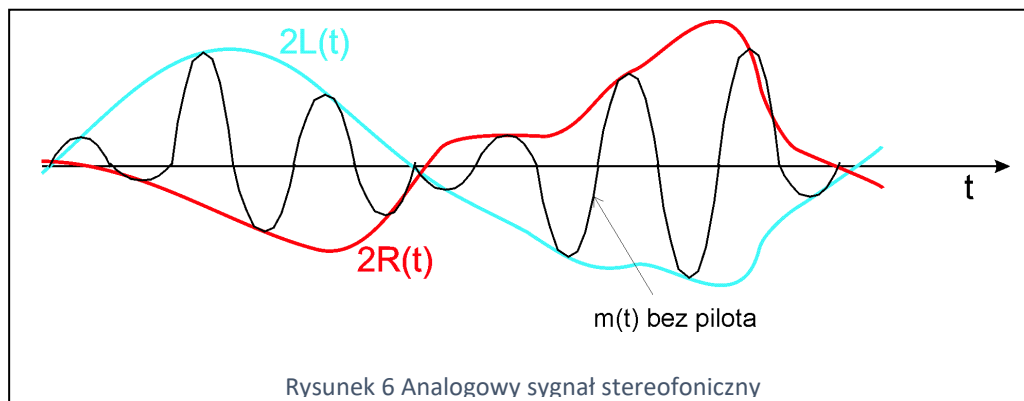
o mocy  $S_0 = \frac{1}{4}P$ . Dwukrotne zmniejszenie amplitudy oznacza czterokrotne zmniejszenie mocy. Na rys. 5 pokazano wyniki symulacji: przebiegi czasowe i widma sygnałów w odbiorniku z detektorem synchronicznym.



Z modulacją DSB-SC stykamy się niemal codziennie, gdy słuchamy analogowego radia FM. Sygnał stereofoniczny dociera do nas dzięki modulacji częstotliwości, ale modulację amplitudy DSB-SC wykorzystuje się do połączenia sygnałów kanału lewego  $L(t)$  i prawego  $R(t)$  w jeden sygnał stereofoniczny modulujący nadajnik FM. Analogowy sygnał stereofoniczny otrzymuje się w następujący sposób:

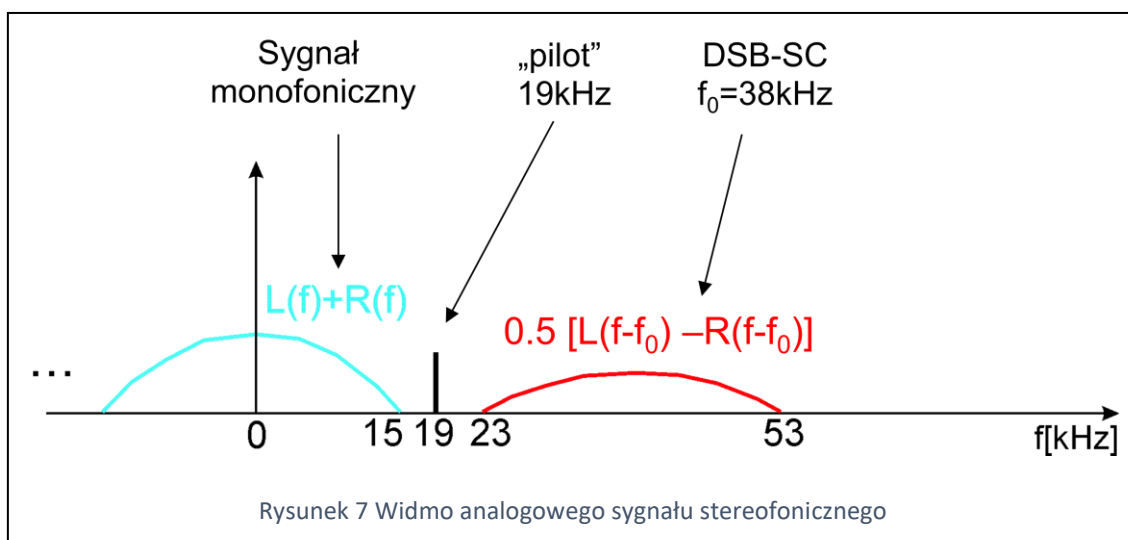
$$m(t) = [L(t) + R(t)] + [L(t) - R(t)] \cos(2\pi f_0 t) + a \cos(2\pi \frac{f_0}{2} t) \quad (7)$$

Sygnał  $L(t)+R(t)$  wstawia się w paśmie podstawowym, natomiast  $L(t)-R(t)$  moduluje w systemie DSB-SC się z wykorzystaniem fali nośnej o niewielkiej częstotliwości  $f_0=38$  kHz. Ponadto transmituje się sygnał harmoniczny o częstotliwości  $38:2=19$  kHz, zwany sygnałem pilota. Sygnał stereofoniczny (bez pilota) pokazano na Rys. 6.



Ze wzoru (7) wynika, że sygnały  $L(t)$  i  $R(t)$  można rozdzielić, dokonując próbkowania sygnału stereofonicznego w odpowiednich momentach. Potrzebne są dwa układy próbkujące, jeden pobiera próbkę gdy fala nośna osiąga szczytową wartość równą 1, a drugi, gdy osiąga ona wartość równą -1. Momenty próbkowania określa się na podstawie analizy sygnału pilota.

Widmo (kompleksowego) sygnału stereofonicznego pokazano na rys.7. Pasma częstotliwości zajęte przez sygnały  $L(t)$  i  $R(t)$  wynosi 15 kHz. Pasma kompleksowego sygnału stereofonicznego wynosi  $38+15=53$  kHz.

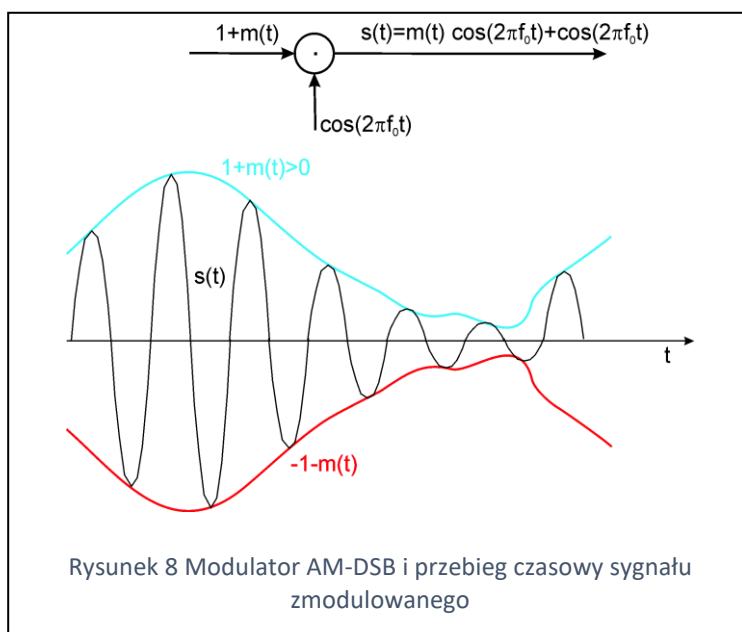


### 1.2.2 Modulacja amplitudy – dwuwstęgowa z falą nośną (AM – DSB double sideband)

Wzór na modulację dwuwstęgową AM można zapisać, dodając falę nośną do sygnału DSB-SC, choć oczywiście nie jest to sposób wykorzystywany w technice. Można też interpretować ten wzór jak wynik mnożenia sygnału  $m(t)$  z dodaną składową stałą (równą 1) przez falę nośną:

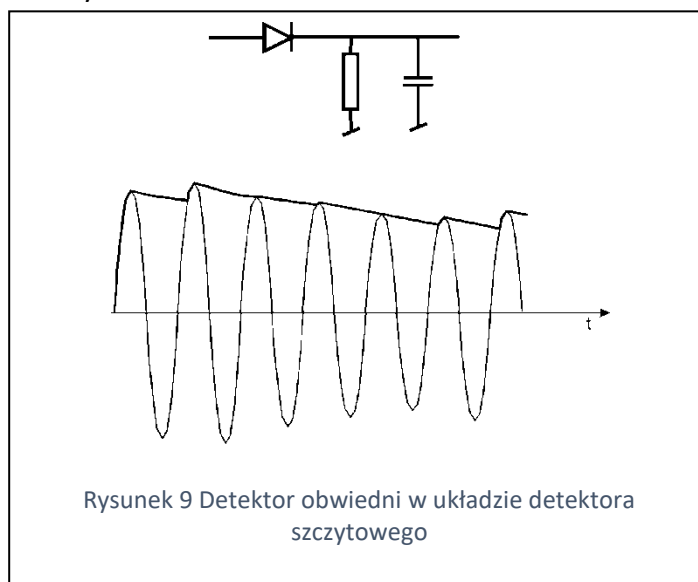
$$s(t) = m(t) \cos 2\pi f_0 t + \cos 2\pi f_0 t = [1 + m(t)] \cos 2\pi f_0 t \quad (8)$$

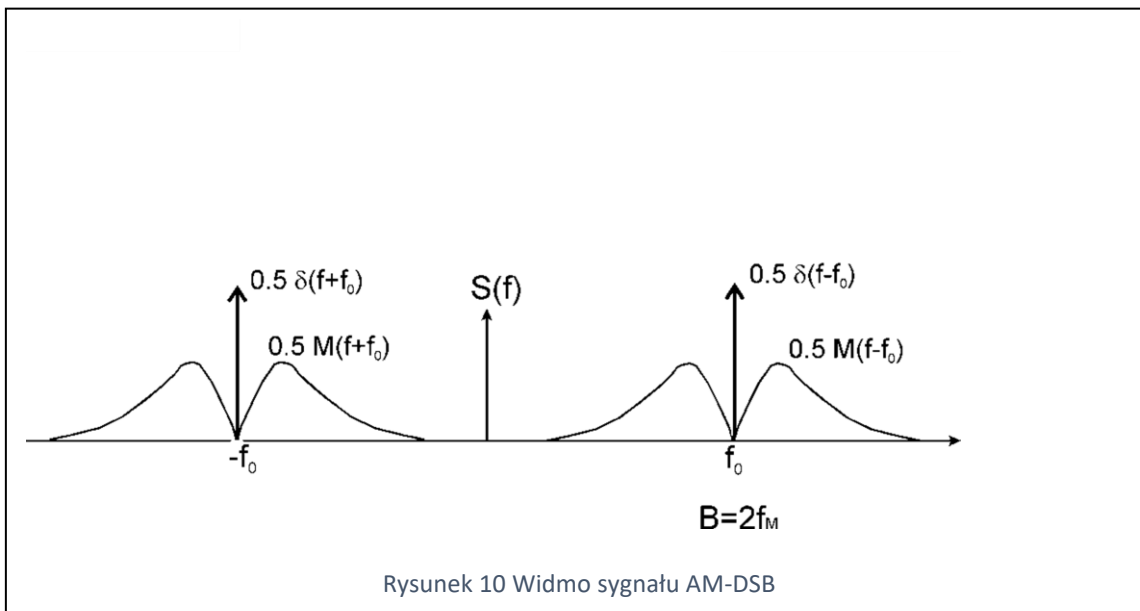
Na Rys.8 pokazano przebieg czasowy sygnału AM-DSB. Jeśli w każdej chwili  $t$  spełniony jest warunek  $[1 + m(t)] > 0$ , wówczas mówimy że brak jest przemodulowań i obwiednia sygnału AM-DSB jest kopią sygnału modulującego.



Wówczas jako demodulatora można użyć bardzo prostego układu detektora szczytowego z diodą i obwodem RC (Rys.9).

Widmo sygnału AM-DSB naszkicowano na Rys.10. Jest to widmo sygnału DSB-SC, do którego dodano prążki widma fali nośnej (porównaj z Rys.3. Transmisja fali nośnej wymaga dodatkowej mocy nadajnika. Ta dodatkowa moc nie niesie żadnej informacji – jest ona zawarta we wstęgach bocznych. Jej wielką zaletą jest wykorzystanie prostego detektora, niewymagającego generowania fali nośnej po stronie odbiorczej. Taki detektor nazywamy niekoherentnym.





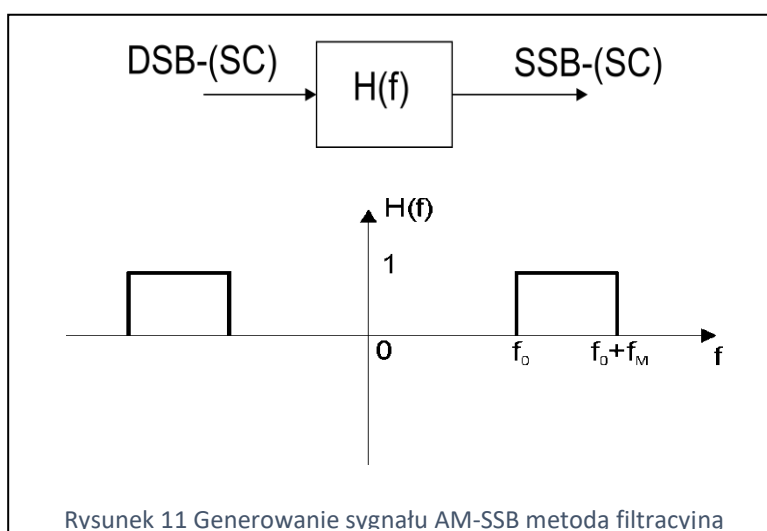
### 1.2.3 Modulacja amplitudy – jednowstęgowa z wytłumioną falą nośną (AM – SSB-SC single sideband suppressed carrier)

Informacja osygnale modulującym jest ukryta we wstęgach bocznych widma. Ze względu na symetrię, zawierają one tę samą informację. Sygnał zmodulowany może więc zawierać jedną wstęgę, drugą można wytłumić. Zmniejsza się w ten sposób pasmo kanału wykorzystywanego do transmisji (Rys.11). Współczynnik poszerzenia pasma  $\frac{B}{f_M}$  ma wartość 1.

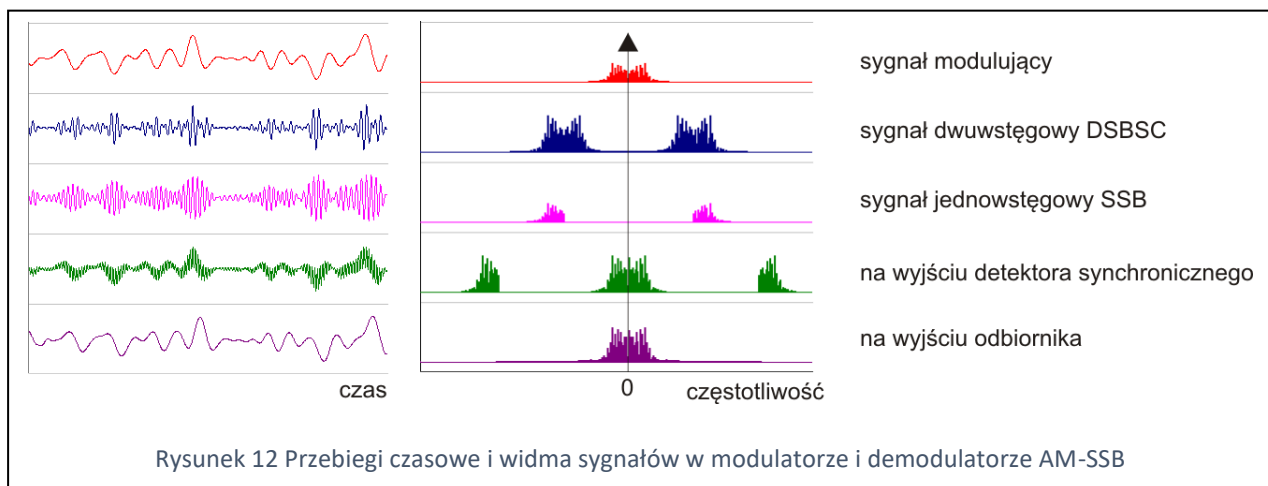
Gdy zachowana zostaje wstęga górna, mówimy o górnowstęgowej modulacji SSB (USSB – Upper Single Sideband). W przeciwnym przypadku mamy do czynienia z modulacją dolnowstęgową (LSSB – Lower Single Sideband).

Do odbioru sygnałów AM-SSB służy detektor synchroniczny (Rys.4). Na Rys.12 pokazano wyniki symulacji: przebiegi czasowe i widma sygnałów w różnych punktach nadajnika i odbiornika. Proszę zwrócić uwagę na fakt, że prawa część widma sygnału modulującego staje się górną wstęgą sygnału USSB, po czym w odbiorniku, na wyjściu detektora synchronicznego, niejako wraca na swoje miejsce. To samo można powiedzieć o lewej części widma, która jest lustrzanym odbiciem części prawej.

Ze względu na oszczędność pasma, modulacja SSB jest chętnie wykorzystywana przez amatorów – krótkofalowców.







Rysunek 12 Przebiegi czasowe i widma sygnałów w modulatorze i demodulatorze AM-SSB

Aby zbadać odporność modulacji AM-SSB na szum w kanale transmisyjnym, porównajmy stosunek mocy sygnału do szumu na wyjściu kanału i na wyjściu odbiornika. Załóżmy, że sygnał modulujący ma moc  $P$ , amplituda sygnału fali nośnej jest równa 1 a gęstość mocy szumu w kanale wynosi  $\eta$  W/Hz. Wówczas na wyjściu modulatora dwuwstęgowego (DSB-SC) otrzymujemy sygnał o mocy  $S_{DSB} = \frac{1}{2} P$  (p.1.2.1). Po stłumieniu jednej wstęgi moc zmniejsza się dwukrotnie:  $S = \frac{1}{4} P$ . Sygnał SSB o tej mocy pojawia się na wejściu odbiornika. Detektor synchroniczny to układ mnożący przez falę nośną, podobnie jak modulator dwuwstęgowy (Rys.3). Na jego wyjściu pojawiają się dwie przesunięte kopie widmowe sygnału wejściowego o amplitudzie zmniejszonej do połowy, a więc o mocy zmniejszonej 4 razy. Całkowita moc sygnału na wyjściu detektora synchronicznego wynosi  $\frac{1}{4}S + \frac{1}{4}S = \frac{1}{2}S$ . Połowa tej mocy znajduje się w zakresie wysokich częstotliwości i zostanie wytłumiona w dolnopasmowym filtrze (Rys.4). W paśmie podstawowym pozostanie połowa mocy:  $S_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}S = \frac{1}{4}S$ . Jest to moc sygnału użytecznego na wyjściu odbiornika.

Podobnie przeprowadzimy analizę mocy szumu. Pasma zajęte przez sygnał SSB wynosi  $f_M$ , a więc szum na wyjściu kanału ma moc:  $N = \eta f_M$ . W detektorze synchronicznym pojawią się dwie niepokrywające się kopie widmowe szumu, podobnie jak to było z sygnałem SSB (Rys.12). Na wyjściu detektora synchronicznego moc szumu zmniejszy się dwukrotnie:  $\frac{1}{4}N + \frac{1}{4}N = \frac{1}{2}N$ , z czego na pasmo podstawowe (niskich częstotliwości) przypada połowa:  $N_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}N = \frac{1}{4}N$ . Moc szumu na wyjściu odbiornika zmalała więc 4 razy w porównaniu z mocą szumu na jego wejściu. To samo stało się z mocą sygnału użytecznego: również zmalała czterokrotnie. Oznacza to, że stosunek mocy sygnału użytecznego do mocy szumu nie zmienił się po przejściu przez odbiornik:

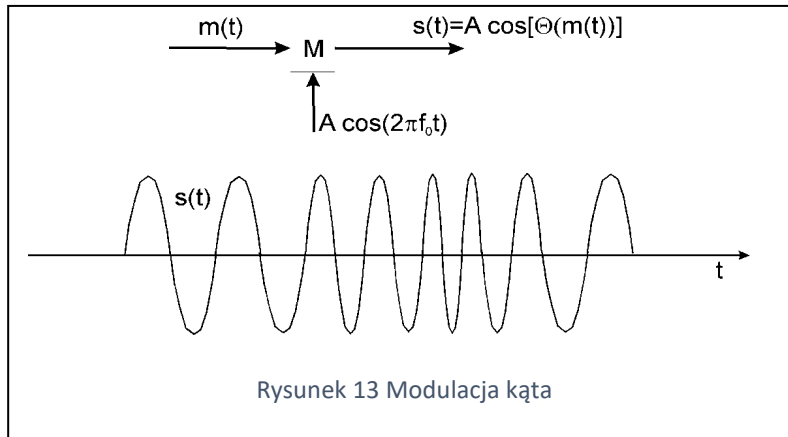
$$SNR_0 = \frac{S_0}{N_0} = \frac{S}{N} = SNR \quad (9)$$

Nie jest to wysoka odporność na szum w kanale (są modulacje oferujące znaczne powiększenie SNR w odbiorniku, jednak wymagają one szerokiego pasma). Przy współczynniku poszerzenia pasma równym 1 nie jest możliwe uzyskanie większej odporności na zakłócenia, tzn.  $SNR_0 \leq SNR$ . Uzyskana równość (wzór 9) jest największą wartością  $SNR_0$ , jaką można uzyskać. Wynika to z twierdzenia Shannona o przepustowości kanału  $x$

### 1.3 Modulacja częstotliwości i modulacja fazy

#### 1.3.1 Modulacja kąta i jej podstawowe parametry

Modulacja częstotliwości (FM – Frequency Modulation) i modulacja fazy (PM = Phase Modulation) należą do tzw. modulacji kąta. Kopia sygnału modulującego jest transmitowana w fazie lub w częstotliwości sygnału zmodulowanego, natomiast nie jest możliwe jej odzyskanie z amplitudy tego sygnału. Na rys.13 pokazano modulator kątowy i naszkicowano możliwy sygnał wyjściowy modulatora. Rysunek ma charakter poglądowy.



Rysunek 13 Modulacja kąta

Sygnal modulujący  $m(t)$  może wpływać na **fazę chwilową**  $\Theta(t)$  bezpośrednio lub przez całkę. W tym pierwszym przypadku mówimy o modulacji fazy

$$\Theta(t) = 2\pi f_0 t + D_p m(t) \quad (10)$$

W tym drugim przypadku mamy do czynienia z modulacją częstotliwości:

$$\Theta(t) = 2\pi f_0 t + D_f \int_{t_0}^t m(\lambda) d\lambda \quad (11)$$

Współczynniki  $D_p$  i  $D_f$  możemy traktować jako wzmocnienie toru akustycznego w nadajniku, można też je wykorzystać jako amplitudę sygnału modulującego (wówczas przyjmujemy, że  $m(t)$  ma największą wartość równą 1).

**Częstotliwość chwilowa** sygnału to szybkość zmian fazy tego sygnału

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \Theta(t) \quad (12)$$

We wzorze dzielimy pochodną fazy przez  $2\pi$ , aby uzyskać częstotliwość w Hz, w przeciwnym wypadku mielibyśmy prędkość kątową w radianach na sekundę. Różniczkując wzory (10) i (11), otrzymujemy wzory na częstotliwość chwilową sygnału PM i FM.

$$PM: \quad f(t) = f_0 + \frac{D_p}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} m(t) \quad (13)$$

$$FM: \quad f(t) = f_0 + \frac{D_f}{2\pi} m(t) \quad (14)$$

Sygnal modulujący wpływa więc bezpośrednio na częstotliwość chwilową w modulacji FM.

Dla harmonicznego sygnału modulującego określa się parametry sygnału zmodulowanego, takie jak indeks modulacji i dewiacja częstotliwości. Weźmy sygnał harmoniczny o amplitudzie równej 1 i częstotliwości  $f_m$ :  $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$ . Jeśli chcemy zmienić amplitudę tego sygnału, to możemy wykorzystać współczynniki wzmocnienia  $D_p$  i  $D_f$ . Po podstawieniu do wzoru (10), otrzymujemy fazę chwilową sygnału PM:

$$\Theta(t) = 2\pi f_0 t + D_p \cos(2\pi f_m t) \quad (15)$$

Największa wartość odchyłki fazy chwilowej sygnału zmodulowanego od fazy fali nośnej nosi nazwę **indeksu modulacji** i jest oznaczana przez  $\beta$ . W modulacji fazy, indeks modulacji wynosi  $\beta = D_p$ , czyli zależy od amplitudy sygnału modulującego. Podstawiając  $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$  do (13), otrzymujemy wzór na częstotliwość chwilową sygnału PM:

$$f(t) = f_0 + \frac{D_p}{2\pi} 2\pi f_m (-\sin(2\pi f_m t)) = f_0 - D_p f_m \sin(2\pi f_m t) \quad (16)$$

Największa wartość odchyłki częstotliwości chwilowej sygnału zmodulowanego od częstotliwości fali nośnej nosi nazwę **dewiacji częstotliwości**. Dewiacja częstotliwości określa w pierwszym przybliżeniu pasmo częstotliwości zajęte przez sygnał zmodulowany. Dla modulacji PM wynosi ona  $\Delta F = D_p f_m$  i zależy zarówno od amplitudy jak i częstotliwości sygnału modulującego. Ponadto słuszna jest zależność:

$$\beta = \frac{\Delta F}{f_m} \quad (17)$$

Obliczmy teraz indeks modulacji i dewiację częstotliwości dla modulacji FM. Faza chwilowa wyraża się wzorem (11), co po podstawieniu sygnału harmonicznego wynosi

$$\Theta(t) = 2\pi f_0 t + D_f \int_0^t \cos(2\pi f_m \lambda) d\lambda = 2\pi f_0 t + \frac{D_f}{2\pi f_m} \sin(2\pi f_m t) \quad (18)$$

Największa odchyłka fazy, czyli indeks modulacji wynosi więc  $\beta = \frac{D_f}{2\pi f_m}$ . Z kolei dewiację częstotliwości otrzymujemy ze wzoru (14), co po podstawieniu sygnału harmonicznego wynosi

$$f(t) = f_0 + \frac{D_f}{2\pi} \cos(2\pi f_m t) \quad (19)$$

Dewiacja częstotliwości zależy od amplitudy sygnału modulującego nie zależy od częstotliwości:  $\Delta F = \frac{D_f}{2\pi}$ . Nie oznacza to, że częstotliwość sygnału modulującego nie wpływa w ogóle na pasmo częstotliwości sygnału FM. Wpływ ten istnieje, ale jest znacznie mniejszy niż w przypadku modulacji PM. M.in. z tego względu analogowa modulacja częstotliwości jest bardziej popularna niż analogowa modulacja fazy. W radiofonii komercyjnej na falach ultrakrótkich (częstotliwości rzędu 100 MHz) wykorzystuje się modulację FM. Z tego względu w dalszej części podręcznika zajmiemy się modulacją FM.

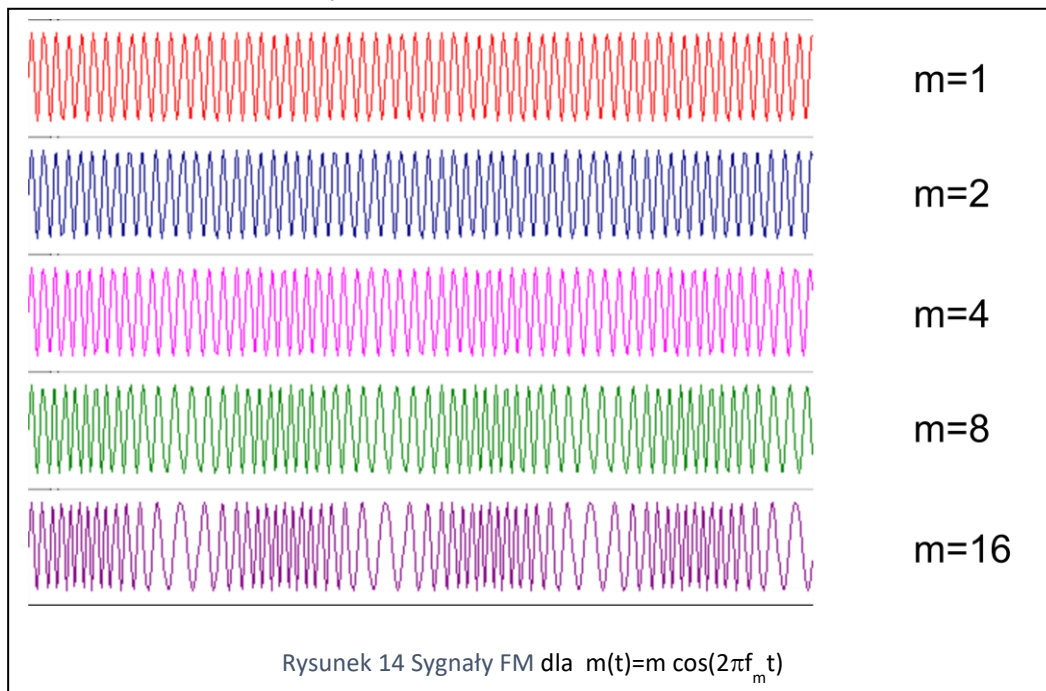
Zauważmy, że dla modulacji FM również spełniona jest zależność (17):  $\beta = \frac{\Delta F}{f_m}$ .

### 1.3.2 Widmo i pasmo sygnału FM

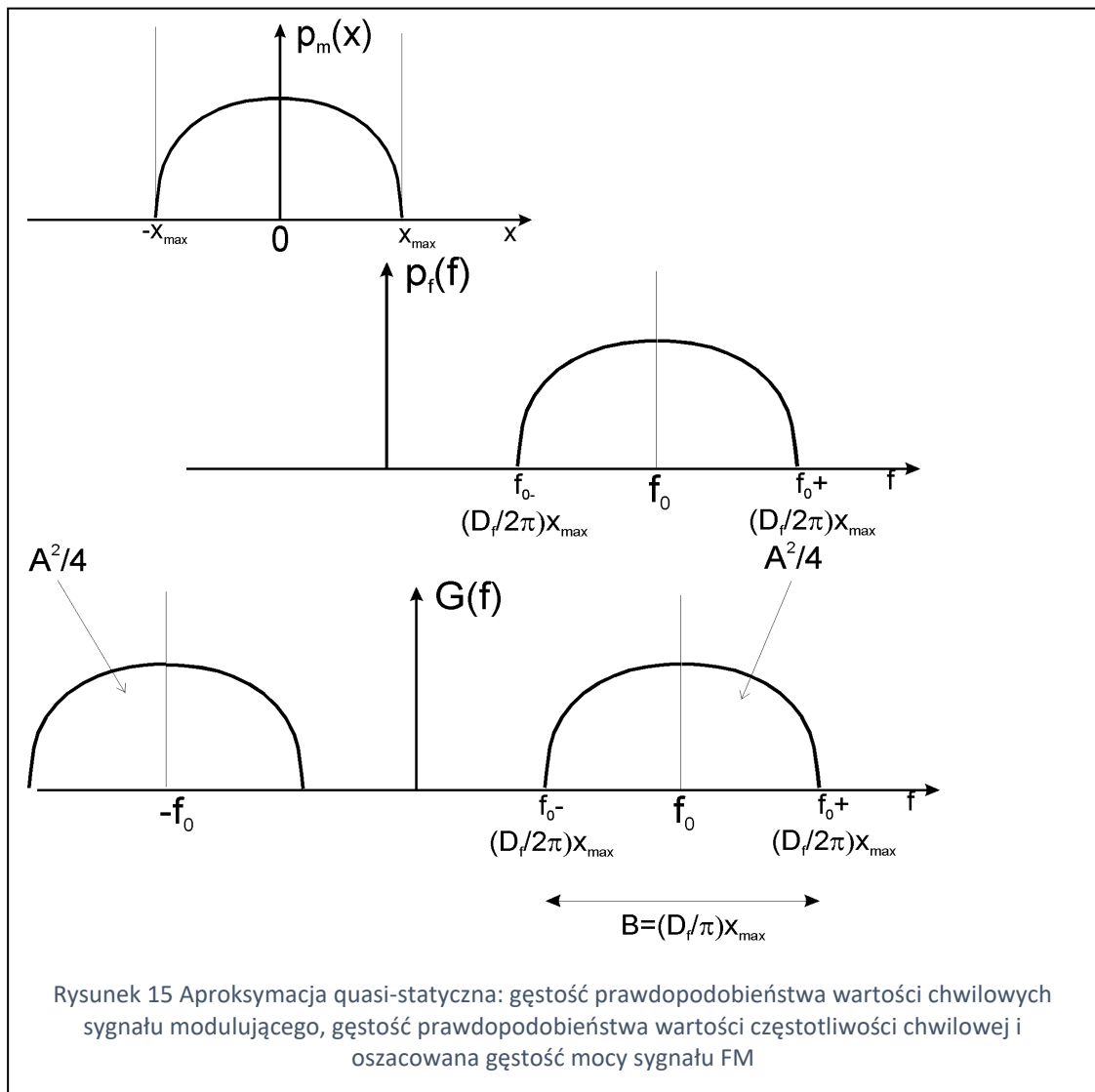
Faza sygnału FM jest opisana wzorem (11), a jego przebieg czasowy wynosi

$$s(t) = A \cos[2\pi f_0 t + D_f \int_{t_0}^t m(\lambda) d\lambda] \quad (20)$$

Gdy odchyłka fazy chwilowej  $D_f \int_{t_0}^t m(\lambda) d\lambda$  jest duża, np. przekracza 1 radian, mówimy o szerokopasmowej modulacji częstotliwości: (wideband frequency modulation – WBFM). Na rys.14 pokazano wyniki symulacji nadajnika FM. Sygnał modulujący jest sygnałem harmonicznym o amplitudzie m:  $m(t) = m \cos(2\pi f_m t)$ . Można zaobserwować powiększanie się odchyłki częstotliwości chwilowej wraz ze wzrostem amplitudy sygnału, zgodnie ze wzorem (14):  $f(t) = f_0 + \frac{D_f}{2\pi} m(t)$



W ogólnym przypadku obliczenie widma lub gęstości mocy sygnału WBFM nie jest sprawą prostą. Przybliżonego oszacowania gęstości mocy, a co za tym idzie, pasma sygnału FM można dokonać metodą **aproksymacji quasi-statycznej**. Przyjmuje się wówczas, że sygnał modulujący  $m(t)$  jest wolnozmiennym sygnałem przypadkowym o znanej gęstości prawdopodobieństwa wartości chwilowych (próbek)  $p_m(x)$ .



Zgodnie ze wzorem (14) wartości chwilowej sygnału modulującego równej  $x$ , odpowiada częstotliwość chwilowa sygnału FM, równa  $f = f_0 + \frac{D_f}{2\pi}x$ . Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej  $f$  pokazano na rys.15. Następnie przyjmujemy, że moc sygnału FM podąża za częstotliwością chwilową. Jest to przybliżenie, jednak tym dokładniejsze, im wolniej zmienia się częstotliwość chwilowa  $f$  (stąd nazwa aproxymacja quasi-statyczna). Przy tym założeniu gęstość mocy sygnału FM jest kopią gęstości prawdopodobieństwa częstotliwości chwilowej. Na rys.15 narysowano dwustronną gęstość mocy.

Znając krańcowe wartości częstotliwości chwilowej, można oszacować pasmo sygnału FM. Wynosi ono

$$B = \frac{D_f}{\pi} x_{max} = 2 \Delta F \quad (21)$$

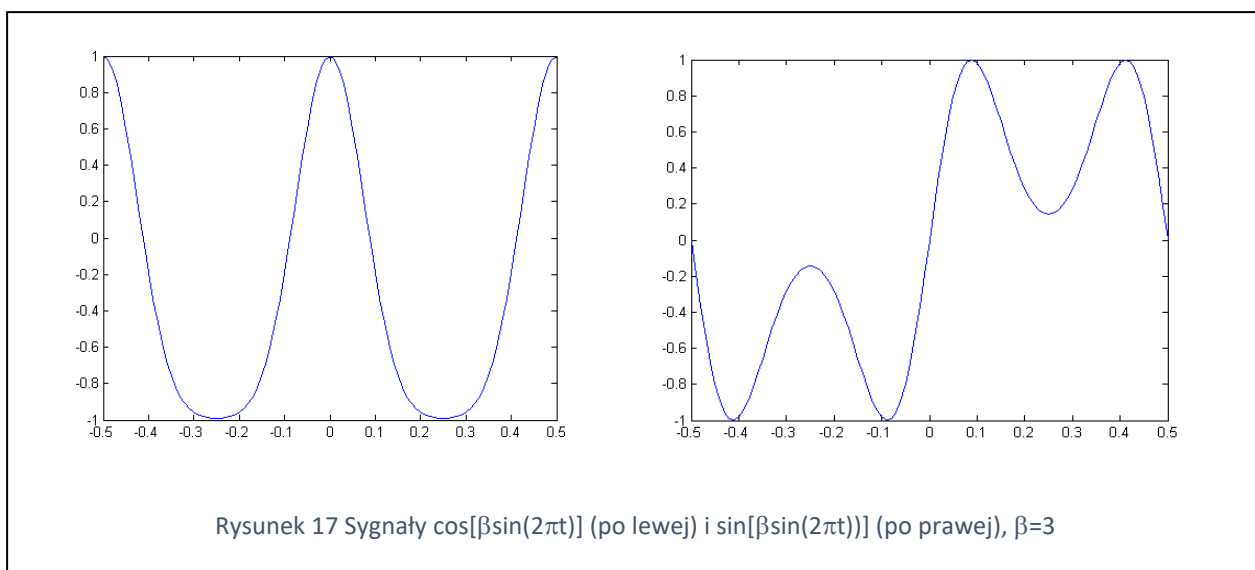
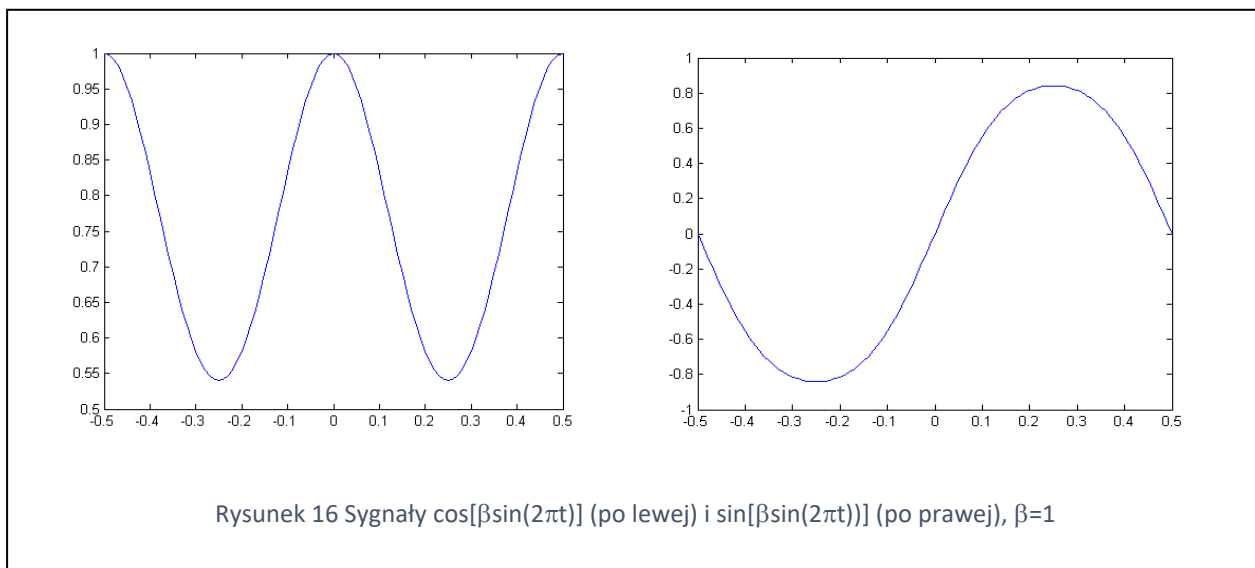
Gdzie  $x_{max}$  jest amplitudą sygnału modulującego, a  $\Delta F = \frac{D_f}{2\pi} x_{max}$  jest dewiacją częstotliwości, czyli największą jej odchyłką od częstotliwości fali nośnej.

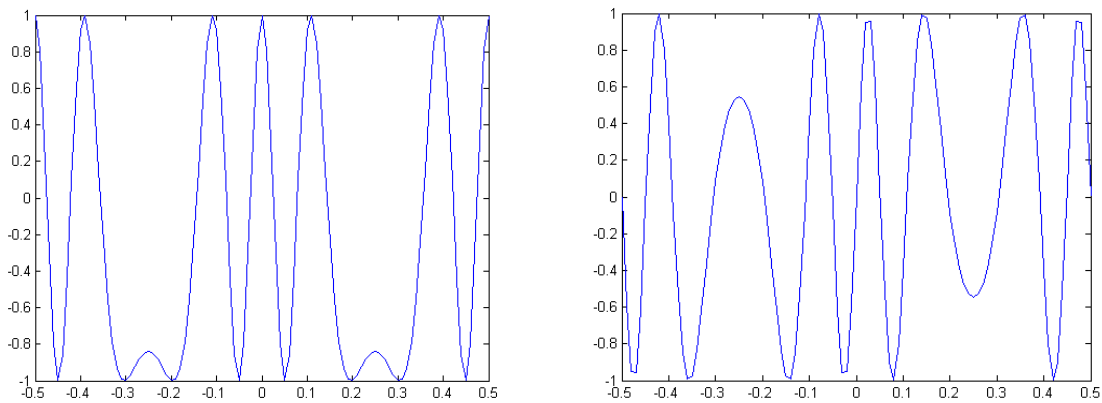
Dokładne obliczenie widma sygnału FM jest możliwe dla harmonicznego sygnału modulującego:  $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$ . Wówczas przebieg czasowy sygnału FM o amplitudzie fali nośnej  $A=1$ , wynosi:

$$\begin{aligned} s(t) &= \cos\left[2\pi f_0 t + D_f \int_0^t \cos(2\pi f_m \lambda) d\lambda\right] = \\ &= \cos\left[2\pi f_0 t + \frac{D_f}{2\pi f_m} \sin(2\pi f_m t)\right] = \cos\left[2\pi f_0 t + \beta \sin(2\pi f_m t)\right] = \\ &= \cos[2\pi f_0 t] \cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] - \sin[2\pi f_0 t] \sin[\beta \sin(2\pi f_m t)] \end{aligned} \quad (22)$$

Wzór (22) przedstawia w istocie dwie modulacje AM – dwuwstęgowe z wytłumioną nośną. Sygnałami modulującymi są  $\cos(\beta \sin(2\pi f_m t))$  i  $\sin(\beta \sin(2\pi f_m t))$ . Są to funkcje okresowe, ich okres wynosi  $1/f_m$ . Na rys.16-18 pokazano przebiegi tych sygnałów w obrębie jednego okresu dla wybranych wartości indeksu modulacji  $\beta$ .

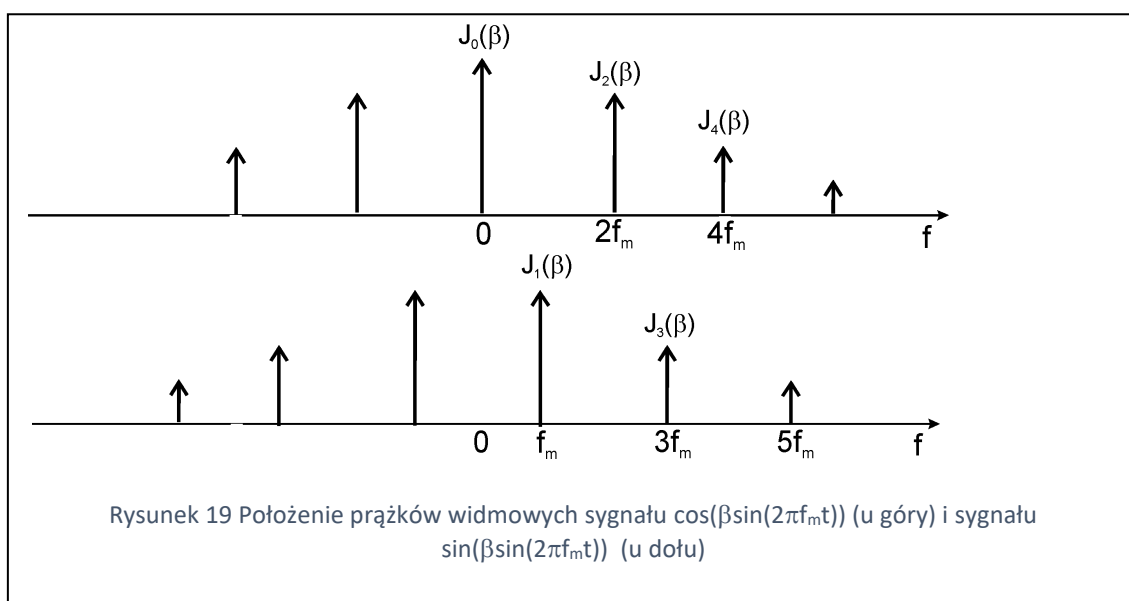
Gdy indeks modulacji  $\beta$  wynosi 1 zauważa się drugą harmoniczną sygnału  $\cos(\beta\sin(2\pi f_m t))$  i pierwszą harmoniczną sygnału  $\sin(\beta\sin(2\pi f_m t))$  – rys.16. Przy  $\beta=3$  widać wyraźnie wpływ czwartej harmonicznego sygnału  $\cos(\beta\sin(2\pi f_m t))$  i trzeciej harmonicznego sygnału  $\sin(\beta\sin(2\pi f_m t))$  – rys.17. Przy  $b=10$  oba sygnały mają liczne składowe -odpowiednio parzyste i nieparzyste harmoniczne – rys.18.



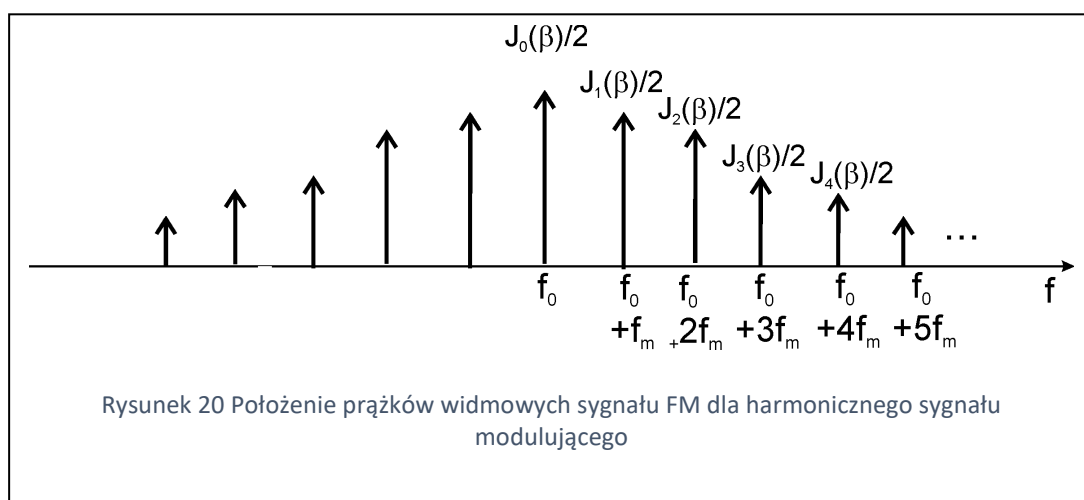


Rysunek 18 Sygnały  $\cos[\beta \sin(2\pi t)]$  (po lewej) i  $\sin[\beta \sin(2\pi t)]$  (po prawej),  $\beta=10$

Amplitudy składowych harmoniczných omawianých sygnałów opisane są funkcjami Bessela, których argumentem jest indeks modulacji  $\beta$ . Położenie prążków widma obu sygnałów pokazano na rys.19, a na rys.20 – położenie prążków widma sygnału FM, dla harmonicznego sygnału modulującego o częstotliwości  $f_m$ . Modulacja amplitudy opisana wzorem (22) przesuwa widmo sygnału modulującego w prawo i w lewo o częstotliwość sygnału modulującego. Jeśli amplituda fali mośnej wynosi 1, wówczas amplituda składowych widmowych zmniejsza się dwukrotnie (Rys.3). Na rys.20 pokazano prawostronną część widma, nie opisano również fazy składowych harmoniczných.

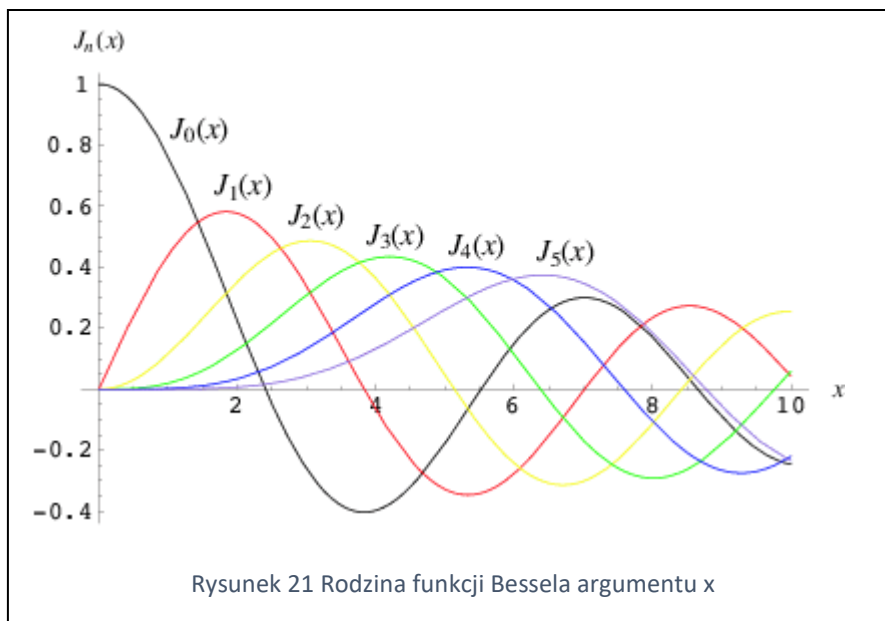


Rysunek 19 Położenie prążków widmowych sygnału  $\cos(\beta \sin(2\pi f_m t))$  (u góry) i sygnału  $\sin(\beta \sin(2\pi f_m t))$  (u dołu)



Rysunek 20 Położenie prążków widmowych sygnału FM dla harmonicznego sygnału modulującego

Z wykresów funkcji Bessela (rys.21) wynika, że dla małych wartości indeksu modulacji  $x=\beta$ , tylko nieliczne z nich osiągną wartości inatyl różnie od zera, żeby można było mówić o ich wpływie na widmo pasmo sygnału. I tak, dla wartości  $\beta$  bliskich zeru, widmo składa się z falinośnej (amplituda  $J_0$ ) i dwóch prążków bocznych (amplituda  $J_1$ ). Jest to tzw. wąskopasmowa modulacja częstotliwości.



Zwiększenie indeksu modulacji o 1 powoduje "oderwanie się" kolejnej funkcji Bessela od wartości bliskich zeru i pojawienie się dwóch prążków w widmie sygnału FM, co skutkuje poszerzeniem pasma o podwojoną częstotliwość sygnału modulującego. Ta obserwacja stoi u podstaw tzw. **prawa Carsona**. Prawo Carsona określa szerokość pasma, w którym zawarte jest 98% mocy sygnału FM:

$$B = 2(\beta + 1)f_m = 2\left(\frac{\Delta F}{f_m} + 1\right)f_m = 2(\Delta F + f_m) \quad (23)$$

W komercyjnej radiofonii FM obowiązuje norma ustalająca wartość dewiacji częstotliwości równą  $\Delta F=75\text{kHz}$ . Pasma sygnału modulującego wynosi  $f_M=53\text{ kHz}$  (jest nim sygnał stereofoniczny, rys.7). Obliczamy stąd pasmo  $B=256\text{ kHz}$  dla transmisji stereofonicznej w pasmie UKF

Jeżeli częstotliwość sygnału modulującego jest niewielka, wówczas pasmo jest równe podwojonej dewiacji częstotliwości, co już otrzymaliśmy metodą aproksymacji quasi-stacjonarnej (wzór 21).

### 1.3.3 Odbiór sygnału FM

Odbiornikiem sygnału FM może być każdy **dyskryminator częstotliwości**, tj. układ przetwarzający częstotliwość na sygnał napięciowy lub prądowy. Jest bardzo wiele takich układów, np. zliczanie przejść przez zero w jednostce czasu. Odbiornik z dyskryminatorem częstotliwości pokazano na rys.22. Oprócz dyskryminatora zawiera on filtr pasmowy na wejściu i dolnopasmowy na wyjściu. Ma to na celu ograniczenie mocy szumu na wyjściu odbiornika.



Częstotliwość chwilowa sygnału FM jest opisana wzorem (14):  $f(t) = f_0 + \frac{D_f}{2\pi} m(t)$ , jednak dyskryminator jest tak skalibrowany, że nie odtwarza stałego sygnału odpowiadającego częstotliwości fali nośnej, tylko sygnał proporcjonalny do  $m(t)$ .

Modulacja częstotliwości jest bardziej odporna na szumy w kanale, niż modulacja amplitudy czy fazy. Szum w kanale w podobny sposób „atakuję” amplitudę i fazę fali nośnej przenikając, jako szum o płaskiej gęstości mocy, na wyjście odbiornika. W modulacji częstotliwości szum też przenika na wyjście odbiornika, jednak jego gęstość mocy nie jest stała, tylko narasta w funkcji częstotliwości. Ma ona kształt paraboli przechodzącej przez punkt (0,0). Oczywiście pasmo szumu jest ograniczone filtrem wyjściowym, przepuszczającym sygnał tylko w paśmie sygnału modulującego (od 0 do częstotliwości  $f_M$ ). W zakresie niskich częstotliwości gęstość mocy szumu na wyjściu odbiornika FM jest mniejsza niż na wyjściu odbiornika PM czy AM. Mniejsza jest też całkowita moc szumu na wyjściu.

Dla wyjaśnienia tego problemu porównajmy wzory (10) i (11). Wynika z nich, że modulator fazy, jeśli podać na jego wejście scałkowany sygnał modulujący, działa jak modulator częstotliwości. Jeśli do demodulacji zastosujemy dyskryminator fazy, to na jego wyjściu otrzymamy scałkowany sygnał mowy czy muzyki, trzeba więc go będzie zróżniczkować. Wraz z nim przez układ różniczkujący przejdzie szum z dyskryminatora fazy. Układ różniczkujący jest filtrem górnopasmowym, którego charakterystyka częstotliwościowa rośnie w funkcji częstotliwości. W ten sposób na wyjściu odbiornika FM pojawia się szum gęstości mocy rosnącej w funkcji częstotliwości.

Dla sygnału modulującego  $m(t)=\cos(2\pi f_m t)$  można otrzymać następującą zależność, charakteryzującą odporność na szumy w kanale:

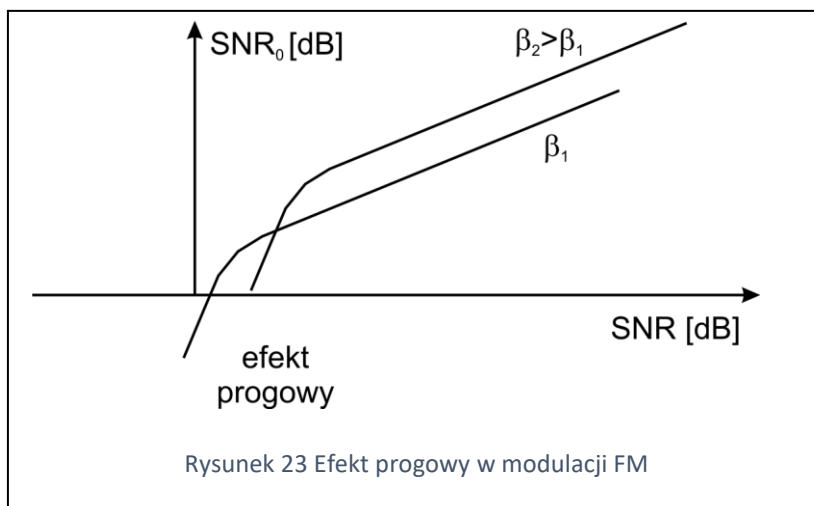
$$SNR_0 = \frac{3}{2} \frac{D_f^2}{4\pi^2 f_M^2} SNR = \frac{3}{2} \beta^2 SNR \quad (24)$$

Można ten wzór przepisać, wyrażając wartości SNR w decybelach:

$$SNR_0[dB] = 10 \log_{10} \frac{3}{2} + 20 \log_{10} \beta + SNR[dB] \quad (25)$$

Jakość sygnału na wyjściu demodulatora, wyrażona przez  $SNR_0$ , zależy od indeksu modulacji  $\beta$ . Jeśli porównamy ten wzór z zależnością  $SNR_0 = SNR$ , charakteryzującą modulację AM-SSB, widzimy znaczną przewagę modulacji FM.  $SNR_0$  może znacznie przewyższać stosunek mocy sygnału do szumu na wyjściu kanału (SNR). Płacimy jednak za to poszerzeniem pasma, gdyż pasmo zależy od indeksu modulacji  $\beta$ : wzór (23).

Wzory (24) i (25) są słuszne dla niezbyt zaszumionych kanałów. Przy bardzo dużym szumie, częstotliwość chwilowa sumy sygnału i szumu nie podąża za częstotliwością chwilową sygnału i na wyjściu odbiornika pojawia się silny szum impulsowy, uniemożliwiający odbiór. Ten tzw. efekt progowy pokazano na rys.23.



Rysunek 23 Efekt progowy w modulacji FM

Porównanie modulacji AM i FM można w skrócie podsumować następująco:



AM:

wąskie pasmo (zwłaszcza modulacja jednowstęgowa SSB)

mała odporność na szумы w kanale

FM:

szersze pasmo sygnału zmodulowanego

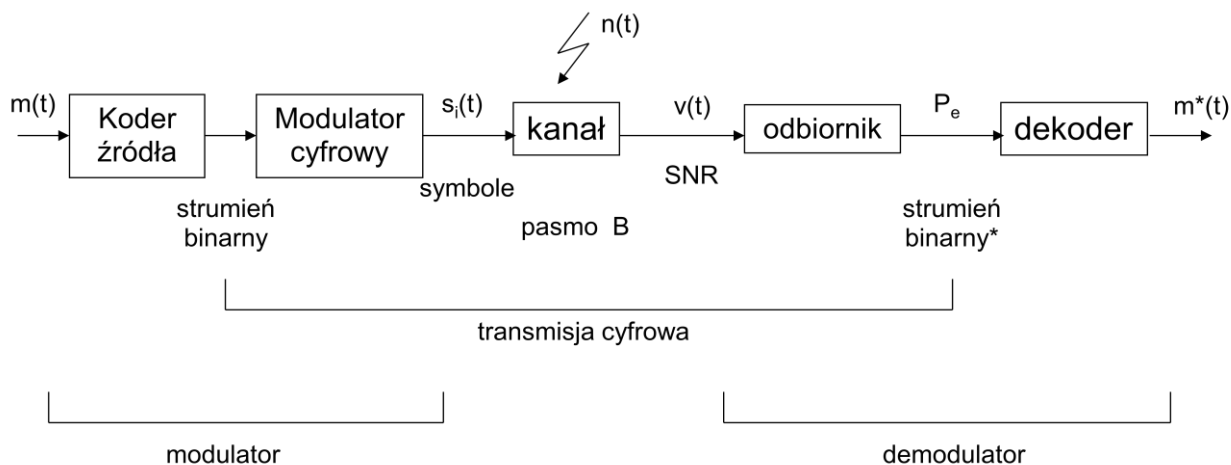
większa odporność na szумы w kanale

## 2 Kody transmisyjne imodulacjocyfrowe

### 2.1 Jakość systemu transmisji cyfrowej

Schemat blokowy cyfrowego łącza transmisyjnego był pokazany w Module 1, tym niemniej został tu powtórzony (Rys.24).

W procesie próbkowania, kwantyzacji i kodowania sygnał modulujący zostaje przetworzony na ciąg bitów. Do ich transmisji wykorzystuje się szereg elementarnych sygnałów, zwanych **symbolami transmisyjnymi**. Zbiór symboli tworzy **kod transmisyjny** lub **modulację cyfrową**. To pierwsze określenie jest stosowane najczęściej do opisu transmisji w paśmie podstawowym, w zakresie niskich częstotliwości. Do opisu transmisji w zakresie wysokich częstotliwości, gdy wykorzystywana jest fala nośna, używamy pojęcia modulacji cyfrowej. Nie zawsze jest to regułą, czasem mówimy o modulacji w paśmie podstawowym.



Rysunek 24 Cyfrowe łącze transmisyjne

Jeśli wykorzystujemy dwa symbole, mamy do czynienia z kodem binarnym (modulacją binarną). Wówczas symbole transmisyjne będziemy oznaczać przez  $s_0(t)$  i  $s_1(t)$ , przypisując odpowiednim symbolom wartości logiczne 0 i 1.. Mając  $M$  symboli, będziemy je numerować od 1 do  $M$  i będziemy mówić o modulacji  $M$ -wartościowej. W modulacji  $M$ -wartościowej jeden symbol może transmitować  $\log_2 M$  bitów. Np. symbolom modulacji 4-wartościowej przypisujemy pary bitów: 00, 01, 10, 11.

Ciąg transmitowanych symboli opisują następujące parametry:

- Szybkość modulacji, czyli liczba symboli na sekundę. Jeśli czas trwania symbolu wynosi  $T$ , to szybkość modulacji wynosi  $R_m = \frac{1}{T}$  bodów (jednostka bod [Bd] pochodzi id nazwiska francuskiego badacza E.Baudota).
- Szybkość transmisji binarnej (przepływność binarna)  $R_b$  [bit/s] zależy od szybkości modulacji i od wartościowości modulacji:

$$R_b = lR_m, \quad l = \log_2 M \quad (26)$$

Gdzie  $l$  jest liczbą bitów przenoszona w jednym symbolu.

- Energia symbolu  $E_i = \int_0^T s_i^2(t) dt$  i średnia energia  $E_s = \sum_{i=1}^M P_i E_i$  ( $P_i$  jest prawdopodobieństwem nadania i-go symbolu).
- Moc średnia sygnału (mierzona zwykle na wyjściu kanału)  $S = \frac{E_s}{T} = E_s R_m$
- Energia na bit  $E_b = \frac{S}{R_b}$ , czyli energia wydatkowana na przeniesienie jednego bitu.
- Pasma częstotliwości  $B$  jest proporcjonalne do szybkości modulacji: W typowych warunkach  $B \approx R_m = \frac{1}{T}$  (patrz rys.8 Moduł 1). Najmniejszą wartością, wynikającą z twierdzenia Nyquista, jest  $B = R_m/2$
- Efektywność widmowa jest miarą wykorzystania pasma częstotliwości. Mówi ona, ile bitów można przesać na sekundę w paśmie 1 Hz:

$$E_f = \frac{R_b}{B} \quad (27)$$

- Stopa błędów binarnych BER (bit error rate), czyli prawdopodobieństwo przekłamania jednego bitu  $P_e$ . Zależy ona nie tylko od jakości odebranego sygnału (SNR), ale od szybkości transmisji  $R_b$ , oraz od zastosowanej modulacji.
- Stosunek mocy sygnału do szumu na wyjściu kanału  $SNR = S/N$ , wyrażany najczęściej w decybelach [dB]. Często stosowana jest inna miara jakości sygnału na wyjściu kanału: stosunek energii na bit ( $E_b$ ) do gęstości mocy szumu na wyjściu kanału ( $\eta$ ). W transmisji binarnej, gdy każdy symbol przenosi 1 bit,  $R_b = R_m \approx B$  i obie miary są zbliżone:

$$SNR = \frac{S}{N} = \frac{E_b R_b}{\eta B} \approx \frac{E_b R_m}{\eta B} = \frac{E_b}{\eta} \quad (28)$$

- Jeśli używamy transmisji cyfrowej do przenoszenia dźwięku lub obrazu, to odporność systemu transmisyjnego na szumy w kanale możemy przedstawić jako funkcję  $SNR_0 = f(SNR)$ , podobnie jak w transmisji analogowej (p.1.1)

Wiele z wymienionych wyżej parametrów stanowi kryterium jakości systemu transmisyjnego. Pożądana byłaby duża szybkość transmisji bez błędów binarnych, wąskie pasmo (ze względu na oszczędność), wysoka efektywność widmowa i odporność na szumy. Niestety postulaty te są sprzeczne. Graniczne wartości niektórych z wymienionych parametrów będą podane na końcu tego modułu.

## 2.2 Kody transmisyjne

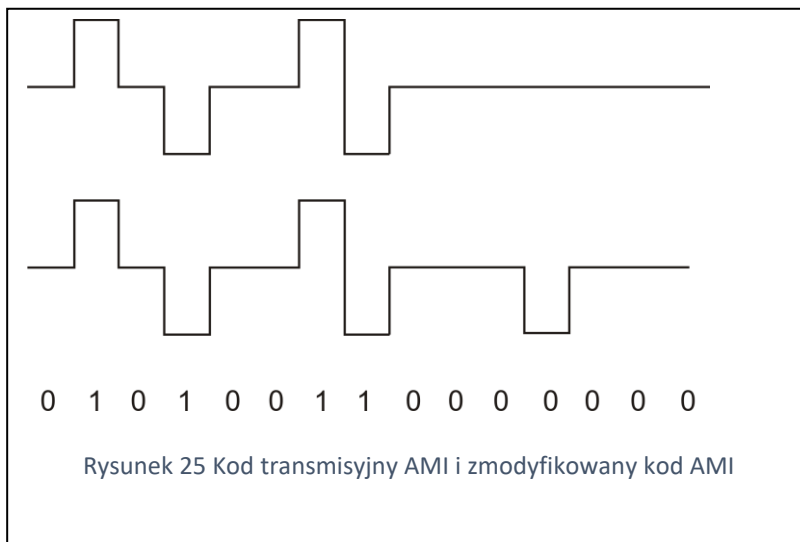
Na rys.8 w Module 1 naszkicowano przebiegi czasowe popularnych kodów. Strumienie binarne w układach cyfrowych przesyła się na bliskie odległości, wówczas stosuje się **binarny kod unipolarny**:

$$s_1(t) \neq 0, \quad s_0(t) = 0 \quad 0 \leq t < T \quad (29)$$

Symbol  $s_1(t)$  może mieć kształt prostokątny, może stanowić półokres funkcji sinus, itp. Wadą tego kodu jest niezerowa wartość średnia, co oznacza przepuszczanie prądu stałego przez łącze kablowe. Nie ma tej wady **binarny kod bipolarny**:

$$s_1(t) \neq 0, \quad s_0(t) = -s_1(t) \quad 0 \leq t < T \quad (30)$$

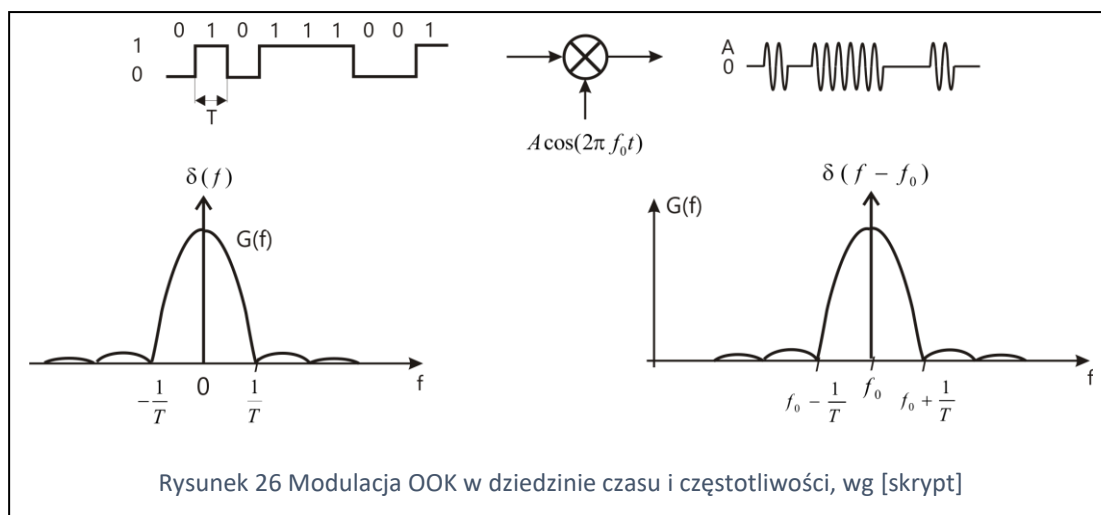
Do prawidłowego odbioru symboli niezbędna jest **synchronizacja elementowa** – zlokalizowanie położenia symboli na osi czasu. Oba wymienione kody nie zapewniają synchronizacji gdy nadawany jest np. długi ciąg jednakowych symboli o kształcie prostokątnym. Z tego względu stosuje się kody z powrotem do zera (return to zero, RZ), do transmisji wykorzystując połowę szczeliny czasowej. Prowadzi to jednak do podwojenia szerokości pasma. Pewnym kompromisem jest **kod AMI** (alternate mark inversion) – rys.25.



W kodzie AMI wartości logicznej „0” odpowiada brak sygnału, a wartości „1” impuls, na przemian dodatni i ujemny. Zagrożeniem dla utrzymania synchronizacji elementowej byłaby długa sekwencja zer, z tego względu zmodyfikowano kod, przypisując niektórym zerom logicznym impulsy wstawione niezgodnie z zasadą zmiany znaku. W ten sposób, bez skrócenia impulsów (a więc bez poszerzenia pasma) udało się utrzymać synchronizację elementową.

### 2.3 Modulacje cyfrowe

Aby wykorzystać wyższe częstotliwości, np. do transmisji bezprzewodowej, potrzebna jest fala nośna o odpowiedniej częstotliwości  $f_0$ . Najprostszą modulację otrzymamy, mnożąc sygnał kodu unipolarnego przez nośną. Jest to cyfrowa modulacja amplitudy zwana OOK (on-off-keying). Na rys.26 naszkicowano przebieg czasowy i gęstość mocy sygnału OOK.



Widmo sygnału OOK jest przesunięciem do częstotliwości  $f_0$  widmem sygnału kodu unipolarnego. Patrz rys.3 przedstawiający efekt mnożenia sygnału  $m(t)$  przez falę nośną. To samo odnosi się do gęstości mocy. Sygnał kodu unipolarnego posiada składową stałą, więc w jego widmie istnieje prążek na częstotliwości równej zero. Po pomnożeniu przez falę nośną prążek przemieszcza się w prawo i w lewo o częstotliwość  $f_0$  (na rys. 26 pokazano tylko prawą część gęstości mocy). Koncentracja mocy na częstotliwości  $f_0$  nie przenosi informacji, lecz wymaga zwiększenia mocy nadajnika. Brak tej koncentracji mocy poprawiłby parametry modulacji, w szczególności obniżyłaby się wartość SNR na wyjściu kanału przy tej samej jakości sygnału na wyjściu odbiornika (czyli przy tej samej wartości  $SNR_0$ ). Większy stosunek  $SNR_0/SNR$  (lub większa różnica, jeśli wielkości te wyrażono w dB) świadczyłaby o lepszej odporności na szumy w kanale.

Prążek fali nośnej zniknie, jeśli w modulatorze (rys.26) użyjemy kodu bipolarnego zamiast unipolarnego. Sygnał kodu bipolarnego ma zerową składową stałą. Otrzymamy w ten sposób **binarną modulację fazy** (BPSK – binary phase shift keying), zwaną też niekiedy dwuwartościową modulacją amplitudy. Symbolami transmisyjnymi są tu sygnały harmoniczne o przeciwnej fazie (i co za tym idzie, przeciwnej polaryzacji), np.

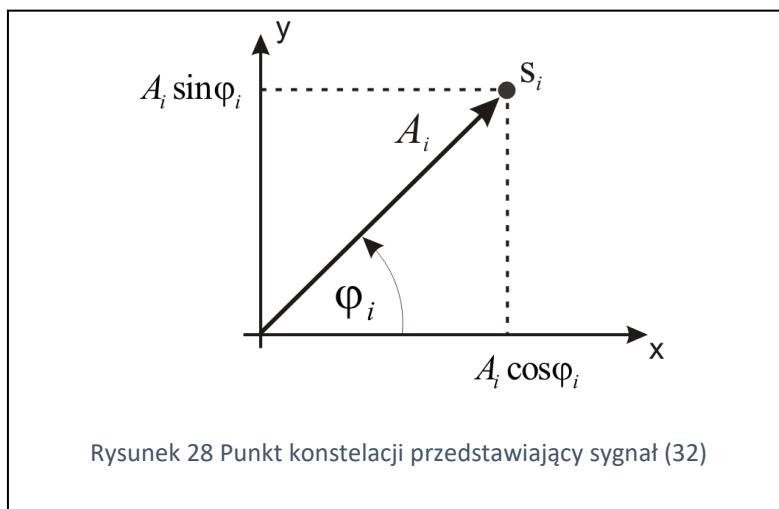
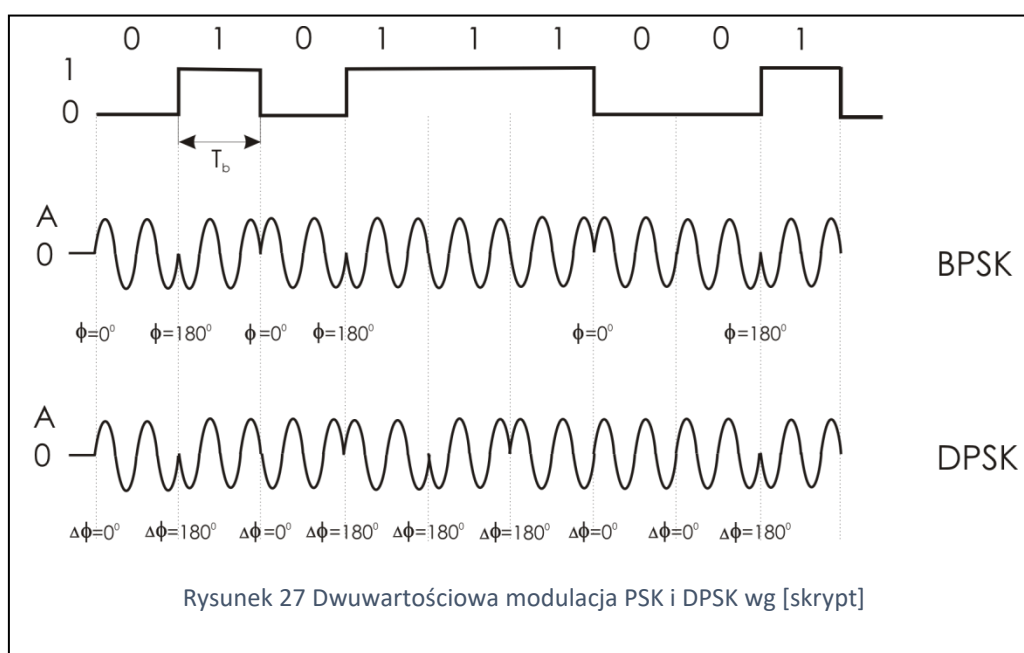
$$s_1(t) = \cos 2\pi f_0 t, \quad s_0(t) = -\cos 2\pi f_0 t \quad 0 \leq t < T \quad (31)$$

Popularną modulacją cyfrową jest różnicowa modulacja fazy (DPSK -differential phase shift keying). Tutaj wykorzystuje się tę samą parę sygnałów, co w PSK. Informacja jest jednak kodowana w różnicy faz pomiędzy kolejnymi sygnałami. Np. zmiana fazy o 180 stopni oznacza logiczne „1”, a utrzymanie tej samej fazy logiczne „0” (konwencja może też być odwrotna). Przykład podano na rys.27.

Symbol opisane równaniem

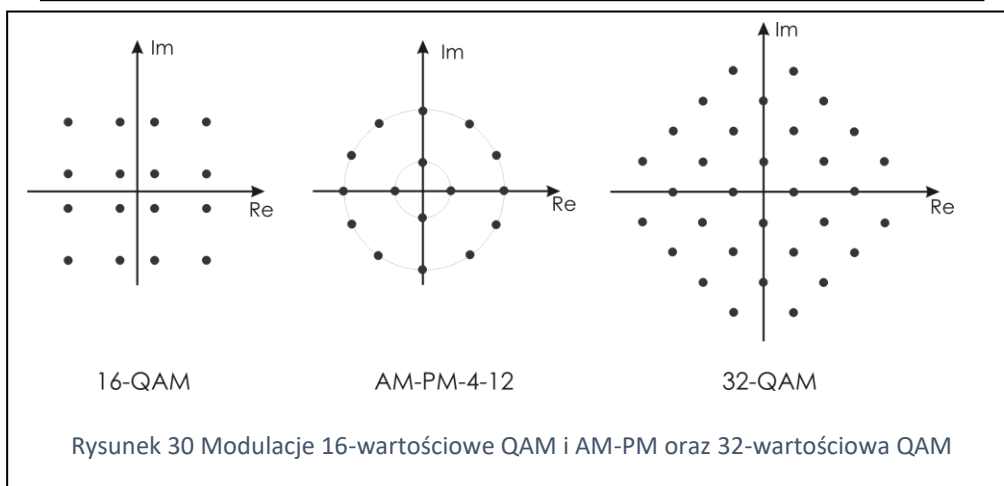
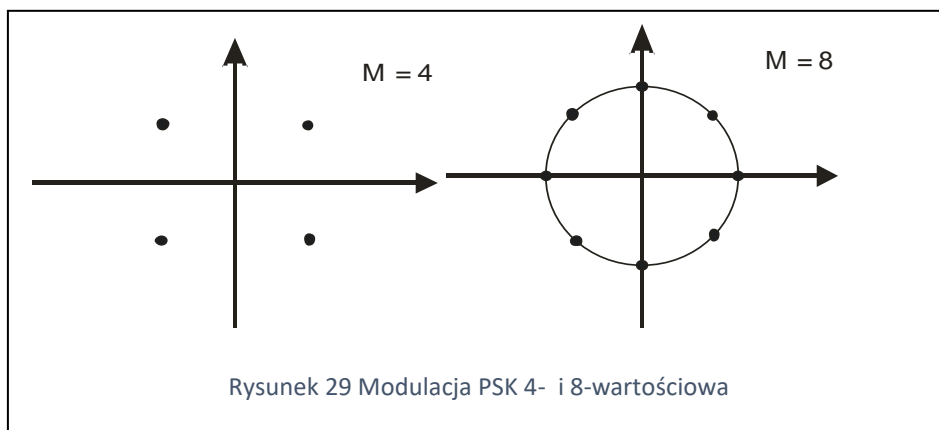
$$s_i(t) = A_i \cos(2\pi f_0 t + \varphi_i) \quad (32)$$

czyli sygnały o tej samej częstotliwości, różniące się amplitudą o fazą początkową, są przedstawiane w postaci punktu na płaszczyźnie zespolonej – rys.28. Zbiór M takich punktów tworzy konstelację opisującą daną modulację.



Na rys.29 pokazano konstelacje 4 – 8-wartościowych modulacji PSK. Umożliwiają one transmisję odpowiednio 2 i 3 bitów w jednym symbolu. 4-wartościowa modulacja PSK jest jednocześnie 4- wartościową QAM (quadrature amplitudę modulation), gdyż można ją otrzymać z dwóch 2-wartościowych modulacji amplitudy:

jedna wykorzystuje nośną kosinusoidalną a druga sinusoidalną. Na rys.30 pokazano konstelacje 16- i 32-wartościowej modulacji QAM, oraz jedną z licznych kombinacji AM-PM (modulacja amplitudy i fazy).



Modulacje wielowartościowe umożliwiają lepsze wykorzystanie pasma kanału. Pasma zależy od czasu trwania symbolu ( $T$ ). Nieskończenie długi symbol opisany wzorem (32) miałby nieskończenie wąskie pasmo. Im częściej zmieniają się parametry sygnału (amplituda, faza), tym szersze jest pasmo. Pasma jest więc proporcjonalne do szybkości modulacji  $R_m = \frac{1}{T}$ . W modulacji 2-wartościowej każdy symbol przesyła jeden bit, a w  $M$ -wartościowej  $l = \log_2 M$  bitów. Rośnie zatem efektywność widmowa:

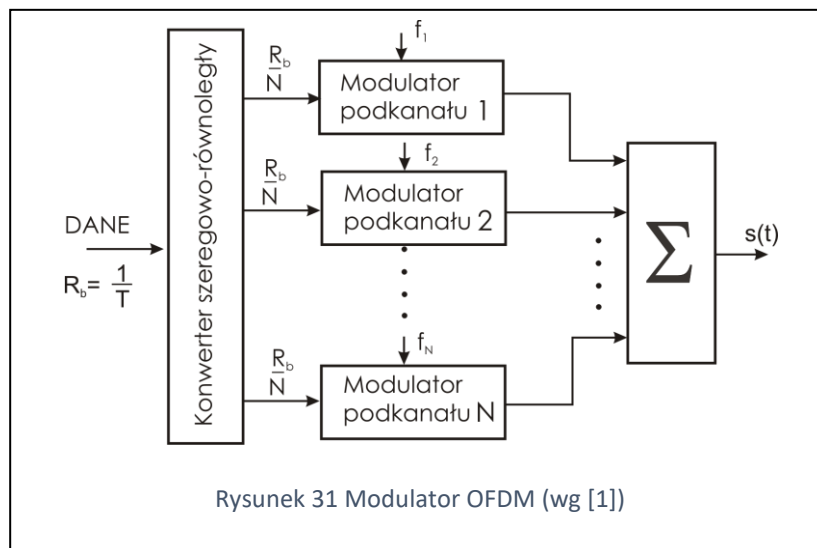
$$\frac{R_b}{B} = \frac{R_m l}{B} = \frac{2Bl}{B} = 2l \quad (33)$$

We wzorze (33) podstawiono  $R_m = 2B$ , jest to wartość graniczna, w praktyce szybkość modulacji jest nieco mniejsza.

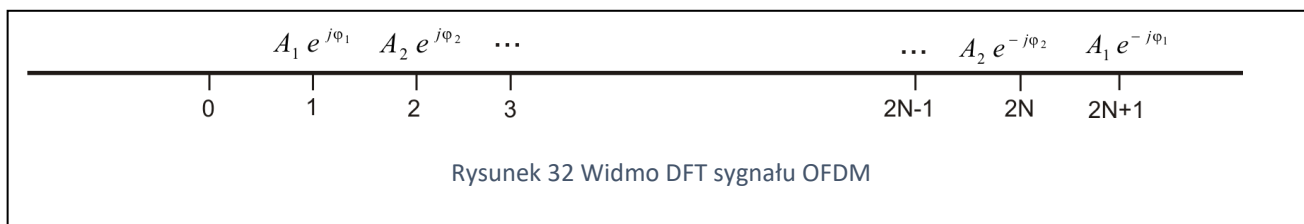
Innym rodzajem modulacji jest kluczkowanie częstotliwości (FSK-frequency shift keying). W binarnej FSK występują dwie częstotliwości fali nośnej – jednej z nich jest przypisana wartość logiczna 1, a drugiej 0.

Nośnych może być więcej, najczęściej tworzą one równoodległy na szereg prążków widmowych. Tak powstaje OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing). [1]

Strumień binarny jest rozdzielany między  $N$  modulatorów amplitudy pracujących z falami nośnymi o różnych częstotliwościach (rys.31). Widma sygnałów zmodulowanych pokrywają się częściowo, tym niemniej sygnały można rozdzielić po stronie odbiorczej, dzięki ich wzajemnej ortogonalności.



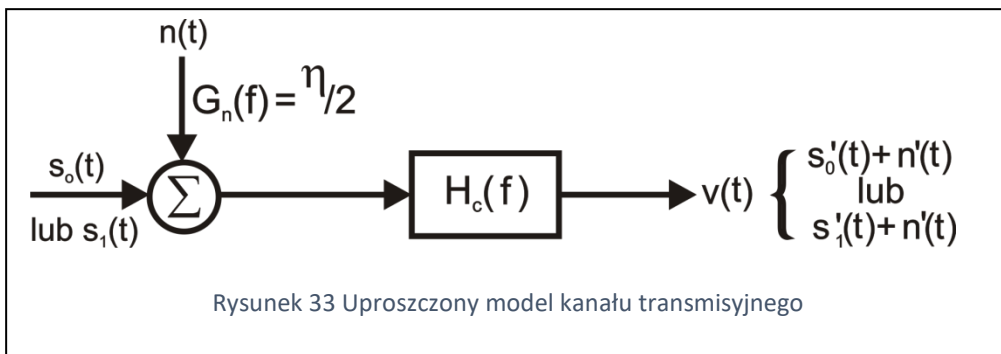
Sygnal OFDM można wygenerować, stosując odwrotną dyskretną transformatę Fouriera (IDFT) – rys.32. Wybierając N symboli do jednoczesnej transmisji z wykorzystaniem N modulatorów, tworzymy pożądane widmo DFT. Należy pamiętać o „lustrzanym” odbiciu i o tym, że próbka o indeksie zerowym i próbka w pozycji środkowej są liczbami rzeczywistymi, a więc nie można im nadać pożądanej fazy. Potrzeba zatem  $2N+2$  próbek widma. Po zastosowaniu IDFT otrzymuje się sygnał OFDM w dziedzinie czasu. Modulator amplitudy pozwoli na przeniesienie go w dowolny zakres częstotliwości.



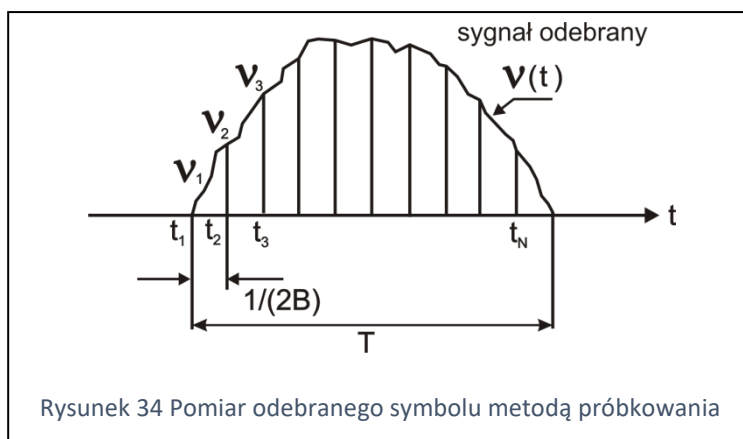
### 3 Odbiór optymalny sygnałów cyfrowych

#### 3.1 Optymalna reguła decyzyjna w transmisji binarnej

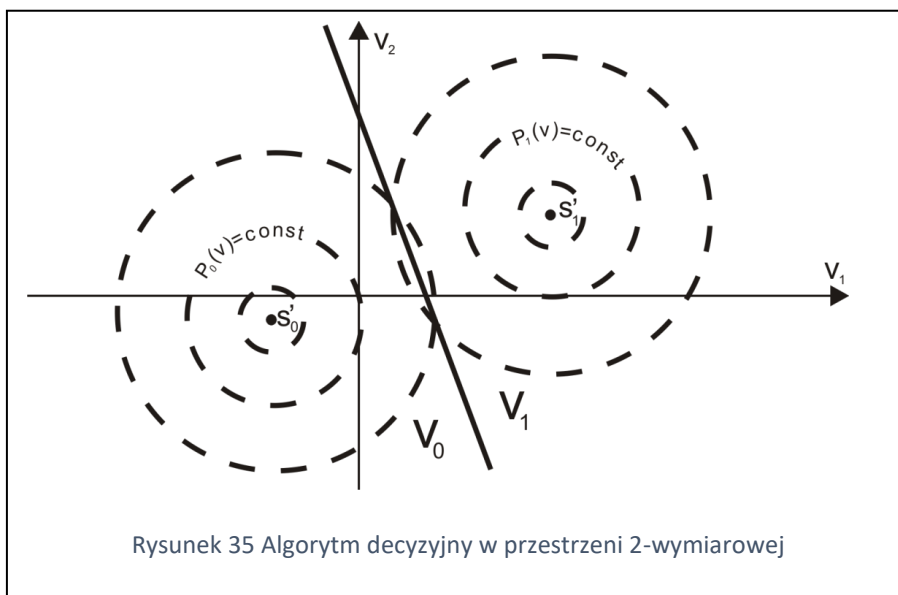
W kanale transmisyjnym występuje wiele czynników utrudniających odbiór: szum termiczny, ograniczone pasmo, tłumienie, zaniki, zakłócenia impulsowe, zniekształcenia nieliniowe. Załóżmy, że występuje jedynie szum pochodzenia termicznego o gęstości mocy  $\eta$  W/Hz (dwustronnie  $\eta/2$  W/Hz). Kod transmisyjny jest binarny, a pasmo kanału równe pasmu sygnału zmodulowanego (rys.33). Wówczas można przyjąć, że symbole transmisyjne pojawiają się na wyjściu kanału w swym pierwotnym kształcie:  $s'_0 = s_0$ ,  $s'_1 = s_1$ . Moc szumu na wyjściu kanału jest równa  $N\eta$ . Zakładamy również, że zapewniona jest synchronizacja elementowa, tzn. znane są momenty rozpoczęcia i zakończenia kolejnych symboli.



Zaszumiony sygnał  $v(t)$ , pojawiający się na wyjściu kanału, powinien być zmierzony w taki sposób, aby wynik pomiaru zawierał całą informację o odebranych symbolu i szumie. Ze względu na ograniczone pasmo ( $B$ ), właściwą metodą pomiarową jest próbkowanie w częstotliwości  $2B$ . W czasie trwania jednego symbolu zgromadzimy w ten sposób  $N=2BT$  próbek – rys.34.



Mając wynik pomiaru, czyli wektor  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_N]^t$ , ( $t$  – transpozycja), należy teraz opracować algorytm decyzyjny, który każdemu możliwemu wektorowi  $\mathbf{v}$  przypisywałby decyzję: 0 lub 1. Oznacza to, że  $N$ -wymiarową przestrzeń należy podzielić na dwa zbiory decyzyjne:  $V_0$  i  $V_1$ . Na rys.35 pokazano podział przestrzeni 2-wymiarowej. Punkty  $s'_0, s'_1$  to wyniki pomiaru symboli bez szumu, a  $p_0(v), p_1(v)$  to gęstości prawdopodobieństwa otrzymania wyniku pomiaru równego  $v$  przy nadaniu  $s_0$  i  $s_1$ . Oznaczmy jeszcze przez  $P_0$  i  $P_1$  prawdopodobieństwa nadania obu symboli (oczywiście  $P_0+P_1=1$ ).



Błąd wystąpi w dwóch przypadkach: podjęcia decyzji 1 gdy nadano 0 i podjęcia decyzji 0 gdy nadano 1. Prawdopodobieństwo błędnego odbioru wynosi:

$$P_e = P_0P(1|0) + P_1P(0|1) \quad (34)$$

Prawdopodobieństwa warunkowe są równe  $P(1|0) = \int_{V_1} p_0(v)dv$ ,  $P(0|1) = \int_{V_0} p_1(v)dv$ .

Ze względu na fakt, że  $\int_{V_0} p_1(v)dv + \int_{V_1} p_1(v)dv = 1$ , to ostatnie można przepisać w postaci  $\int_{V_0} p_1(v)dv = 1 - \int_{V_1} p_1(v)dv$ . Ostatecznie (34) można zapisać następująco:

$$P_e = P_0 \int_{V_1} p_0(v)dv + P_1 [1 - \int_{V_1} p_1(v)dv] = P_1 + \int_{V_1} [P_0p_0(v) - P_1p_1(v)]dv \quad (35)$$

Minimalizując  $P_e$ , mamy wpływ jedynie na podział przestrzeni obserwacji sygnału na dwa zbiory decyzyjne, możemy jedynie zdefiniować  $V_1$ . Optymalna reguła decyzyjna polega na zakwalifikowaniu do  $V_1$  wszystkich obserwacji  $v$ , dla których funkcja podcałkowa jest ujemna. Całka we wzorze (35) przyjmie wówczas wartość ujemną o jak największej wartości bezwzględnej. Reasumując, **optymalna reguła decyzyjna** jest następująca:

$$\begin{aligned} P_0p_0(v) < P_1p_1(v) &\Rightarrow v \in V_1 \\ P_0p_0(v) \geq P_1p_1(v) &\Rightarrow v \in V_0 \end{aligned} \quad (36)$$

Najczęściej oba symbole pojawiają się z tym samym prawdopodobieństwem:  $P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$ . Wówczas na decyzję ma wpływ jedynie wartość gęstości prawdopodobieństwa: gdy  $p_1(v) > p_0(v)$  podejmujemy decyzję „1” i odwrotnie.

Należy zauważyć, że kształt funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $p_1(v)$  i  $p_0(v)$  jest identyczny, gdyż zależy jedynie od szumu (jest to dwuwymiarowa zmienna o rozkładzie gaussowskim). Warunek  $p_1(v) > p_0(v)$  będzie spełniony w punkcie  $v$ , który leży bliżej centralnego punktu  $s'_1$  niż punktu  $s'_0$ . Zamiast obliczać wartości  $p_1(v)$  i  $p_0(v)$ , można porównywać odległości  $\|v - s'_0\|$ ,  $\|v - s'_1\|$ . Chodzi o odległości euklidesowe  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$ , gdyż gaussowska gęstość prawdopodobieństwa jest stała w punktach jednakowo odległych od punktu centralnego (rys.35). Ostatecznie optymalna reguła decyzyjna w przypadku gdy  $P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$  jest następująca:

$$\begin{aligned} \|v - s'_1\| < \|v - s'_0\| &\Rightarrow v \in V_1 \\ \|v - s'_1\| \geq \|v - s'_0\| &\Rightarrow v \in V_0 \end{aligned} \quad (37)$$

Oczywiście można też porównywać kwadraty odległości. **Zasada minimum odległości** opisana wzorem (37) jest łatwa w stosowaniu i intuicyjnie prosta, trzeba jednak pamiętać o warunku  $P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$ .

### 3.2 Realizacje odbiornika optymalnego

Zasadę optymalnego odbioru w transmisji binarnej (wzór 37) można przepisać w taki sposób, aby odnosiła się do sygnałów ciągłych:

$$\begin{aligned} \int_0^T [v(t) - s_1(t)]^2 dt < \int_0^T [v(t) - s_0(t)]^2 dt &\Rightarrow "1" \\ \int_0^T [v(t) - s_1(t)]^2 dt \geq \int_0^T [v(t) - s_0(t)]^2 dt &\Rightarrow "0" \end{aligned} \quad (38)$$

Pierwszy wiersz (38) można przepisać w następującej postaci:

$$\int_0^T v^2(t)dt - 2 \int_0^T v(t)s_1(t)dt + \int_0^T s_1^2(t)dt < \int_0^T v^2(t)dt - 2 \int_0^T v(t)s_0(t)dt + \int_0^T s_0^2(t)dt \Rightarrow "1"$$

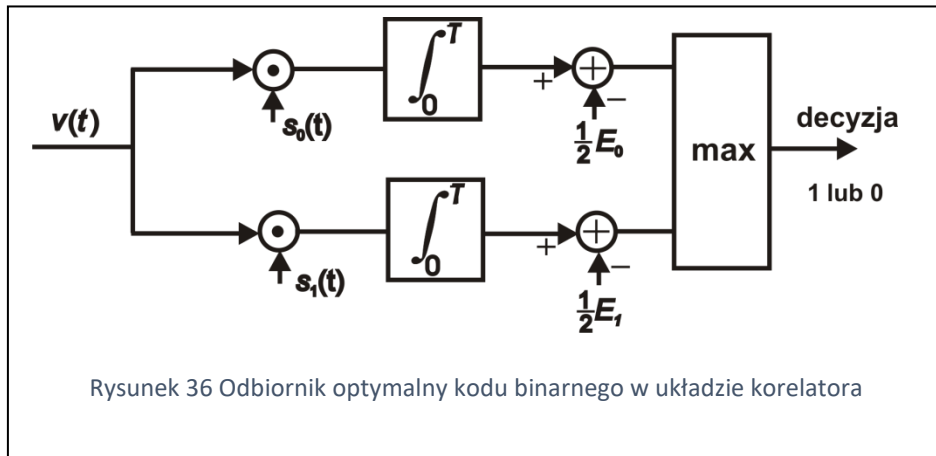
a następnie uprościć i podzielić stronami przez (-2):



$$\int_0^T v(t)s_1(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^T s_1^2(t)dt > \int_0^T v(t)s_0(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^T s_0^2(t)dt \Rightarrow "1"$$

(39)

Wzór (39) przedstawia zasadę działania **odbiornika optymalnego w układzie korelatora** – rys.36.



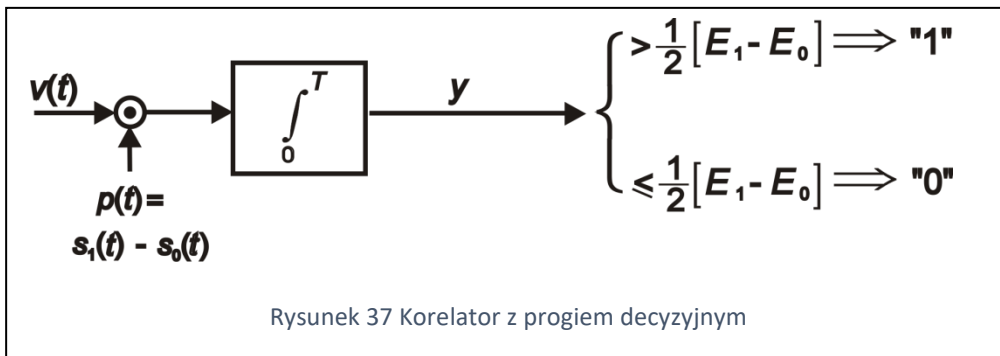
Istotnie, całka  $\int_0^T v(t)s_1(t)dt$  przedstawia korelację sygnału odebranego z jednym z symboli. Z kolei  $E_1 = \int_0^T s_1^2(t)dt$  jest energią symbolu.

Wzór (39) można przepisać w nieco inny sposób:

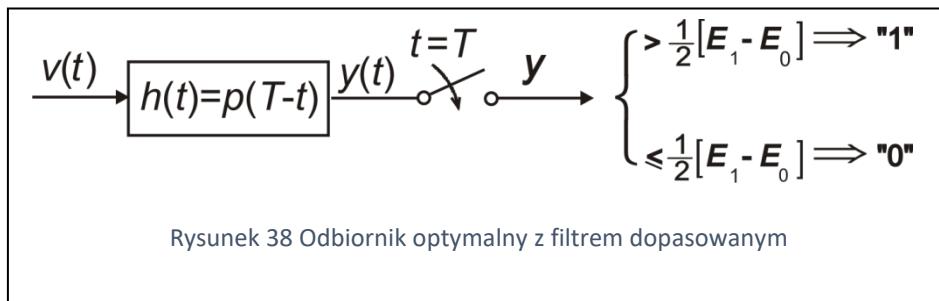
$$\int_0^T v(t)[s_1(t) - s_0(t)]dt > \frac{1}{2}E_1 - \frac{1}{2}E_0 \Rightarrow "1"$$

(40)

Jeśli korelacja sygnału odebranego  $v(t)$  z sygnałem różnicowym  $p(t) = s_1(t) - s_0(t)$  przekracza próg decyzyjny  $\frac{1}{2}E_1 - \frac{1}{2}E_0$ , wówczas podejmujemy decyzję, że odebrany sygnał jest zaszumionym sygnałem  $s_1(t)$ . W przeciwnym wypadku uznajemy ten sygnał za  $s_0(t)$ . Schemat zmodyfikowanego korelatora pokazano na rys.37. Korelację oznaczono przez  $y$ .



Przy okazji warto zapoznać się z popularnym w teorii sygnałów pojęciem filtra dopasowanego. Układ obliczania korelacji (mnożenie i całkowanie na rys.37) można zastąpić **filtrem dopasowanym** do sygnału  $p(t)$ . Z wyjścia filtra pobieramy próbkę pod koniec szczeliny czasowej przeznaczony na odbiór symbolu – rys.38. Jest ona równa korelacji  $y$  z rys.37, co wynika z następujących przekształceń.



Odpowiedź impulsowa filtru wynosi  $h(t) = p(T-t)$ . Sygnał wyjściowy filtru jest splotem sygnału wejściowego z odpowiedzią impulsową:

$$y(t) = v(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)p(T - t + \tau)d\tau$$

Próbka sygnału  $y(t)$  pobrana w momencie  $t=T$  wynosi

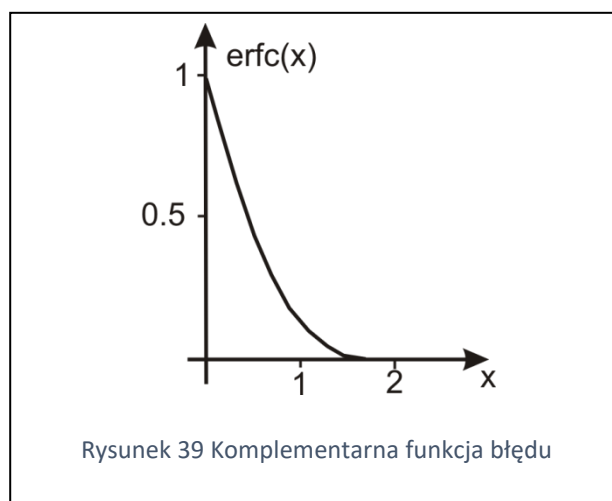
$$y = y(t)|_{t=T} = \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)p(\tau)d\tau = \int_0^T v(\tau)p(\tau)d\tau \quad (41)$$

Kończy to dowód, że obliczanie korelacji można zastąpić filtracją dopasowaną.

Odbiornik przetwarzający próbki sygnałów (wzór 37), jak i odbiorniki przetwarzające sygnały ciągłe: wzór 38, rys. 26, rys.37, rys.38, realizują tę samą zasadę minimum odległości i są sobie równoważne. W szczególności oferują tę samą stopę błędów. Wynosi ona

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_{10}}{4\eta}}\right) \quad (42)$$

gdzie  $E_{10} = \int_0^T p^2(t)dt$  jest energią sygnału różnicy  $p(t) = s_1(t) - s_0(t)$ ,  $\eta$  jest gęstością mocy szumu na wyjściu kanału, a  $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-u^2)du$  jest tzw. komplementarną funkcją błędu. Jest ona silnie malejąca (rys.39), dlatego dążymy do jak największej wartości  $E_{10}$ . Jest to oczywiste, gdyż energia  $E_{10}$  jest miarą różnicy między symbolami, która powinna być jak największa, jeśli mamy te sygnały rozpoznać w obecności szumu. Pamiętajmy poza tym, że wzór (42) obowiązuje dla transmisji binarnej przy założeniu, że oba symbole pojawiają się z jednakowym prawdopodobieństwem.



### 3.3 Kod unipolarny i kod bipolarny

Dla każdej pary symboli  $s_1(t), s_0(t)$  można zastosować odbiornik optymalny. Prawdopodobieństwo błędnego odbioru symbolu  $P_e$  (42) będzie tym mniejsze, im większa jest różnica sygnałów, której miarą jest

energia  $E_{10}$ . Energię tę można zwiększyć przez zwiększenie amplitud obu symboli, wymagałoby to jednak zwiększenia mocy nadajnika. Moc nadajnika możemy obliczyć, dzieląc średnią energię symbolu transmisyjnego przez czas jego trwania:

$$S = \frac{E_1 P_1 + E_0 P_0}{T} \quad (43)$$

Tę samą moc zmierzmy na wyjściu kanału, gdyż zakładamy że kanał nie tłumii sygnału (rys.33). Jeżeli  $P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$ , wówczas  $S = \frac{1}{2T}(E_1 + E_0)$ . Problemem jest taki dobór symboli  $s_1(t)$ ,  $s_0(t)$  aby osiągnąć maksimum  $E_{10}$  przy danej mocy sygnału  $S$ . Nietrudno wykazać, że taka para symboli powinna różnić się znakiem, sam kształt symbolu nie ma znaczenia:

$$s_1(t) = -s_0(t) \quad (44)$$

Jest to **bipolarny kod transmisyjny**. Oba sygnały tego kodu mają jednakową energię  $E_1 = E_0 = ST$ . Sygnał różnicowy  $p(t)$  wynosi  $p(t) = s_1(t) - s_0(t) = 2s_1(t)$ , a jego energia jest 4 razy większa niż  $E_1$  (pamiętamy że energia jest całką z sygnału podniesionego do kwadratu):  $E_{10} = 4E_1 = 4ST$ . Podstawiając  $E_{10}$  do wzoru (42), otrzymuje się wzór na stopę błędów kodu bipolarnego:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_{10}}{4\eta}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{ST}{\eta}}\right) \quad (45)$$

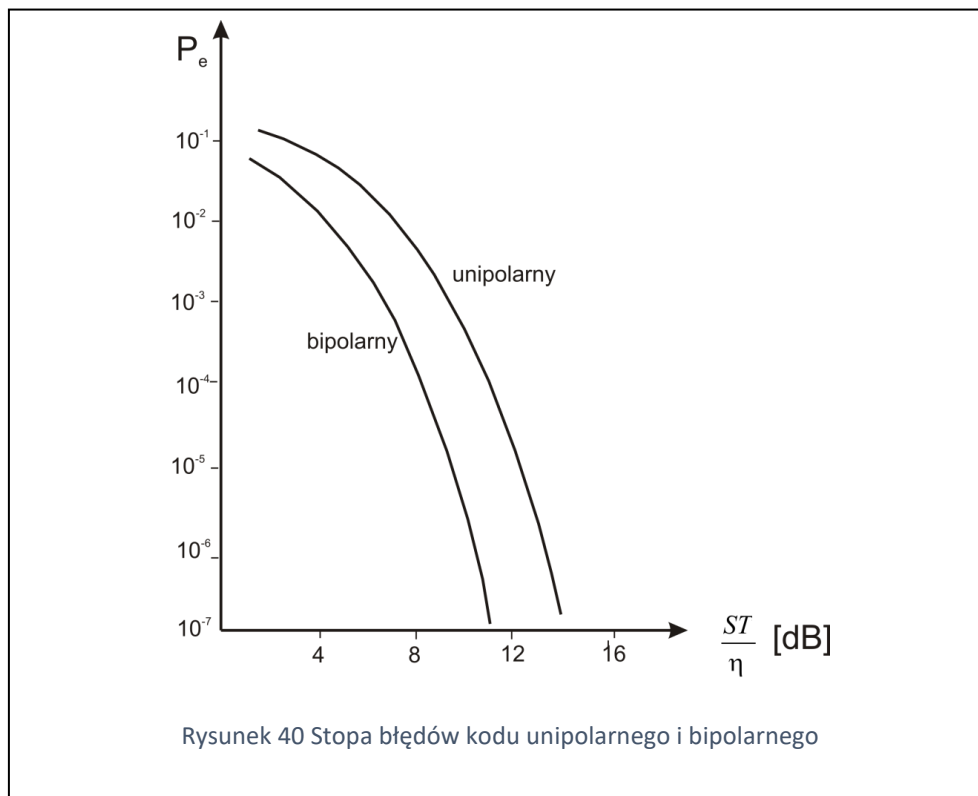
Stopa błędów maleje, gdy zwiększa się moc sygnału  $S$  i czas jego trwania  $T$ . W kodzie binarnym transmituje się  $1/T$  symboli na sekundę i tyle samo bitów na sekundę. Oznacza to, że powolna transmisja jest bardziej odporna na szumy w kanale. Wzór (45) jest słuszny dla każdej pary sygnałów spełniających warunek (44): może to być para impulsów prostokątnych, ale także dwuwartościowa modulacja PSK (31).

Zajmijmy się teraz **kodem unipolarnym**, w którym jeden z symboli jest sygnałem równym zero:  $s_0(t) = 0$ .

Średnia moc sygnału wynosi  $S = \frac{E_1 P_1 + E_0 P_0}{T} = \frac{E_1 P_1}{T} = \frac{E_1}{2T}$ . Sygnał różnicowy  $p(t) = s_1(t) - s_0(t) = s_1(t)$ , w związku z tym  $E_{10} = E_1 = 2ST$ . Podstawiając  $E_{10}$  do wzoru (42), otrzymuje się wzór na stopę błędów kodu unipolarnego:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_{10}}{4\eta}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{ST}{2\eta}}\right) \quad (46)$$

Porównując ze wzorem (45), zauważamy, że przy tej samej mocy nadajnika, szybkości transmisji i szumie w kanale, we wzorze (46) mamy mniejszy argument funkcji  $\operatorname{erfc}$ , a więc większą wartość tej funkcji i większe prawdopodobieństwo błędnego odbioru symbolu. Reasumując, **kod bipolarny jest bardziej odporny na szumy w kanale** – rys.40. Wzór (46) określa stopę błędów dla każdej modulacji binarnej, w której jeden z dwóch sygnałów jest równy zero, np. modulacji OOK (rys.26).



Pamiętamy, że porównywaliśmy kod unipolarny i bipolarny w warunkach, gdy oba sygnały były nadawane z jednakowym prawdopodobieństwem. Jedynie w tych warunkach obowiązuje zasada minimum odległości (37) i wzór (42) jest słuszny.

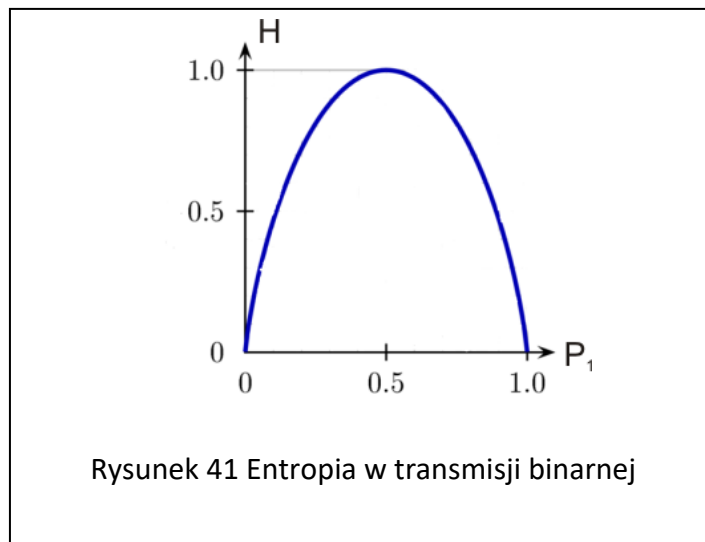
Naruszenie tego warunku wydawałoby się korzystne w przypadku kodu unipolarnego. Jeżeli sygnał  $s_0(t) = 0$  pojawia się częściej niż  $s_1(t) \neq 0$ , czyli  $P_1 < P_0$ , wówczas średnia moc sygnału unipolarnego wynosi  $S = \frac{E_1 P_1 + E_0 P_0}{T} = \frac{E_1 P_1}{T}$ . Zmniejszając  $P_1$ , można zwiększać energię  $E_1$ , zachowując stałą moc nadajnika  $S$ . Większa energia to większa amplituda symbolu  $s_1(t)$ , co sprawia, że łatwiej ten symbol odróżnić od symbolu zerowego. Można się zatem spodziewać zmniejszenia stopy błędów  $P_e$ . Czytelnik będzie się mógł o tym przekonać, wykonując ćwiczenie symulacyjne (Ćw.4 – transmisja cyfrowa – kody transmisyjne).

Dlaczego nie stosujemy w praktyce tego sposobu zwiększania odporności na szумы w kanale? Odpowiedź podsuwa teoria informacji – naruszając równowagę prawdopodobieństw  $P_1$  i  $P_0$ , zmniejszamy ilość transmitowanej informacji.

Ilość informacji przenoszona przez jeden sygnał jest odwrotnie proporcjonalna do prawdopodobieństwa nadania tego sygnału. Jest to intuicyjnie jasne: rzadko występujące zdarzenie, gdy już wystąpi, dostarcza nam dużej porcji informacji. Definiując ilość informacji używa się też logarytmu, gdyż przy zaistnieniu dwóch niezależnych zdarzeń, ich prawdopodobieństwa się mnoży, a ilości informacji dodaje. Przy podstawie logarytmu równej 2, wyrażamy ilość informacji w bitach. I tak, sygnał  $s_0(t)$  przesyła  $\log_2 \frac{1}{P_0}$  bitów, a sygnał  $s_1(t)$  przesyła  $\log_2 \frac{1}{P_1}$  bitów. **Średnia ilość informacji przenoszona przez jeden symbol jest nazywana entropią** i wyraża się wzorem:

$$H = P_0 \log_2 \frac{1}{P_0} + P_1 \log_2 \frac{1}{P_1} \quad \left[ \frac{\text{bit}}{\text{symbol}} \right] \quad (47)$$

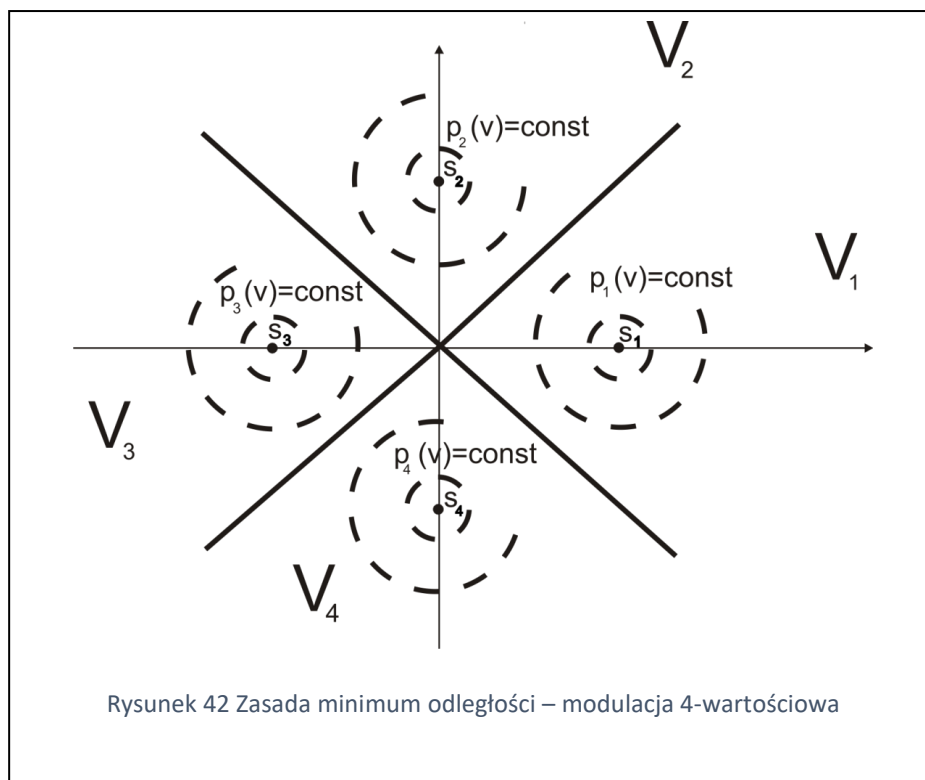
Biorąc pod uwagę, że  $P_0 + P_1 = 1$ , otrzymujemy entropię jako funkcję  $P_1$ . Wykres tej funkcji (rys.40) został otrzymany przez C.Shannona w połowie XX w. Przesyłamy 1 bit informacji na symbol transmisyjny, gdy oba sygnały pojawiają się z jednakowym prawdopodobieństwem. Gdy naruszymy tę równowagę, zmniejszamy ilość transmitowanej informacji.



### 3.4 Odbiorniki modulacji wielowartościowej

Modulacje wielowartościowe zapewniają lepsze wykorzystanie pasma kanału. Pasma ogranicza liczbę symboli przesyłanych w ciągu sekundy (baud rate), natomiast z wartościowością związana jest liczba bitów zakodowanych w jednym symbolu ( $\log_2 M$  bitów na symbol w modulacji M-wartościowej).

Jeżeli symbole  $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$  pojawiają się z jednakowym prawdopodobieństwem ( $P_i = \frac{1}{M}$ ), wówczas obowiązuje zasada minimum odległości: poszukuje się symbolu najbliższego (w sensie odległości euklidesowej) odebranemu sygnałowi  $v(t)$ . Dla  $M=4$  – wartościowej modulacji i sygnałów reprezentowanych przez  $N=2$  próbki pokazano to na rys. 42. Granice obszarów decyzyjnych przebiegają w równej odległości od najbliższych punktów reprezentujących niezaszumione symbole.



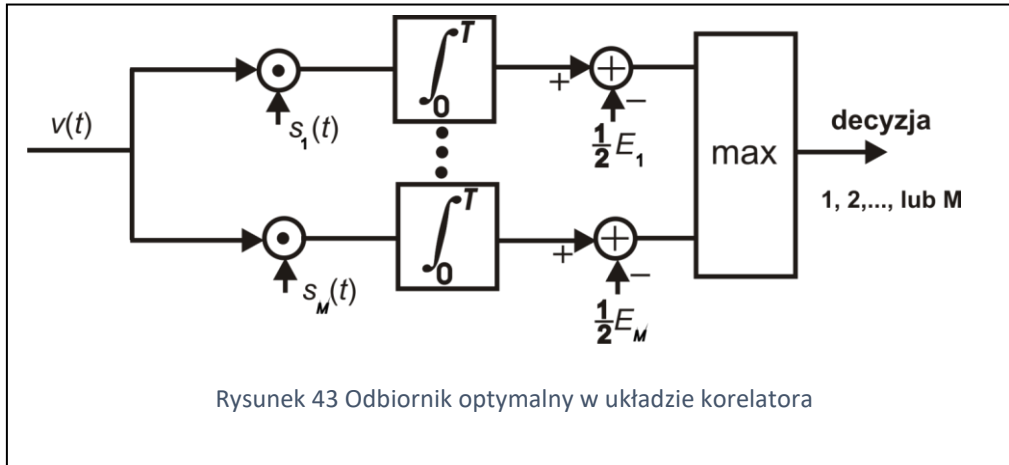
Zasada minimum odległości prowadzi również do innej równoważnej struktury odbiornika optymalnego – do korelatora. Przetwarzając sygnały ciągłe, wygodniej jest sformułować tę zasadę w następujący sposób:

$$\min \|v - s_i\|^2 \rightarrow \min \int_0^T [v(t) - s_i(t)]^2 dt \quad (48)$$

Minimalizację wyrażenia  $\int_0^T v^2(t)dt - 2 \int_0^T v(t)s_i(t)dt + \int_0^T [s_i(t)]^2 dt$  można zastąpić maksymalizacją wyrażenia o przeciwnym znaku. Po usunięciu pierwszej całki (nie zależy ona od symbolu) i podzieleniu przez 2 otrzymujemy regułę decyzyjną:

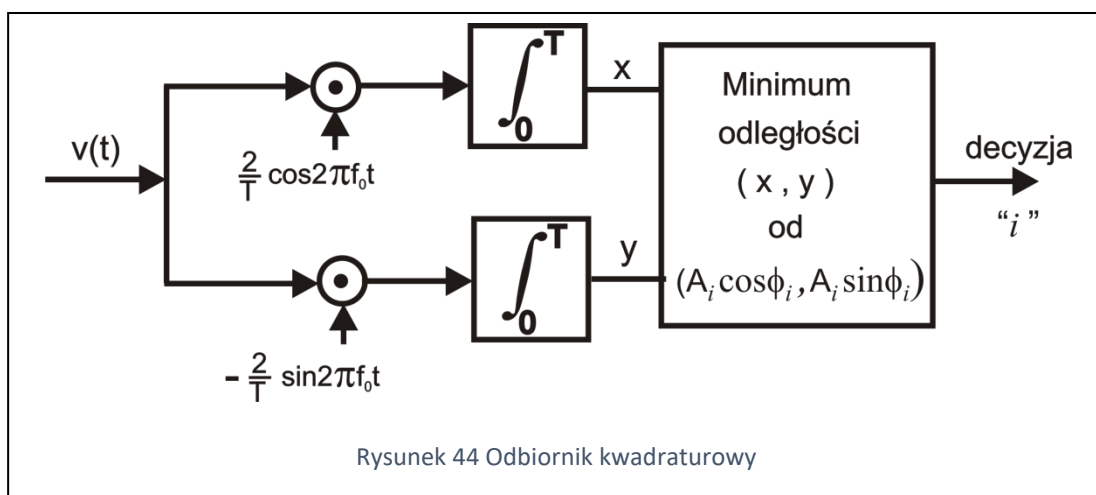
$$\max \left\{ \int_0^T v(t)s_i(t)dt - \frac{1}{2}E_i \right\} \quad (49)$$

Jej implementacja jest identyczna jak dla modulacji binarnej – porównaj rys. 36 i rys.43.



Powiększenie wartościowości prowadzi do szybszej transmisji, jednak czyni modulację bardziej wrażliwą na szumy w kanale. Można się o tym przekonać, wykonując ćwiczenie 5: transmisja cyfrowa – modulacje cyfrowe.

Wartościowość modulacji może sięgać kilkudziesięciu (rys.30) a nawet kilkuset, szczególnie w przypadku modulacji QAM i AM-PM. Odbiornik z rys.43 musiałby wówczas zawierać wielką liczbę elementarnych układów korelujących. Dla sygnałów typu PSK, QAM, AM-PM, opisanych wzorem (32):  $s_i(t) = A_i \cos(2\pi f_0 t + \varphi_i)$  liczbę korelatorów można zredukować do dwóch. Taki odbiornik nazywa się odbiornikiem kwadraturowym (rys.44). Jest on równoważny układowi korelatora w tym sensie, że dla tych samych sygnałów wejściowych zwraca te same decyzje. Odbiornik kwadraturowy oblicza korelacje sygnału wejściowego z ortogonalną parą sygnałów  $\cos$  i  $(-\sin)$ . Gdyby nie było szumu, to otrzymana para korelacji  $(x,y)$  stanowiłaby współrzędne punktu konstelacji, opisującego odebrany sygnał:  $(x, y) = (A_i \cos \varphi_i, A_i \sin \varphi_i)$  – rys.28. Pokażmy, że  $x = A_i \cos \varphi_i$ .



Na wejście podajemy i-ty symbol bez szumu:  $v(i) = A_i \cos(2\pi f_0 t + \varphi_i)$ . Po pomnożeniu przez  $\frac{2}{T} \cos(2\pi f_0 t)$  otrzymamy, stosując wzór  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$  :

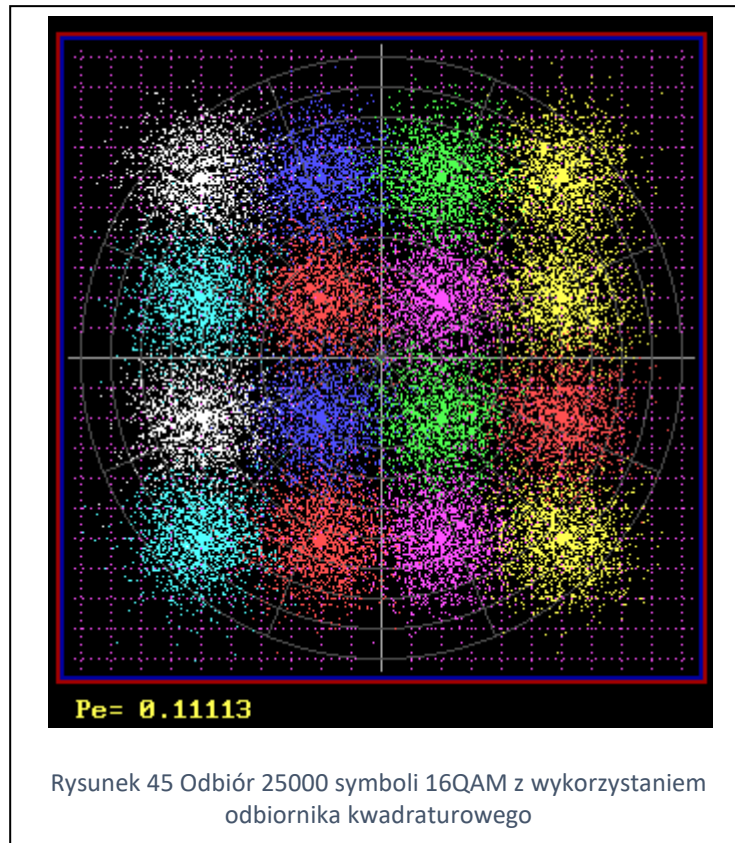
$$\begin{aligned} v(t) \frac{2}{T} \cos(2\pi f_0 t) &= \frac{2A_i}{T} \{ \cos(2\pi f_0 t + \varphi_i) \cos(2\pi f_0 t) \} = \\ &= \frac{2A_i}{T} \frac{1}{2} \{ \cos \varphi_i + \cos(4\pi f_0 t + \varphi_i) \} = \frac{A_i}{T} \cos \varphi_i + \frac{A_i}{T} \cos(4\pi f_0 t + \varphi_i) \end{aligned}$$

Całkując sygnał o wartości stałej :  $A_i/T \cos(\varphi_i)$ , otrzymamy  $A_i \cos(\varphi_i)$ . Jeśli w przedziale czasu 0-T znajduje się całkowita liczba okresów sygnału  $\cos(4\pi f_0 t)$ , wówczas całka z tego sygnału jest równa zero. Ostatecznie otrzymujemy

$$x = \int_0^T v(t) \frac{2}{T} \cos(2\pi f_0 t) dt = \int_0^T \frac{A_i}{T} \cos(\varphi_i) dt + 0 = A_i \cos \varphi_i$$

W podobny sposób można pokazać, że  $y = A_i \sin \varphi_i$ . Gdy na wejście podamy symbol z szumem, otrzymamy parę korelacji  $x, y$ , czyli zmierzone z błędem współrzędne punktu konstelacji odebranego symbolu. Należy teraz obliczyć odległość euklidesową od punktu  $(x,y)$  do wszystkich punktów konstelacji stosowanej modulacji, wybrać najmniejszą odległość i podjąć decyzję.

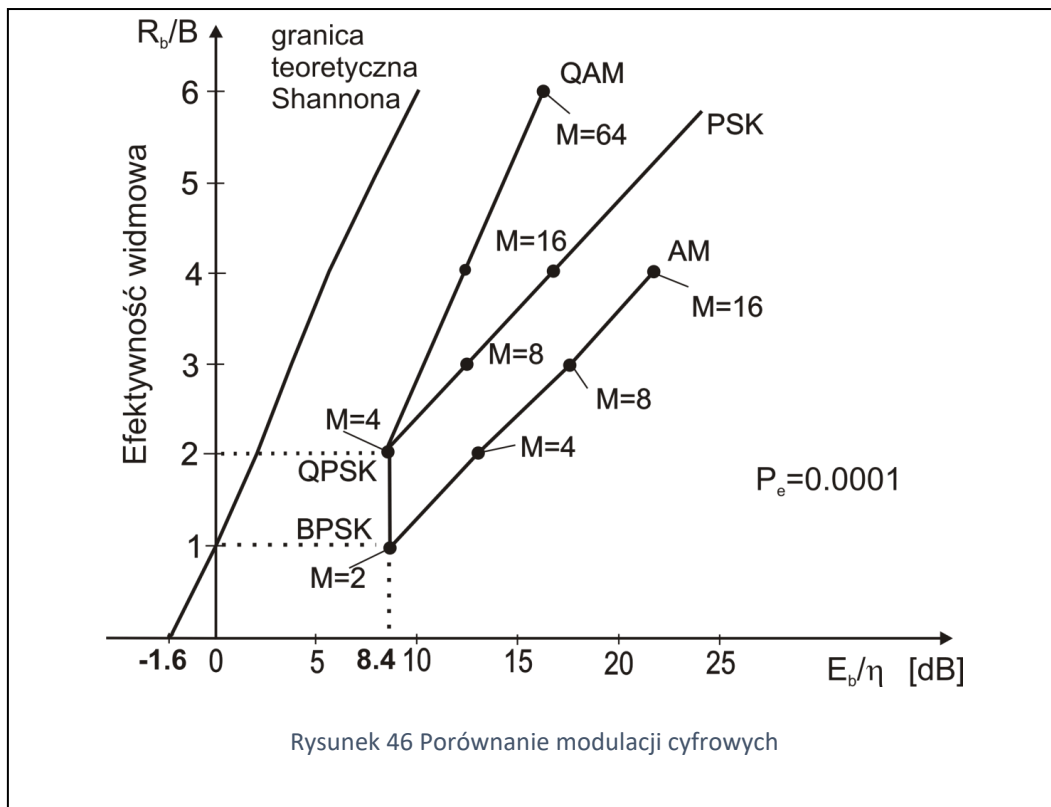
Na rys.45 pokazano wyniki pomiaru  $(x,y)$  dla 25000 symboli modulacji 16QAM. Przy silnym szumie(SNR=6 dB) odbiornik optymalny nie działa prawidłowo – stopa błędów przekracza 0.1.



Stopa błędów odbiornika optymalnego modulacji wielowartościowej zależy od wartościowości modulacji (in większa wartościowość, tym trudniej wybrać właściwy symbol), konstelacji punktów i szumu. Konstelacja pokazana na rys 45 dość równomiernie wypełnia płaszczyznę, można jednak znaleźć lepszą (patrz ćwiczenie symulacyjne nr 5). Porównując modulacje, należy też wziąć pod uwagę pasmo i efektywność widmową. Na rys.46 porównano szereg modulacji, notując efektywność widmową i SNR na wyjściu kanału przy ustalonej stopie błędów 0.0001. Obniżenie dopuszczalnej stopy błędów w niewielkim stopniu wpływa na wyniki. SNR wyrażono jako stosunek energii przypadającej na 1 bit do gęstości mocy szumu na wyjściu kanału (28). Zbadano następujące modulacje:

- Modulacje amplitudy AM (zwane też ASK – Amplitude Shift Keying). Wszystkie punkty konstelacji leżą na prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych. Dopuszcza się rozmieszczanie punktów po obu stronach początku układu.
- Modulacje fazy (kluczowanie fazy - PSK – Phase Shift Keying). Wszystkie symbole mają tę samą amplitudę, punkty konstelacji leżą więc na okręgu.
- QAM (Quadrature Amplitude Modulation)–rys.30.

Modulacje wielowartościowe oferują lepszą efektywność widmową, ale wymagają lepszego kanału (wyższe wartości SNR). QAM jest bardziej odporna na szumy w kanale niż ASK i PSK, dzięki wykorzystaniu różnych amplitud i faz swoich konstelacjach. Nie jest możliwe jednoczesne osiągnięcie wysokiej efektywności widmowej i odporności na szum w kanale. Na lewo od krzywej oznaczonej jako granica Shannona nie istnieje żadna modulacja. Jeśli stosunek energii na bit do gęstości mocy szumu jest niższy niż  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (czyli -1.505 dB), wówczas transmisja z niską stopą błędów w ogóle nie jest możliwa. O granicznych parametrach transmisji będzie mowa w końcowej części tego modułu.

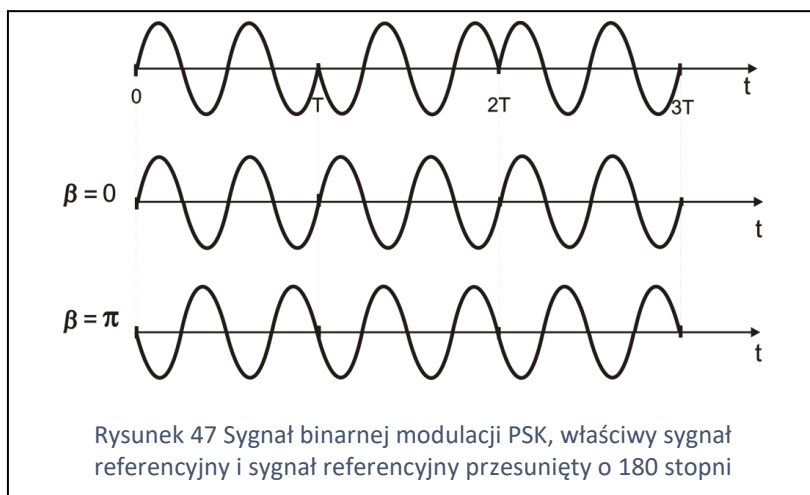


### 3.5 Modulacja DPSK

Optymalne odbiorniki modулacji PSK są odbiornikami koherentnymi – wymagają dokładnego odtworzenia sygnałów referencyjnych (w odbiorniku kwadraturowym są to sygnały  $\cos(2\pi f_0 t)$  i  $-\sin(2\pi f_0 t)$  zsynchronizowane fazowo z sygnałem  $v(t)$  docierającym do odbiornika). Synchronizację najczęściej osiąga się przed rozpoczęciem transmisji danych. W przypadku jej utraty można ją odzyskać śledząc ciąg odebranych symboli. Załóżmy, że w dwuwartościowej (binarnej) modулacji PSK odbierane są symbole  $\pm \sin(2\pi f_0 t)$ , rys.47. Synchronizator może zacząć śledzić jeden z tych dwóch sygnałów. W przypadku gdy jest to sygnał niewłaściwy, wszystkie decyzje odbiornika będą błędne. Aby temu zapobiec, koduje się kolejne bity nie bezpośrednio w fazie, ale w różnicy faz dwóch sąsiednich sygnałów. Np. zachowanie tej samej fazy początkowej oznacza logiczne 1, a przesunięcie fazy o 180 stopni - logiczne 0. W ten sposób zdefiniowaliśmy dwuwartościową



różnicową modulację fazy (DPSK – Differential Phase Shift Keying). W modulacji DPSK, nawet przy błędnej fazie sygnału referencyjnego, jesteśmy w stanie wykryć, czy w odbieranym sygnale wystąpiło, czy nie wystąpiło przesunięcie fazy.



Odbiornik DPSK może być zrealizowany jako **odbiornik koherentny lub niekoherentny**. Odbiornik koherentny odtwarza sygnał referencyjny (właściwy lub przesunięty), rozpoznaje kolejne sygnały  $\pm \sin(2\pi f_0 t)$  i porównuje dwie kolejne decyzje: jeśli są identyczne to wyprowadza wartość logiczna 1 a jeśli przeciwne – wyprowadza 0. W pierwszym etapie działa tak, jak odbiornik PSK. Gdyby nie było szumu w kanale, to rozpoznawałby wszystkie sygnały właściwie lub wszystkie niewłaściwie. Porównywanie dwóch kolejnych decyzji pozwoliłoby na bezbłędny odbiór w systemie DPSK. Gdy w kanale jest szum, wówczas rozpoznawanie kolejnych sygnałów odbywa się z błędem, którego prawdopodobieństwo podano we wzorze (45):  $P_e^{PSK} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{ST}{\eta}}\right)$ . Pojedynczy, izolowany błąd doprowadzi do powstania dwóch błędów w systemie DPSK, ponieważ błędna decyzja będzie porównana z poprzednią i z następną. Dokładny wzór na stopę błędów koherentnego odbiornika DPSK otrzymamy, biorąc pod uwagę dwa zdarzenia, które do tego błędu prowadzą:

1. Pierwszy z porównywanych sygnałów jest rozpoznany dobrze, a drugi źle. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi  $(1 - P_e^{PSK})P_e^{PSK}$
2. Pierwszy z porównywanych sygnałów jest rozpoznany źle, a drugi dobrze. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi  $P_e^{PSK}(1 - P_e^{PSK})$

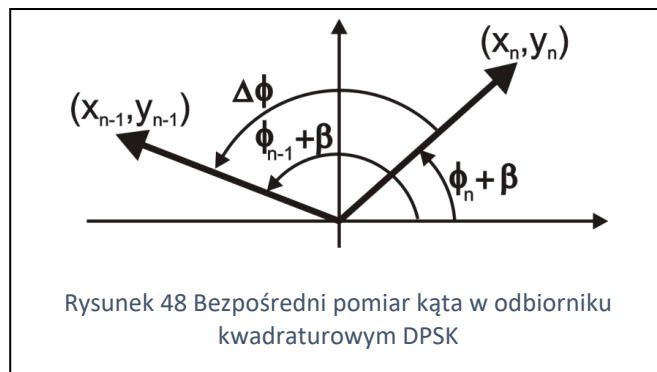
Pozostałe przypadki, tzn. dwa sygnały rozpoznane źle i dwa sygnały rozpoznane dobrze – nie prowadzą do błędu w systemie DPSK.

Ostatecznie otrzymujemy prawdopodobieństwo błędu koherentnego odbiornika DPSK:

$$P_e^{DPSK} = 2P_e^{PSK}(1 - P_e^{PSK}) \approx 2P_e^{PSK} = \operatorname{erfc}\sqrt{\frac{ST}{\eta}} \quad (50)$$

Odbiornik niekoherentny mierzy bezpośrednio przesunięcie fazowe dwóch sąsiednich sygnałów. Może być zrealizowany jako odbiornik kwadraturowy. Błąd fazowy  $\beta$  w odtworzeniu sygnałów referencyjnych powoduje rotację odebranych punktów (x,y), co nie przeszkadza w prawidłowym pomiarze kąta  $\Delta\phi$  między kolejnymi sygnałami – rys.48. Bezpośredni pomiar kąta jest jednak obciążony większym błędem niż błąd rozpoznawania jednego z dwóch sygnałów. Skutkiem tego jest większa stopa błędów odbiornika niekoherentnego niż koherentnego:

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{\eta}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{ST}{\eta}} \quad (51)$$

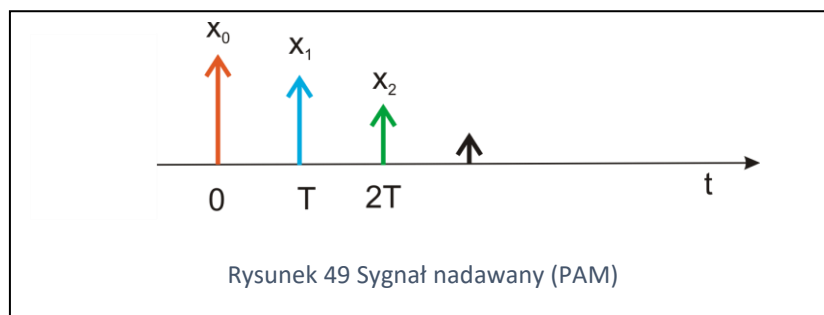


Ćwiczenie symulacyjne nr 5 pozwoli Państwu na porównanie modulacji PSK, oraz DPSK z odbiorem koherentnym i niekoherentnym.

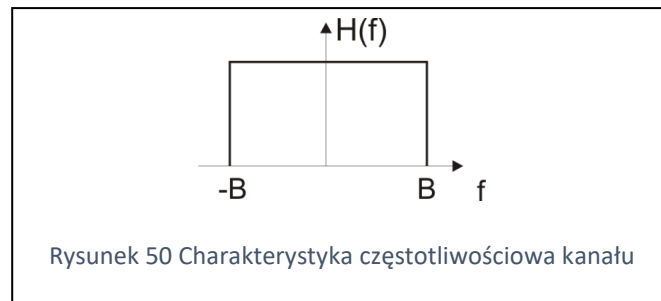
## 4 Graniczne parametry transmisyjne

W p.2.1 zostały sformułowane kryteria jakości transmisji cyfrowej. Pożądane byłoby wąskie pasmo zmodulowanego sygnału, a jednocześnie duża szybkość modulacji (liczba symboli transmitowanych w ciągu sekundy). Niestety są to wymagania sprzeczne: symbole o krótkim czasie trwania mają szersze pasmo (rys.8, Moduł 1). Pożądana byłaby duża przepływność binarna (liczba bitów na sekundę) i niska stopa błędów. Tu też jest sprzeczność - ze wzoru 45 dla kodu bipolarnego wynika, że krótki czas przeznaczony na transmisję bitu ( $T$ ) prowadzi do wzrostu prawdopodobieństwa błędnego odbioru. Cenna byłaby duża efektywność widmowa, ale jest ona osiągalna tylko przy wysokim stosunku mocy sygnału do szumu w kanale (rys.46). Poza tym, dążymy do jak największej odporności na szumy w kanale, czyli jak najwyższej jakości odtworzonej po stronie odbiorczej mowy czy muzyki (maksimum  $SNR_0$ ) przy danym stosunku mocy sygnału do szumu na wyjściu kanału ( $SNR$ ).

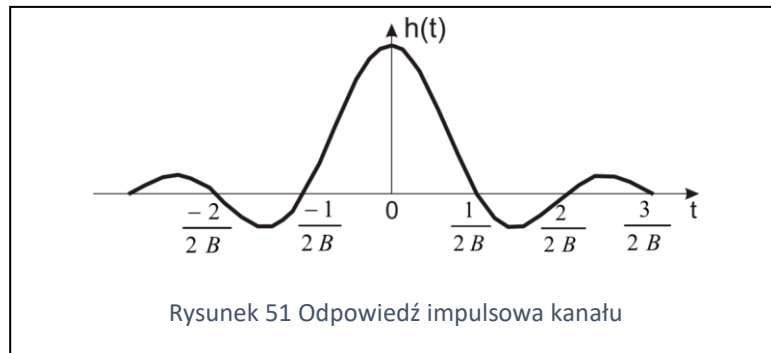
Rozpatrzmy dokładniej wymienione problemy, zaczynając od **szybkości modulacji** (liczba symboli na sekundę). Niech nadawane symbole mają postać krótkich impulsów (rys.49). Przesyłana informacja jest zakodowana w ich amplitudach :  $x_0, x_1, x_2 \dots$ . Jest to tzw. PAM (pulse amplitude modulation). Impulsy są nadawane co  $T$  sekund (w praktyce będą to mikro- lub nanosekundy). Stosując odpowiedni filtr, można tym impulsom nadać dowolny kształt, pod warunkiem nieprzekraczania czasu trwania równego  $T$ .



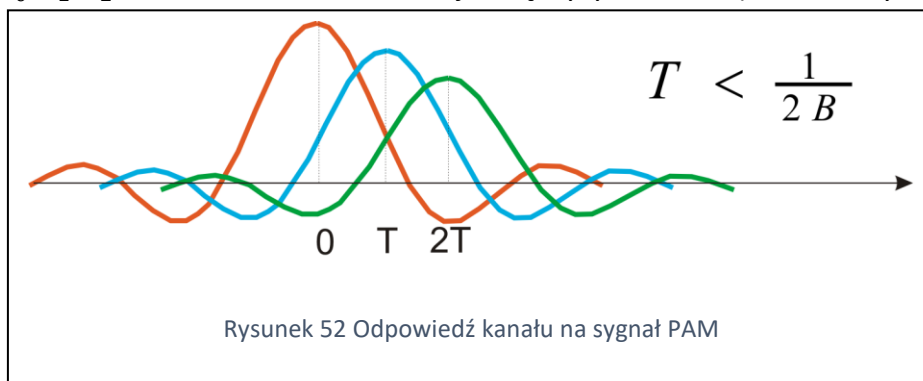
Kanał transmisyjny jest dolnopasmowy o paśmie  $B$  [Hz]. Modelem kanału jest filtr idealny o charakterystyce częstotliwościowej podanej na rys.50.



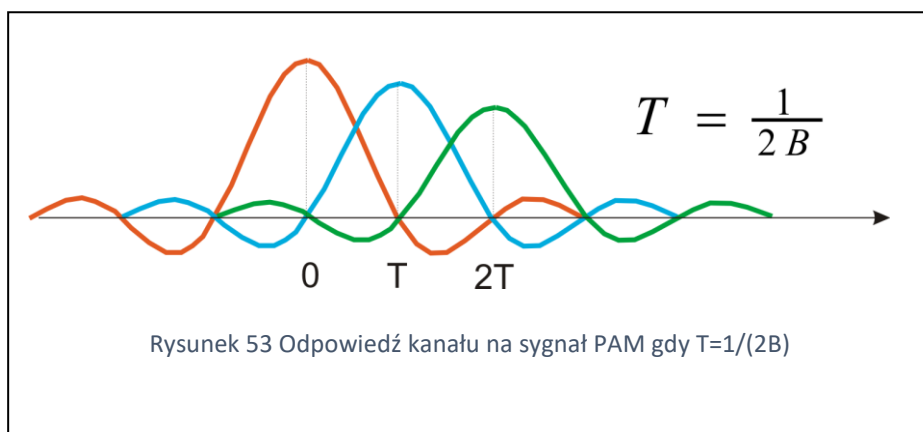
Odpowiedź impulsowa kanału jest odwrotną transformatą Fouriera charakterystyki częstotliwościowej (patrz zad.4, p.8.1, Moduł1).



Na rys.52 pokazano odpowiedź kanału na 3 impulsy z rys.49 (zachowano ten sam kolor impulsu i odpowiedzi kanału). Oczywiście na wyjściu kanału obserwujemy sumę tych sygnałów i w ogólnym przypadku nie można odczytać amplitud  $x_0, x_1, x_2 \dots$ . Jest to tzw. interferencja międzysymbolowa (ISI – Intersymbol Interference).



Interferencję międzysymbolową można zneutralizować, jeśli wykorzystana zostanie regularna przejścia przez zero odpowiedzi impulsowej kanału (rys.51). Nadając kolejne impulsy w momentach  $0, \frac{1}{2B}, \frac{2}{2B}, \frac{3}{2B} \dots$ , umożliwiamy idealną demultipleksację, gdyż w każdym z tych momentów nie zeruje się reakcja kanału tylko na jeden impuls (rys.53).



Nadając impulsy co  $1/(2B)$  sekund, transmitujemy  $2B$  symboli na sekundę. W ten sposób otrzymujemy **Twierdzenie Nyquista o szybkości modulacji**: W kanale o paśmie  $B$  [Hz] można przesyłać do  $2B$  impulsów (symboli) na sekundę bez interferencji międzysymbolowej.

W twierdzeniu Nyquista nie mówi się nic o szumie w kanale i błędach w transmisji. Gdy nie ma szumu w kanale, wówczas można transmitować (oczywiście w teorii, nie w praktyce) impulsy o nieskończonej liczbie różnych amplitud. Wówczas nawet jeden impuls może przenieść nieskończoną ilość informacji.

Szum w kanale istnieje zawsze, w związku z tym rozpatrzmy problem jego wpływu na stopę błędów w transmisji. Weźmy dla przykładu wzór na stopę błędów w kodzie bipolarnym (45):  $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{ST}{\eta}}\right)$ . Czy można otrzymać stopę błędów dowolnie bliską zeru? Teoretycznie jest to możliwe, gdy  $\frac{ST}{\eta} \rightarrow \infty$ , a więc nieograniczonej mocy nadajnika lub nieskończenie długim symbolem, a więc szybkości transmisji dążącej do zera. W swoich pracach opublikowanych w połowie XX w. Claude Shannon wykazał, że można jednak uczynić stopę błędów dowolnie bliską zeru, jeśli rozpoznawać będziemy całą przesłaną wiadomość a nie pojedyncze symbole. Ideę Shannona realizuje się w praktyce, tworząc kody zabezpieczające przed błędami, wymagające opóźnionej decyzji [2].

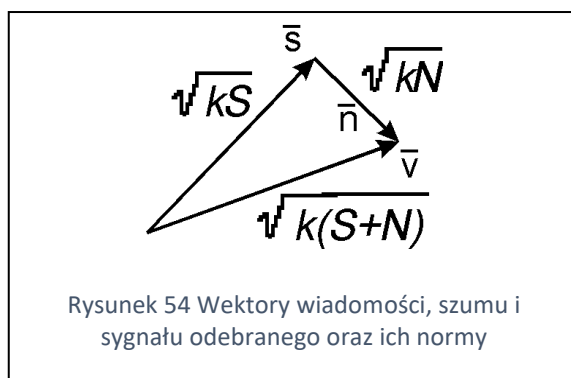
Jakie warunki muszą być spełnione, aby udało się zredukować stopę błędów do wartości bliskiej zeru?

Założmy że nadajemy pewną wiadomość składającą się z dużej liczby ( $k$ ) impulsów:  $s_1, s_2, \dots, s_k$ . Potrzebny nam będzie nadajnik o mocy  $S = E(s_i^2)$ . Kanał ma pasmo  $B$  i charakterystykę częstotliwościową jak na rys.50. Aby zneutralizować interferencje międzysymbolowe, impulsy nadajemy co  $1/(2B)$ , czyli przesyłamy  $2B$  impulsów na sekundę. Na wyjściu kanału obserwujemy sygnał użyteczny  $s(t)$  jak na rys.53 i szum  $n(t)$  o mocy  $N = \eta B$ . Ich suma to sygnał  $v(t)=s(t)+n(t)$ , który podajemy na wejście odbiornika. Pasma tego sygnału wynosi  $B$ , więc można przeprowadzić jego pomiar, pobierając  $2B$  próbek na sekundę (twierdzenie o próbkowaniu). Jednocześnie mamy  $2B$  impulsów na sekundę, więc wystarczy jedna próbka na nadany impuls. Cała wiadomość zawiera zatem  $k$  próbek, a jej transmisja trwa  $k/(2B)$  sekund.

Tak więc wiadomość możemy przedstawić w postaci  $k$ -wymiarowego wektora  $\bar{s} = s_1, s_2, \dots, s_k$ , a szum w postaci wektora  $\bar{n} = n_1, n_2, \dots, n_k$ . Sygnał odebrany z szumem to wektor  $\bar{v} = \bar{s} + \bar{n}$ .

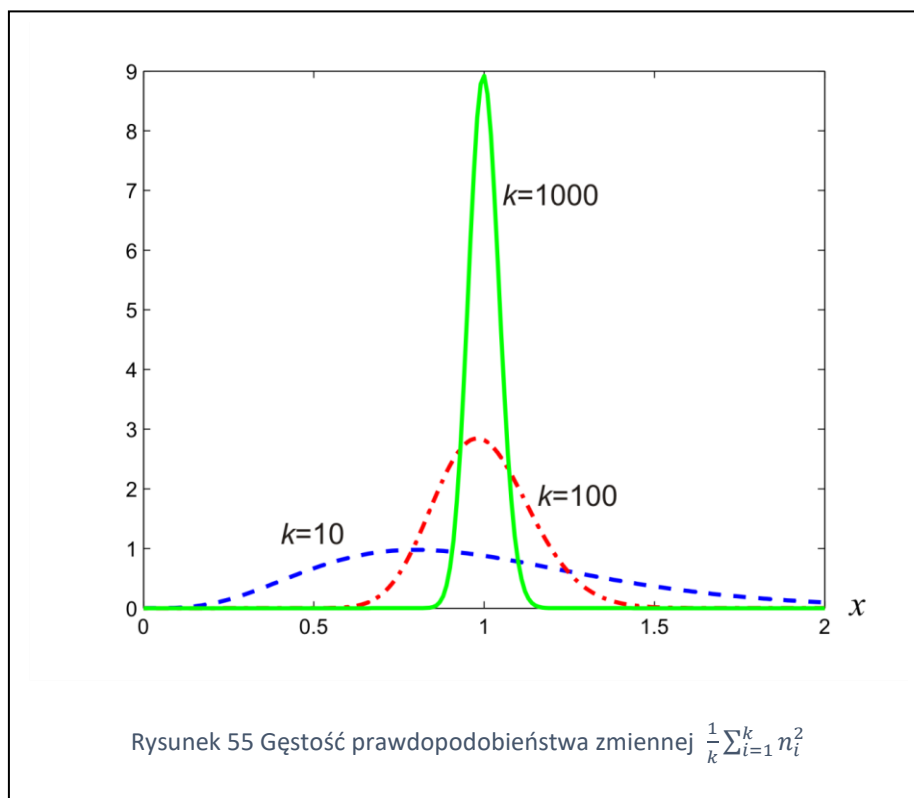
Typowa wiadomość wykorzystuje całą moc nadajnika, czyli  $S \approx \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (s_i)^2 = \frac{1}{k} \|\bar{s}\|^2$ . Stąd kwadrat normy wektora  $\bar{s}$  można oszacować jako  $\|\bar{s}\|^2 \approx kS$ . Tak więc wektory wiadomości leżą w odległości zbliżonej do  $\sqrt{kS}$  od początku układu współrzędnych.

Moc szumu można oszacować jako  $N \approx \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (n_i)^2 = \frac{1}{k} \|\bar{n}\|^2$ . Oszacowanie jest tym dokładniejsze, im większe  $k$ . Stąd  $\|\bar{n}\|^2 = \sum_{i=1}^k (n_i)^2 \approx kN$ . Wektory szumu leżą przy powierzchni kuli o promieniu  $\sqrt{kN}$ . Rysunek 54 to rysunek poglądowy przedstawiający wektory wiadomości, szumu i sygnału odebranego.

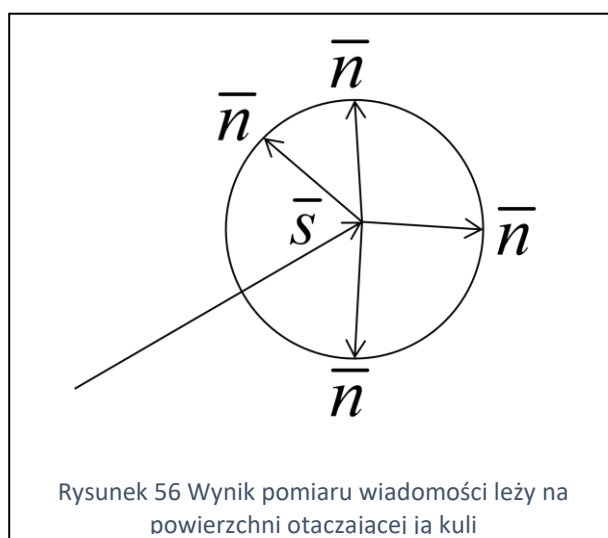


Istotne znaczenie ma norma wektora szumu w przestrzeni wysokowymiarowej. Zmienna losowa  $\|\bar{n}\|^2 = \sum_{i=1}^k (n_i)^2$  ma rozkład chi kwadrat o  $k$  stopniach swobody, gdyż próbki szumu to nieskorelowane zmienne o

rozkładzie gaussowskim [2]. Na rys.55 pokazano rozkłady znormalizowanej zmiennej  $\frac{1}{k} \|\bar{n}\|^2$  dla różnych wartości  $k$ . Wariancja szumu wynisi 1. Norma wielowymiarowych wektorów szumu dąży do wartości stałej.



Ta obserwacja ma znaczenie kluczowe. Wskazuje ona, że nadając pewną wiadomość  $\bar{s}$ , odbierzemy wektor leżący przy powierzchni kuli o promieniu  $\sqrt{kN}$  i środka w punkcie  $\bar{s}$  – rys.56.



W odbiorze stosujemy zasadę minimum odległości. Jeśli zatem transmitowane wiadomości będą leżały dostatecznie daleko od siebie, to otaczające je kule szumu nie zetkną się. Każdy wynik pomiaru leżący na powierzchni kuli wskaże nam środek kuli jako najbliższą wiadomość i będzie to decyzja nieobciążona błędem. Tak więc możliwa jest bezbłędna transmisja wiadomości pod warunkiem że będą długie (duża wartość  $k$ ).

Pozostaje problem, ile takich niezachodzących na siebie kul szumu można rozmieścić. Jesteśmy ograniczeni mocą nadajnika. Sygnał odebrany  $v(t)=s(t)+n(t)$  ma moc średnią  $S+N$ , a więc wektory sygnałów odebranych  $\bar{v} = \bar{s} + \bar{n}$  leżą w odległości około  $\sqrt{kS + kN}$  od początku układu współrzędnych. Wewnątrz kuli o promieniu  $R = \sqrt{kS + kN}$  musimy rozmieścić kule szumu o promieniu  $r = \sqrt{kN}$ . Ile takich kul można rozmieścić? Tyle, ile wynosi ich stosunek objętości, a więc  $\left[\frac{R}{r}\right]^k = \left[\frac{S+N}{N}\right]^{k/2} = \left[1 + \frac{S}{N}\right]^{k/2}$ . Tyle różnych wiadomości można odebrać bezbłędnie. Oznacza to bezbłędne przesłanie  $\log_2 \left[1 + \frac{S}{N}\right]^{k/2} = \frac{k}{2} \log_2 \left[1 + \frac{S}{N}\right]$  bitów.

Transmisja całej wiadomości trwa  $\frac{k}{2B}$  sekund, a więc w ciągu sekundy wysyłamy (bez interferencji międzysymbolowych)  $C = \frac{2B}{k} \frac{k}{2} \log_2 \left[ 1 + \frac{S}{N} \right] = B \log_2 \left[ 1 + \frac{S}{N} \right]$  bitów. W sposób uproszczony pokazaliśmy uzasadnienie bardzo ważnego twierdzenia w telekomunikacji:

### Tw. Shannona o przepustowości kanału

W kanale o szerokości pasma  $B$ , przy stosunku mocy sygnału do szumu na wyjściu kanału równym  $\frac{S}{N} = \frac{S}{\eta B}$  można przesyłać z dowolnie niską stopą błędów

$$C = B \log_2 \left[ 1 + \frac{S}{N} \right] = B \log_2 \left[ 1 + \frac{S}{\eta B} \right] \text{ bit/s} \quad (52)$$

Tę największą szybkość transmisji nazywa się **przepustowością kanału** (channel capacity). Im większy stosunek mocy sygnału do mocy szumu, tym większa przepustowość. Kanał bez szumu ma przepustowość nieskończoną, gdyż jesteśmy w stanie bezbłędnie rozpoznać nieskończoną liczbę różnych sygnałów.

$$\text{Gdy } \frac{S}{N} \rightarrow \infty \text{ to } C \rightarrow \infty \quad (53)$$

Ciekawszym problemem jest wpływ pasma na przepustowość kanału. Pasma  $B$  występuje we wzorze (52) dwukrotnie. Zmniejszając pasmo do zera, zmniejszamy szum na wyjściu kanału ( $N = \eta B$ ), ale maleje również liczba transmitowanych symboli (twierdzenie Nyquista). Stosując regułę de l'Hospitala można obliczyć granicę (pozostawiam to czytelnikowi jako ćwiczenie):

$$\text{Gdy } B \rightarrow 0 \text{ to } C \rightarrow 0 \quad (54)$$

Tak więc zmniejszanie pasma nie jest korzystne z punktu widzenia szybkości transmisji. Z drugiej strony, poszerzenie pasma zapewnia większą przepustowość kanału mimo większej mocy szumu:

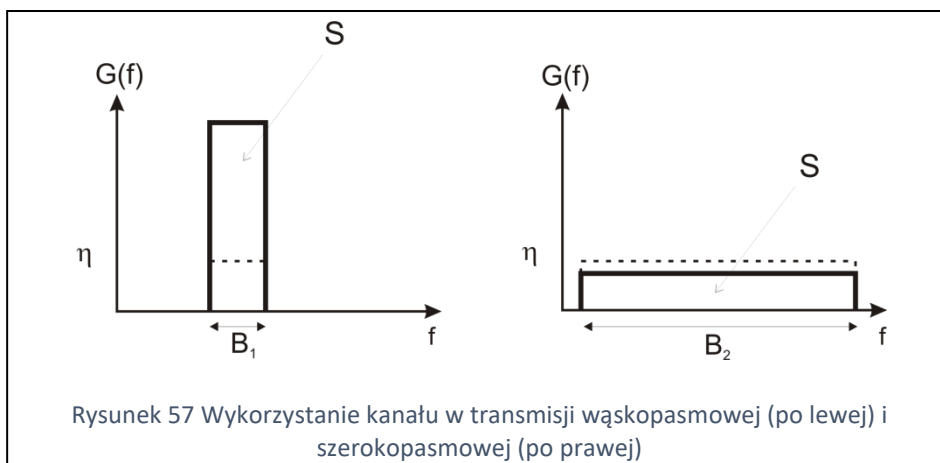
$$\text{Gdy } B \rightarrow \infty \text{ to } C = B \log_2 \left[ 1 + \frac{S}{\eta B} \right] = \frac{S}{\eta} \log_2 \left( 1 + \frac{S}{\eta B} \right)^{\frac{\eta B}{S}} = \frac{S}{\eta} \log_2 e \quad (55)$$

gdź  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$

Pomimo że noc szumu dąży do nieskończoności ( $N = \eta B \rightarrow \infty$ ), kanał jest zdolny do bezbłędnej transmisji z maksymalną przepływnością określoną wzorem (55).

Porównajmy wąskopasmową (pasma  $B_1$  Hz) i szerokopasmową (pasma  $B_2$  Hz) transmisję w kanale, charakteryzującym się gęstością mocy szumu  $\eta$  W/Hz - rys.57. Mamy do dyspozycji nadajnik o mocy  $S$  watów i dwie możliwości:

1. Transmisja wąskopasmowa: wykorzystujemy wąskie pasmo  $B_1$  Hz aby otrzymać wysoki stosunek mocy sygnału do szumu  $SNR = \frac{S}{\eta B_1}$
2. Transmisja szerokopasmowa: wykorzystujemy szersze pasmo  $B_2 \gg B_1$  Hz



Rysunek 57 sugeruje, że bardziej odporna na szum jest transmisja wąskopasmowa, gdyż gęstość mocy sygnału jest większa niż gęstość mocy szumu. Z kolei w transmisji szerokopasmowej gęstość mocy sygnału znajduje się

poniżej gęstości mocy szumu. Wynika to z faktu, że oba prostokąty na rys.57 mają to samo pole równe mocy sygnału S.

Wrażenie to jest jednak fałszywe – **większą szybkość transmisji otrzymujemy w przypadku szerokopasmowym**. Proszę się o tym przekonać przeglądając rozwiązane zadanie 11.,p.5.1

Ważnym parametrem transmisyjnym jest **efektywność widmowa**. Mówi ona o tym, ile bitów na sekundę można przesłać w kanale o szerokości pasma 1 Hz. Przypomnijmy sobie oznaczenia:

$R_b$  – szybkość transmisji [bit/s],

$R_b/B$  – efektywność widmowa [bit/s/Hz]

$E_b$  – energia zużyta na transmisję 1 bitu [ $J=Ws$ ]

Załóżmy, że osiągnęliśmy graniczną szybkość transmisji równą przepustowości kanału:

$R_b = C = B \log_2 \left[ 1 + \frac{S}{N} \right] = B \log_2 \left[ 1 + \frac{E_b R_b}{\eta B} \right]$ . Przekształcając wzór Shannona (52) wykorzystaliśmy fakt, że moc sygnału S jest to energia na sekundę, czyli energia na bit ( $E_b$ ) razy liczba bitów na sekundę ( $R_b$ ).

Przekształcając dalej, otrzymuje się:  $\frac{R_b}{B} = \log_2 \left[ 1 + \frac{E_b R_b}{\eta B} \right]$  a w końcu

$$\frac{E_b}{\eta} = \frac{B}{R_b} \left[ 2^{\frac{R_b}{B}} - 1 \right] \quad (56)$$

Wzór (56) określa najmniejszą wartość SNR (wyrażoną jako stosunek energii na bit i gęstości mocy szumu) jaka jest niezbędna do zapewnienia bezbłędnej transmisji z efektywnością widmową  $R_b/B$ . Jest to granica Shannona przedstawiona na Rys. 46. Gdy pasmo kanału rośnie do nieskończoności, wówczas efektywność widmowa maleje do zera. Graniczna wartość SNR wynosi w tej sytuacji  $\ln(2)$ , czyli około -1.6 dB:

$$\text{Gdy } B \rightarrow \infty \text{ to } \frac{E_b}{\eta} \rightarrow \ln(2) \quad (57)$$

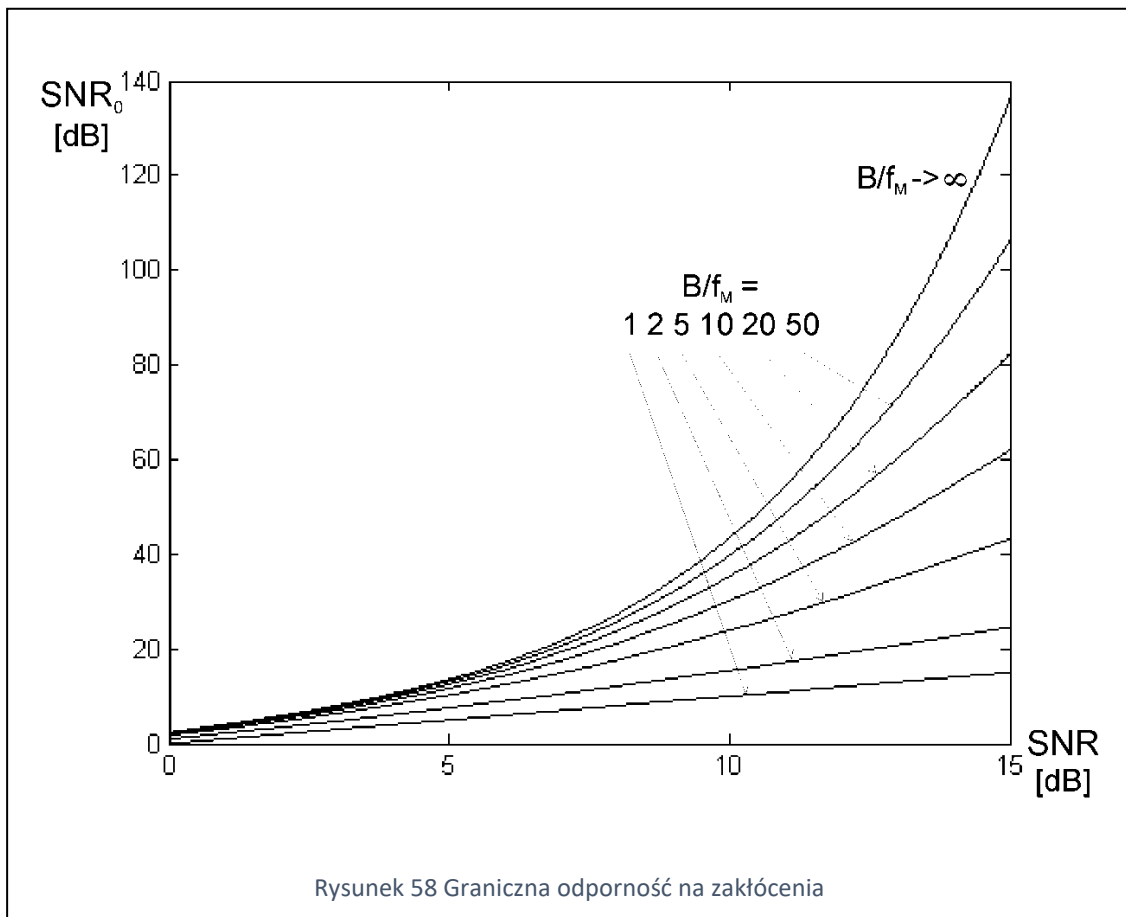
Przy niższych wartościach SNR nie może być mowy o bezbłędnej transmisji.

Z twierdzeniem Shannona o przepustowości kanału wiąże się **graniczna odporność na zakłócenia**. Przypominamy że chodzi o zależność wartości SNR na wyjściu odbiornika od wartości SNR na wyjściu kanału:  $SNR_0 = f(SNR)$ . Pożądana byłaby jak najwyższa jakość sygnału na wyjściu odbiornika (np. mowy czy muzyki) przy niskiej jakości sygnału na jego wejściu:  $SNR_0 \gg SNR$ . Niestety, istnieje graniczna wartość odporności na zakłócenia, która wyraża się wzorem:

$$SNR_0 \leq \left[ 1 + \frac{f_M}{B} SNR \right]^{\frac{B}{f_M}} - 1 \quad (58)$$

Parametrem jest tu **współczynnik poszerzenia pasma**  $B/f_M$  czyli pasmo sygnału zmodulowanego przez pasmo sygnału modulującego (np. sygnału mowy). We wzorze (58) stosunek mocy sygnału do szumu w kanale jest zdefiniowany następująco:  $SNR = \frac{S}{N} = \frac{S}{\eta f_M}$ . Jako moc szumu w kanale przyjęto moc szumu przypadającą na pasmo sygnału przed modulacją.

Rodzinę funkcji opisaną wzorem (58) pokazano na rys.58. Wąskopasmowe modulacje nieposzerzające pasma ( $B=f_M$ ) mają niską odporność na szum w kanale ( $SNR_0=SNR$ ). Im szersze pasmo, tym większa odporność. Nie wzrasta ona jednak do nieskończoności, nawet przy nieograniczonym paśmie istnieje krzywa graniczna – rys.58. Ograniczenie SNR sygnału wyjściowego (np. muzyki transmitowanej bezprzewodowo) odnosi się do każdej transmisji – nawet analogowej. Potwierdza to analiza porównawcza modulacji AM i FM. Szerokopasmowa modulacja FM jest bardziej odporna na szumy w kanale.



Wzór (58) można wyprowadzić z twierdzenia Shannona o przepustowości kanału.

Graniczna szybkość transmisji w kanale:

$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{\eta B} \right) = B \log_2 \left( 1 + \frac{f_M S}{B \eta f_M} \right) = B \log_2 \left( 1 + \frac{f_M}{B} SNR \right).$$

Szybkość transmisji na wyjściu odbiornika:  $C_0 = f_M \log_2 (1 + SNR_0)$ .

Liczba bitów na wyjściu odbiornika nie może być większa niż na jego wejściu, gdyż odbiornik nie jest źródłem informacji, on tylko przetwarza otrzymaną informację:  $C_0 \leq C$ . Przepisując tę nierówność otrzymujemy kolejno:

$$\log_2 (1 + SNR_0) \leq \frac{B}{f_M} \log_2 \left( 1 + \frac{f_M}{B} SNR \right)$$

$$\log_2 (1 + SNR_0) \leq \log_2 \left( 1 + \frac{f_M}{B} SNR \right)^{\frac{B}{f_M}}$$

$$1 + SNR_0 \leq \left( 1 + \frac{f_M}{B} SNR \right)^{\frac{B}{f_M}}$$

$$SNR_0 \leq \left( 1 + \frac{f_M}{B} SNR \right)^{\frac{B}{f_M}} - 1$$

Ostatnia postać jest identyczna ze wzorem (58).

## 5 Zadania i testy

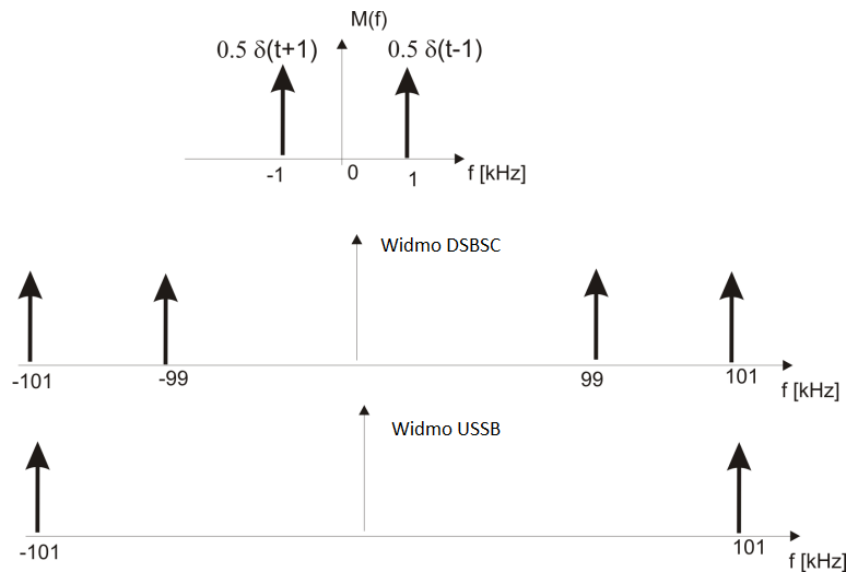
### 5.1 Przykładowe zadania z rozwiązaniami

1.

Sygnal modulujący  $m(t) = \cos(2 \pi f_m t)$ ,  $f_m = 1$  kHz, podano na wejście modulatora górnowiąstęgowej modulacji amplitudy (USSB). Częstotliwość fali nośnej  $f_0 = 100$  kHz. Naszkicuj widmo sygnału zmodulowanego, zakładając, że fala nośna jest wytłumiona. Jaki jest przebieg czasowy sygnału zmodulowanego?

**Rozwiązanie:**





Sygnal USB jest więc sygnałem harmonicznym o częstotliwości 101 kHz.

## 2.

Mamy dwa detektory: detektor obwiedni i detektor synchroniczny. Mamy też dwa sygnały zmodulowane: DSBSC

$$s_1(t) = m(t) \cos [2 \pi f_0 t]$$

i DSB

$$s_2(t) = [1+m(t)]\cos [2 \pi f_0 t], \quad |m(t)| < 1$$

gdzie  $m(t)$  – wolnozmienny sygnał modulujący (np. sygnał mowy),  $f_0$  – częstotliwość fali nośnej.

Wybierz odpowiedni detektor dla każdego z tych sygnałów. Uzasadnij wybór.

**Rozwiązanie:** Detektor synchroniczny może być zastosowany w obu przypadkach. Dla DSBSC otrzymamy na wyjściu  $\frac{1}{2}m(t)$ . – wzór (6). Po pomnożeniu sygnału DSB przez generowaną w odbiorniku nośną, otrzymamy

$$(1 + m(t))(\cos 2\pi f_0 t)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m(t) + \frac{1}{2}\cos 4\pi f_0 t + \frac{1}{2}m(t)\cos 4\pi f_0 t.$$

Po wytłumieniu wysokich częstotliwości filtrem dolnopasmowym, pozostanie składowa stała  $\frac{1}{2}$  i sygnał użyteczny  $\frac{1}{2}m(t)$ . Składowa stała nie jest zakłóceniem, zresztą bardzo łatwo ją wytłumić.

Detektor obwiedni nie nadaje się do odbioru sygnałów z wytłumioną nośną, a więc może być zastosowany tylko do odbioru sygnału DSB (rys.8). W przypadku DSBSC otrzymamy na wyjściu wartość bezwzględną sygnału modulującego  $|m(t)|$ , a więc sygnał bardzo zniekształcony (rys.2).

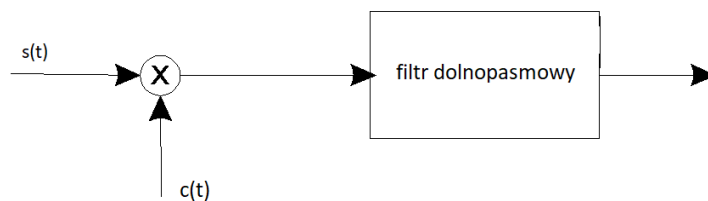
## 3.

Sygnal DSBSC  $s(t) = m(t) \cos [2 \pi f_0 t]$  podano na wejście odbiornika z detektorem synchronicznym (rys.)

Fala nośna jest generowana z błędem fazowym  $\phi$ :

$$c(t) = \cos [2 \pi f_0 t + \phi]$$

Oblicz sygnał na wyjściu odbiornika. Przy jakich wartościach  $\phi$  odbiór nie jest możliwy?



Wskazówka:  $\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$

**Rozwiązanie:** Na wyjściu układu mnożącego:

$$m(t) \cos 2\pi f_0 t \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} m(t) [\cos \varphi + \cos(4\pi f_0 t + \varphi)]$$

Na wyjściu filtra dolnopasmowego pozostanie sygnał użyteczny  $\frac{1}{2} m(t) \cos \varphi$ . Błąd fazowy zmniejszy amplitudę sygnału, obniży  $SNR_0$ , a przy błędzie fazowym równym 90 stopni sygnał wyjściowy zaniknie.

**4.**

Sygnał FM jest opisany wzorem:  $s(t) = 10 \cos [2 \pi 10^7 t + \beta \cos(2 \pi 10^3 t)]$

Pasmo B wynosi około 100 kHz. Znajdź następujące parametry :

- Moc średnią sygnału
- Częstotliwość fali nośnej
- Częstotliwość sygnału modulującego
- indeks modulacji  $\beta$
- (największą) dewiację częstotliwości

**Rozwiązanie:** Sygnał ma kształt cosinusoidalny, amplituda  $A=10$ , a więc moc średnia wynosi  $P = \frac{A^2}{2} = 50$  (Moduł1, p.2.2). Częstotliwość fali nośnej wynosi  $10^7$  Hz = 10 MHz. Częstotliwość sygnału modulującego  $f_m=10^3$  Hz = 1 kHz.

Indeks modulacji obliczymy z prawa Carsona (wzór 23). Otrzymujemy  $\beta=49$ . W końcu, ze wzoru (17) wyznaczamy dewiację częstotliwości  $\Delta F=49$  kHz.

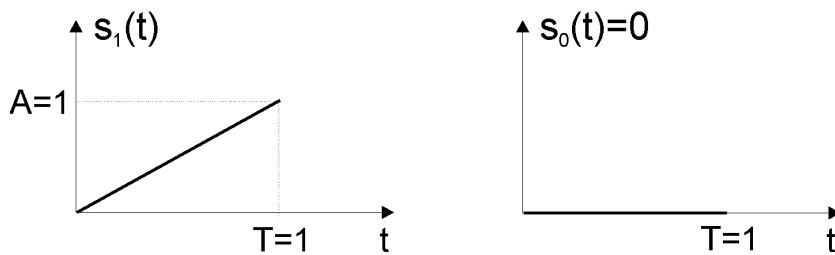
**5.**

Sygnał FM:  $s(t) = A \cos [2 \pi f_0 t + \beta \cos(2 \pi f_m t)]$  ma pasmo B około 100 kHz. Dewiacja częstotliwości wynosi 45 kHz. Oblicz częstotliwość sygnału modulującego ( $f_m$ ) i index modulacji  $\beta$ .

**Rozwiązanie:** Wykorzystamy prawo Carsona:  $B = 2(\beta + 1)f_m$  oraz zależność (17):  $\beta = \frac{\Delta F}{f_m}$ . Znajdujemy  $f_m=5$  kHz i  $\beta=9$ .

**6.**

Sygnały  $s_1(t)$  i  $s_0(t)$  są transmitowane z jednakowym prawdopodobieństwem ( $P_0=P_1=0.5$ ) i odebrane z szumem o gęstości mocy  $\eta$  [W/Hz]:



- Narysuj schemat odbiornika optymalnego
- Oblicz energie obu sygnałów
- Oblicz stopę błędów ( $P_e$ ), przyjmując gęstość mocy szumu w kanale  $\eta = 1/12$  [W/Hz]

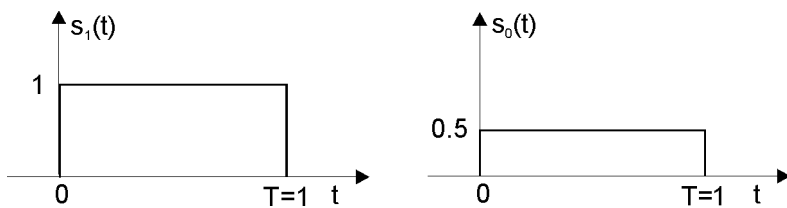
**Rozwiązanie:** Odbiornik optymalny jest pokazany na Rys.36, 37 lub 38. Dla odbiornika z rys.37 próg decyzyjny wynosi  $\frac{1}{2}[E_1 - E_0] = \frac{1}{6}$ , ponieważ energia  $E_0=0$  a energia pierwszego sygnału ( $s_1(t) = t$ ,  $0 \leq t < T$ ) jest równa:  $E_1 = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$ .

Sygnał różnicowy  $p(t) = s_1(t) - s_0(t) = s_1(t)$  a jego energia jest równa  $E_{10} = E_1 = \frac{1}{3}$ . Ostatecznie

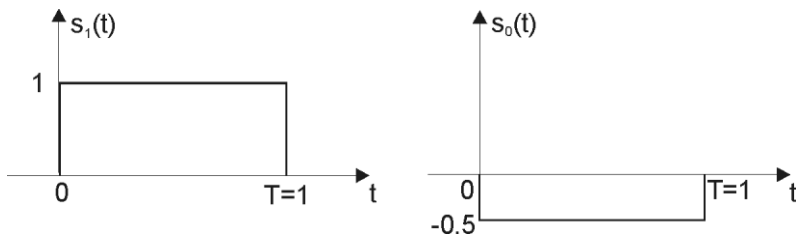
$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_{10}}{4\eta}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{1}{12\eta}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(1)$$

## 7.

Która para symboli transmisyjnych:  
pierwsza:



czy druga:



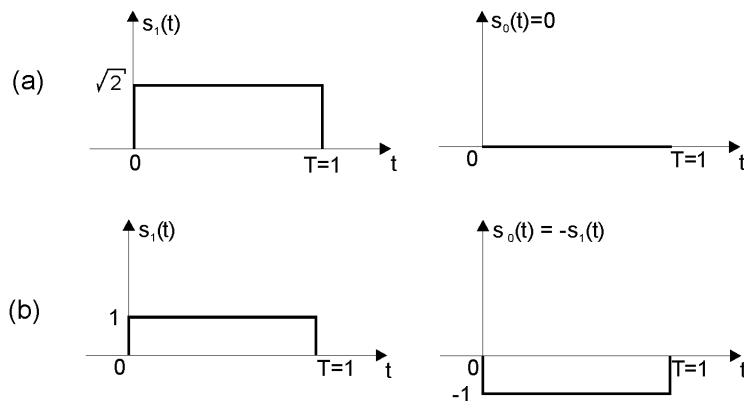
Jest bardziej odporna na szum w kanale? Odpowiedź uzasadnij przyjmując, że w obu przypadkach używamy odbiornika optymalnego.

**Rozwiązanie:** Im większa energia sygnału różnicowego tym mniej błędów w rozpoznaniu zaszumionych sygnałów. Szukamy więc największej wartości  $E_{10} = \int_0^T p^2(t) dt$ , gdzie  $p(t) = s_1(t) - s_0(t)$ .

Dla pierwszej pary  $p(t)=0.5$  i  $E_{10} = \frac{1}{4}$ . Dla drugiej pary  $p(t)=3/2$  i  $E_{10} = \frac{9}{4}$ . Druga para zapewnia mniej błędów w transmisji.

## 8.

Porównaj dwie pary symboli transmisyjnych: (a) i (b).



Dla każdej pary:

- Oblicz energie  $E_1$  i  $E_0$ .
- Oblicz średnią moc nadajnika  $S$  zakładając, że oba sygnały są transmitowane z tym samym prawdopodobieństwem  $P_0=P_1=0.5$ .
- Oblicz  $E_{10}$ : energię sygnału różnicowego  $p(t) = s_1(t) - s_0(t)$ .
- Oblicz prawdopodobieństwo błędnego odbioru  $P_e$ . Podstaw gęstość mocy szumu w kanale  $\eta$  równą  $1$  W/Hz.

Która para symboli jest bardziej odporna na szum w kanale? Uzasadnij odpowiedź.

**Rozwiązanie:** Dla pierwszej pary  $E_1=2$ ,  $E_0=0$ ,  $S = \frac{1}{T}(E_1P_1 + E_0P_0) = 1$ .

Dla drugiej pary  $E_1=E_0=1$ ,  $S=1$ . W obu przypadkach mamy tę samą moc nadajnika  $S$ . Porównując modulacje, badamy  $P_e$  przy tej samej wartości SNR na wyjściu kanału. Ponieważ  $SNR = \frac{S}{N}$  to oznacza tę samą moc szumu  $N$  w obu przypadkach. Teraz nawet bez obliczeń można stwierdzić, że parą bardziej odporną na szum jest para (b). Różnica amplitud wynosi tu 2, a dla pierwszej pary  $\sqrt{2}$ . Większa różnica to mniej błędów rozpoznawania sygnałów przy tym samym szumie.

Ten sam wniosek można wysnuć porównując wartości  $E_{10}$ . Dla pary (a)  $E_{10}=2$ , a dla pary (b)  $E_{10}=4$ . Większa wartość  $E_{10}$  to mniej przekłamań bo funkcja  $erfc$  jest malejąca.

## 9.

Która para sygnałów transmisyjnych:

pierwsza:

$$s_1(t) = A \cos [2 \pi f_0 t] \quad s_0(t) = -A \cos [2 \pi f_0 t]$$

czy druga:

$$s_1(t) = A \cos [2 \pi f_0 t] \quad s_0(t) = A \sin [2 \pi f_0 t]$$

jest bardziej odporna na szum w kanale? Odpowiedź uzasadnij.

**Rozwiązanie:** Stopa błędów w transmisji binarnej, przy tym samym prawdopodobieństwie nadania obu sygnałów wynosi  $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_{10}}{4\eta}} \right)$ . Komplementarna funkcja błędu  $erfc$  jest malejąca, więc szukamy pary o większej wartości energii różnicy  $p(t) = s_1(t) - s_0(t)$ :  $E_{10} = \int_0^T p^2(t) dt$ . Dla pierwszej pary  $E_{10} = 2A^2T$ , a dla drugiej  $E_{10} = A^2T$ . Pierwsza para (binarna modulacja PSK) jest lepsza.

Obliczając energie zakładaliśmy, że w czasie trwania symbolu  $T$  mieści się całkowita liczba okresów sygnału o częstotliwości  $f_0$ .

## 10.

Wyjaśnij dlaczego binarna modulacja PSK jest bardziej odporna na szum w kanale niż binarna modulacja DPSK. Dla przypomnienia, w PSK sygnał  $s_1(t) = A \cos [2 \pi f_0 t]$  reprezentuje wartość logiczną "1", a sygnał  $s_0(t) = -A \cos [2 \pi f_0 t] = A \cos [2 \pi f_0 t + \pi]$ , reprezentuje wartość logiczną "0". W modulacji DPSK "1" jest transmitowana jako brak przesunięcia fazy dwóch sąsiednich symboli, a "0" jest transmitowane jako przesunięcie fazy sąsiednich symboli o  $\pi$  (180 stopni). Zakładamy, że nie ma problemów z synchronizacją, odtworzeniem sygnałów referencyjnych w odbiorniku, itp.

**Rozwiązanie:** Prawdopodobieństwo błędnego rozpoznania pojedynczego sygnału wynosi  $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\frac{E_{10}}{4\eta}})$ ,

gdzie  $E_{10} = 2A^2T$ . W modulacji PSK, błędne rozpoznanie symboli oznacza jeden błędny bit:  $P_e^{PSK} = P_e$ .

Izolowany błąd w rozpoznaniu sygnału tworzy dwa błędne bity w DPSK, gdyż błędnie rozpoznany sygnał jest powoływany z poprzednim i następnym sygnałem. Dokładniej, błąd w DPSK występuje, gdy pierwszy z dwóch sąsiednich sygnałów jest rozpoznany błędnie, a drugi – bezbłędnie (lub odwrotnie: pierwszy – bezbłędnie, a drugi – błędnie). Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi

$P_e^{DPSK} = P_e(1 - P_e) + (1 - P_e)P_e = 2P_e - 2P_e^2$ . Ta wartość jest większa niż  $P_e^{PSK} = P_e$ .

## 11.

Gęstość mocy szumu w kanale wynosi  $\eta=1$  [W/kHz], średnia moc nadajnika jest równa  $S=42$ [W], a pasmo kanału wynosi  $B=6$ [kHz].

Oblicz:

- Moc szumu na wyjściu kanału (N)
- Największą szybkość modulacji, czyli liczbę symboli transmisyjnych na sekundę (w bodach)
- Przepustowość kanału, czyli największą szybkość transmisji z dowolnie niską stopą błędów.

Powtórz obliczenia dla szerokości pasma  $B=14$ [kHz] i porównaj z wynikami dla  $B=6$ [kHz].

**Rozwiązanie:**

Przypadek wąskopasmowy ( $B= 6$  kHz): Moc szumu  $N_1 = \eta B = 6$  W. Największa szybkość modulacji (zgodnie z twierdzeniem Nyquista) jest równa  $2 B = 12000$  Bd (symboli na sekundę).

Największa szybkość transmisji (przepustowość kanału zgodnie z twierdzeniem Shannona):

$$C_1 = B \log_2(1 + \frac{S}{N}) = 6000 \log_2(1 + \frac{42}{6}) = 18000 \text{ bits/s.}$$

Przypadek szerokopasmowy ( $B= 14$  kHz): Moc szumu  $N_2 = \eta B = 14$  W. Największa szybkość modulacji wynosi  $2 B = 28000$  Bd (symboli na sekundę).

Największa szybkość transmisji:  $C_2 = B \log_2(1 + \frac{S}{N}) = 14000 \log_2(1 + \frac{42}{14}) = 28000 \text{ bit/s.}$

System szerokopasmowy zapewnia szybszą transmisję mimo większej mocy szumu na wyjściu kanału.

## 12.

Kanał transmisyjny jest opisany następującymi parametrami: szerokość pasma  $B = 1000$  Hz i gęstość mocy szumu  $\eta=10^{-3}$  W/Hz . Oblicz średnią moc sygnału  $S$ , zapewniającą bezbłędną transmisję ( $\text{BER}=0$ ,  $P_e=0$ ) z szybkością 1000 bitów na sekundę.

**Rozwiązanie:** Wykorzystujemy wzór Shannona:  $C = B \log_2(1 + \frac{S}{N})$ . Podstawiamy  $C=1000$  bit/s,  $N = \eta B = 1$  W,  $B = 1000$  Hz. Otrzymujemy  $S= 1$  W.

## 13.

Sprawdź czy jest możliwa bezbłędna transmisja danych z szybkością 5000 bit/s , gdy mamy nadajnik o mocy  $S=9$ [W], oraz nietłumiący kanał o szerokości pasma  $B=3$ [kHz] i gęstości mocy szumu na wyjściu  $\eta=1$  [W/kHz] ?

**Rozwiązanie:** Wykorzystujemy wzór Shannona  $C = B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$ . Podstawiamy  $B=3000$  Hz,  $S=9$  W,  $N = \eta B = 3$  W. Obliczamy przepustowość kanału  $C=6000$  bit/s. Jeśli można transmitować 6000 bit/s bez błędów, to można i 5000 bit/s

## 5.2 Zadania do rozwiązania

1.

Sygnał modulujący  $m(t)=\cos(2 \pi f_m t)$ ,  $f_m =10$  kHz, podano na wejście modulatora dolnowstęgowej modulacji amplitudy (LSSB). Częstotliwość fali nośnej  $f_0=100$  kHz. Naskicuj widmo sygnału zmodulowanego, zakładając, że fala nośna jest wytłumiona. Jaki jest przebieg czasowy sygnału zmodulowanego?

2.

Sygnał FM jest opisany wzorem:

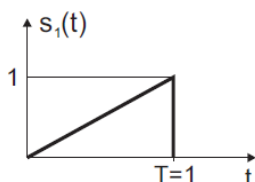
$$s(t) = 4 \cos [2 \pi 10^8 t + 20 \cos(2 \pi 10^3 t)]$$

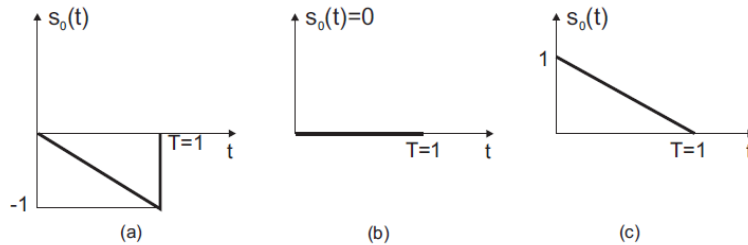
Znajdź:

- Moc średnią sygnału
- Częstotliwość fali nośnej  $f_0$
- Częstotliwość sygnału modulującego  $f_m$
- indeks modulacji  $\beta$
- (największą) dewiację częstotliwości  $\Delta F$
- Szerokość pasma częstotliwości  $B$

3.

Wartość logiczna "1" jest reprezentowana przez sygnał  $s_1(t)$  jak na rysunku. Wybierz najlepszy sygnał  $s_0(t)$  reprezentujący wartość logiczną "0". Porównaj trzy sygnały (a, b, c), wybierz sygnał gwarantujący najmniejszą stopę błędów i uzasadnij odpowiedź.



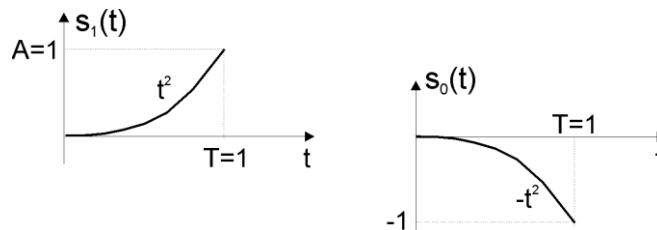


Wskazówka: Najbardziej odporna na szumy jest para  $s_1(t)$ ,  $s_0(t)$  o największej energii sygnału różnicowego  $E_{10}$ .

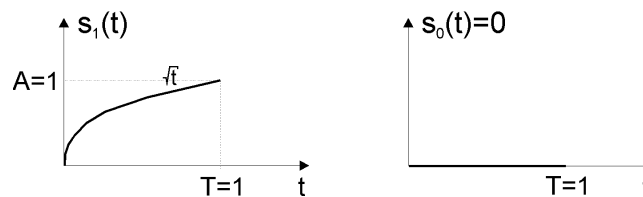
#### 4.

Porównaj dwie pary symboli transmisyjnych. Która z nich zapewnia mniejszą stopę błędów?

Pierwsza para:



Dругa para:



Wskazówka: Najbardziej odporna na szumy jest para  $s_1(t)$ ,  $s_0(t)$  o największej energii sygnału różnicowego  $E_{10}$ .

#### 5.

Strumień binarny należy przestać bezprzewodowo. Wybierz z listy modulacje, które nadają się do tego celu i uzasadnij wybór.

- Analogowa modulacja amplitudy DSB-SC
- Kluczowanie fazy (PSK)
- Różnicowe kluczowanie fazy (DPSK)
- Kod unipolarny oparty na impulsach prostokątnych
- Kod bipolarny jak wyżej
- Kluczowanie częstotliwości (FSK)
- Kwadraturowa modulacja amplitudy (QAM)

Wskazówka: Wybierz modulacje cyfrowe wykorzystujące falę nośną.

#### 6.

Gęstość mocy szumu w kanale wynosi  $\eta=1$  [W/kHz], średnia moc nadajnika jest równa  $S=12$  [W], a pasmo kanału wynosi  $B=4$  [kHz].

Oblicz:

- Moc szumu na wyjściu kanału (N)
- Stosunek mocy sygnału do mocy szumu na wyjściu kanału (SNR)
- Największą szybkość modulacji, czyli liczbę symboli transmisyjnych na sekundę (w bodach)
- Przepustowość kanału, czyli największą szybkość transmisji z dowolnie niską stopą błędów.

Powtórz obliczenia dla szerokości pasma  $B=12$ [kHz] i porównaj z wynikami dla  $B=4$ [kHz].

7.

Kanał transmisyjny ma pasmo  $B = 1000$  Hz i gęstość mocy szumu  $\eta=10^{-3}$  W/Hz . Oblicz najmniejszą moc nadajnika S, zapewniającą bezbłędną transmisję z szybkością 2000 bit/s.

Wskazówka: Wzór Shannona na przepustowość kanału.

## 6 Biblioteka

Z Modułem 2 są związane dwa ćwiczenia symulacyjne: Transmisja cyfrowa – kody transmisyjne i Transmisja cyfrowa – modulacje cyfrowe. Pierwsze z nich zapoznaje studenta z kodem transmisyjnym unipolarnym i bipolarnym. Można porównać odporność obu kodów na szum w kanale w sytuacji, gdy oba symbole nadawane są z tym samym prawdopodobieństwem i różnym prawdopodobieństwem. Drugie ćwiczenie wprowadza w binarne i wielowartościowe modulacje oparte na fali nośnej: modulacje PSK, QAM, DPSK. Zapoznaje studenta z działaniem odbiornika kwadraturowego, pozwala na konstruowanie własnych modulacji. Laboratorium i materiały pomocnicze opisano w Module 4.

## 7 Bibliografia

1. A.Dąbrowski, P.Dymarski (ed.) „Podstawy Transmisji Cyfrowej” Oficyna Wyd. Politechniki Warszawskiej, 2013
2. S.Haykin „Systemy Telekomunikacyjne”, WKiŁ, Warszawa 2004
3. T.P. Zieliński "Cyfrowe przetwarzanie sygnałów w telekomunikacji", PWN, 2014