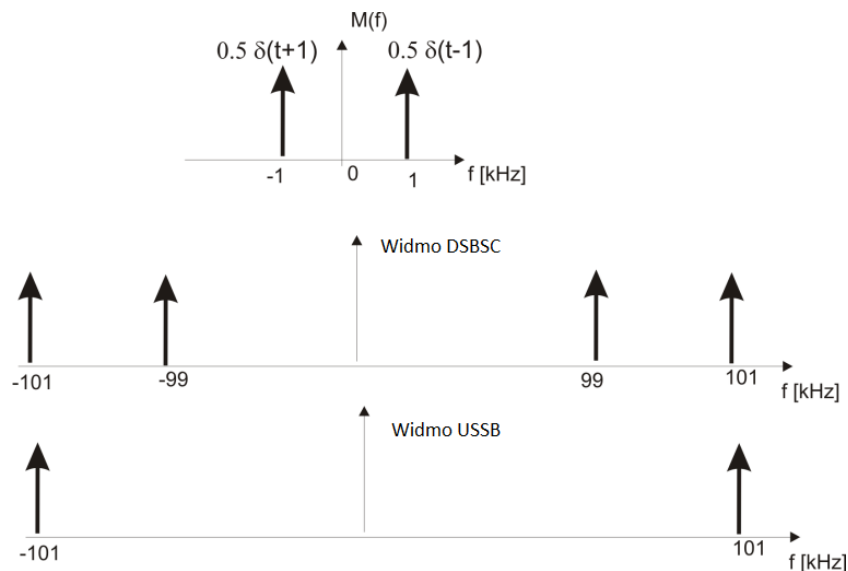


Przykładowe zadania z rozwiązaniami do modułu 2.

Zadanie 1.

Sygnał modulujący $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$, $f_m = 1$ kHz, podano na wejście modulatora górnowiąstęgowej modulacji (SSB). Częstotliwość fali nośnej $f_0 = 100$ kHz. Narysuj widmo sygnału zmodulowanego, zakładając, że fala nośna jest wytłumiona. Jaki jest przebieg czasowy sygnału zmodulowanego?

Rozwiązanie:



Sygnał USSB jest więc sygnałem harmonicznym o częstotliwości 101 kHz.

Zadanie 2.

Mamy dwa detektory: detektor obwiedni i detektor synchroniczny. Mamy też dwa sygnały zmodulowane: DSBSC

$$s_1(t) = m(t) \cos[2\pi f_0 t]$$

i DSB

$$s_2(t) = [1+m(t)]\cos[2\pi f_0 t], \quad |m(t)| < 1$$

gdzie $m(t)$ – wolnozmienny sygnał modulujący (np. sygnał mowy), f_0 – częstotliwość fali nośnej.

Wybierz odpowiedni detektor dla każdego z tych sygnałów. Uzasadnij wybór.

Rozwiązanie: Detektor synchroniczny może być zastosowany w obu przypadkach. Dla DSBSC otrzymamy na wyjściu $\frac{1}{2}m(t)$. – wzór (6). Po pomnożeniu sygnału DSB przez generowaną w odbiorniku nośną, otrzymamy

$$(1 + m(t))(\cos 2\pi f_0 t)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m(t) + \frac{1}{2}\cos 4\pi f_0 t + \frac{1}{2}m(t)\cos 4\pi f_0 t.$$

Po wytłumieniu wysokich częstotliwości filtrem dolnoprzepasowym, pozostanie składowa stała $\frac{1}{2}$ i sygnał użyteczny $\frac{1}{2}m(t)$. Składowa stała nie jest zakłóceniem, zresztą bardzo łatwo ją wytłumić.

Detektor obwiedni nie nadaje się do odbioru sygnałów z wytłumioną nośną, a więc może być zastosowany tylko do odbioru sygnału DSB (rys.8). W przypadku DSBSC otrzymamy na wyjściu wartość bezwzględną sygnału modulującego $|m(t)|$, a więc sygnał bardzo zniekształcony (rys.2).

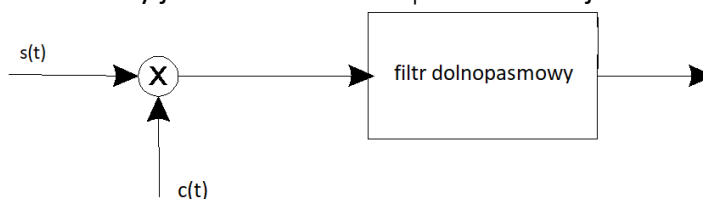
Zadanie 3.

Sygnał DSBSC $s(t) = m(t) \cos [2 \pi f_0 t]$ podano na wejście odbiornika z detektorem synchronicznym (rys.)

Fala nośna jest generowana z błędem fazowym ϕ :

$$c(t) = \cos [2 \pi f_0 t + \phi]$$

Oblicz sygnał na wyjściu odbiornika. Przy jakich wartościach ϕ odbiór nie jest możliwy?



Wskazówka: $\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$

Rozwiązanie: Na wyjściu układu mnożącego:

$$m(t) \cos 2\pi f_0 t \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{1}{2} m(t) [\cos \phi + \cos(4\pi f_0 t + \phi)]$$

Na wyjściu filtra dolnopasmowego pozostanie sygnał użyteczny $\frac{1}{2} m(t) \cos \phi$. Błąd fazowy zmniejszy amplitudę sygnału, obniży SNR₀, a przy błędzie fazowym równym 90 stopni sygnał wyjściowy zaniknie.

Zadanie 4.

Sygnał FM jest opisany wzorem: $s(t) = 10 \cos [2 \pi 10^7 t + \beta \cos(2 \pi 10^3 t)]$

Pasmo B wynosi około 100 kHz. Znajdź następujące parametry :

- Moc średnią sygnału
- Częstotliwość fali nośnej
- Częstotliwość sygnału modulującego
- indeks modulacji β
- (największą) dewiację częstotliwości

Rozwiązanie: Sygnał ma kształt cosinusoidalny, amplituda $A=10$, a więc moc średnia wynosi $P = \frac{A^2}{2} = 50$ (Moduł1, p.2.2). Częstotliwość fali nośnej wynosi 10^7 Hz = 10 MHz. Częstotliwość sygnału modulującego $f_m=10^3$ Hz = 1 kHz.

Indeks modulacji obliczymy z prawa Carsona (wzór 23). Otrzymujemy $\beta=49$. W końcu, ze wzoru (17) wyznaczamy dewiację częstotliwości $\Delta F=49$ kHz.

Zadanie 5.

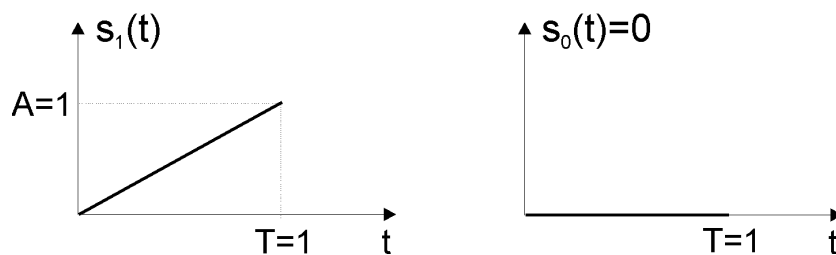
Sygnał FM: $s(t) = A \cos [2 \pi f_0 t + \beta \cos(2 \pi f_m t)]$ ma pasmo B około 100 kHz. Dewiacja częstotliwości wynosi 45 kHz. Oblicz częstotliwość sygnału modulującego (f_m) i index modulacji β .

Rozwiązanie: Wykorzystamy prawo Carsona:

$$B = 2(\beta + 1)f_m \text{ oraz zależność (17): } \beta = \frac{\Delta F}{f_m}. \text{ Znajdujemy } f_m=5 \text{ kHz i } \beta=9.$$

Zadanie 6.

Sygnały $s_1(t)$ i $s_0(t)$ są transmitowane z jednakowym prawdopodobieństwem ($P_0=P_1=0.5$) i odebrane z szumem o gęstości mocy η [W/Hz]:



- Narysuj schemat odbiornika optymalnego
- Oblicz energie obu sygnałów
- Oblicz stopę błędów (P_e), przyjmując gęstość mocy szumu w kanale $\eta = 1/12$ [W/Hz]

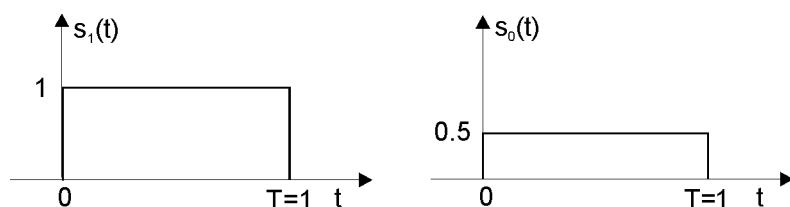
Rozwiązanie: Odbiornik optymalny jest pokazany na Rys.36, 37 lub 38. Dla odbiornika z rys.37 próg decyzyjny wynosi $\frac{1}{2}[E_1 - E_0] = \frac{1}{6}$, ponieważ energia $E_0=0$ a energia pierwszego sygnału ($s_1(t) = t$, $0 \leq t < T$) jest równa: $E_1 = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$.

Sygnał różnicowy $p(t) = s_1(t) - s_0(t) = s_1(t)$ a jego energia jest równa $E_{10} = E_1 = \frac{1}{3}$. Ostatecznie

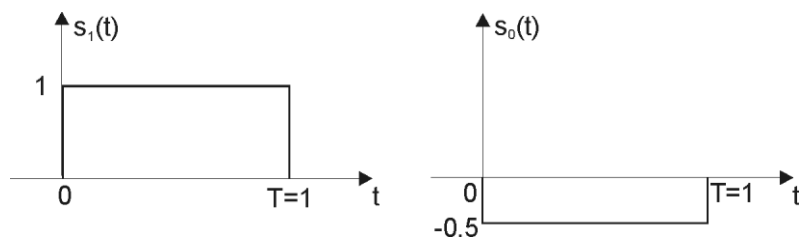
$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_{10}}{4\eta}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{1}{12\eta}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(1)$$

Zadanie 7.

Która para symboli transmisyjnych:
pierwsza:



czy druga:



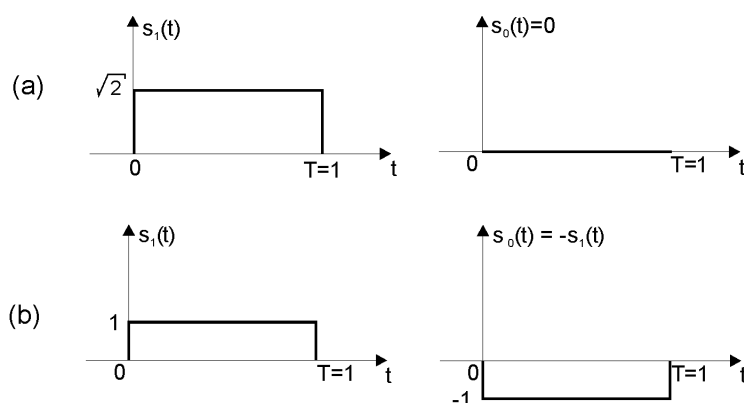
Jest bardziej odporna na szum w kanale? Odpowiedź uzasadnij przyjmując, że w obu przypadkach używamy odbiornika optymalnego.

Rozwiązanie: Im większa energia sygnału różnicowego tym mniej błędów w rozpoznaniu zaszumionych sygnałów. Szukamy więc największej wartości $E_{10} = \int_0^T p^2(t)dt$, gdzie $p(t) = s_1(t) - s_0(t)$.

Dla pierwszej pary $p(t)=0.5$ i $E_{10} = \frac{1}{4}$. Dla drugiej pary $p(t)=3/2$ i $E_{10} = \frac{9}{4}$. Druga para zapewnia mniej błędów w transmisji.

Zadanie 8.

Porównaj dwie pary symboli transmisyjnych: (a) i (b).



Dla każdej pary:

- Oblicz energie E_1 i E_0 .
- Oblicz średnią moc nadajnika S zakładając, że oba sygnały są transmitowane z tym samym prawdopodobieństwem $P_0=P_1=0.5$.
- Oblicz E_{10} : energię sygnału różnicowego $p(t) = s_1(t) - s_0(t)$.
- Oblicz prawdopodobieństwo błędnego odbioru P_e . Podstaw gęstość mocy szumu w kanale η równą 1 W/Hz.

Która para symboli jest bardziej odporna na szum w kanale? Uzasadnij odpowiedź.

Rozwiązanie: Dla pierwszej pary $E_1=2$, $E_0=0$, $S = \frac{1}{T}(E_1P_1 + E_0P_0) = 1$.

Dla drugiej pary $E_1=E_0=1$, $S=1$. W obu przypadkach mamy tę samą moc nadajnika S . Porównując modulacje, badamy P_e przy tej samej wartości SNR na wyjściu kanału. Ponieważ $SNR = \frac{S}{N}$ to oznacza tę samą moc szumu N w obu przypadkach. Teraz nawet bez obliczeń można stwierdzić, że parą bardziej odporną na szum jest para (b). Różnica amplitud wynosi tu 2, a dla pierwszej pary $\sqrt{2}$. Większa różnica to mniej błędów rozpoznawania sygnałów przy tym samym szumie.

Ten sam wniosek można wysnuć porównując wartości E_{10} . Dla pary (a) $E_{10}=2$, a dla pary (b) $E_{10}=4$. Większa wartość E_{10} to mniej przekłamań bo funkcja erfc jest malejąca.

Zadanie 9.

Która para sygnałów transmisyjnych:

pierwsza:

$$s_1(t) = A \cos [2 \pi f_0 t] \quad s_0(t) = -A \cos [2 \pi f_0 t]$$

czy druga:

$$s_1(t) = A \cos [2 \pi f_0 t] \quad s_0(t) = A \sin [2 \pi f_0 t]$$

jest bardziej odporna na szum w kanale? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie: Stopa błędów w transmisji binarnej, przy tym samym prawdopodobieństwie nadania obu sygnałów wynosi $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_{10}}{4\eta}}\right)$. Komplementarna funkcja błędu erfc jest malejąca, więc szukamy pary o większej wartości energii różnicy $p(t) = s_1(t) - s_0(t)$: $E_{10} = \int_0^T p^2(t) dt$. Dla pierwszej pary $E_{10} = 2A^2T$, a dla drugiej $E_{10} = A^2T$. Pierwsza para (binarna modulacja PSK) jest lepsza. Obliczając energie zakładaliśmy, że w czasie trwania symbolu T mieści się całkowita liczba okresów sygnału o częstotliwości f_0 .

Zadanie 10.

Wyjaśnij dlaczego binarna modulacja PSK jest bardziej odporna na szum w kanale niż binarna modulacja DPSK.

Dla przypomnienia, w PSK sygnał $s_1(t) = A \cos[2\pi f_0 t]$ reprezentuje wartość logiczną "1", a sygnał $s_0(t) = -A \cos[2\pi f_0 t] = A \cos[2\pi f_0 t + \pi]$, reprezentuje wartość logiczną "0". W modulacji DPSK "1" jest transmitowana jako brak przesunięcia fazy dwóch sąsiednich symboli, a "0" jest transmitowane jako przesunięcie fazy sąsiednich symboli o π (180 stopni). Zakładamy, że nie ma problemów z synchronizacją, odtworzeniem sygnałów referencyjnych w odbiorniku, itp.

Rozwiązanie: Prawdopodobieństwo błędnego rozpoznania pojedynczego sygnału wynosi $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_{10}}{4\eta}}\right)$, gdzie $E_{10} = 2A^2T$. W modulacji PSK, błędne rozpoznanie symbol oznacza jeden błędny bit: $P_e^{PSK} = P_e$.

Izolowany błąd w rozpoznaniu sygnału tworzy dwa błędne bity w DPSK, gdyż błędnie rozpoznany sygnał jest powoływany z poprzednim i następnym sygnałem. Dokładniej, błąd w DPSK występuje, gdy pierwszy z dwóch sąsiednich sygnałów jest rozpoznany błędnie, a drugi – bezbłędnie (lub odwrotnie: pierwszy – bezbłędnie, a drugi – błędnie). Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi $P_e^{DPSK} = P_e(1 - P_e) + (1 - P_e)P_e = 2P_e - 2P_e^2$. Ta wartość jest większa niż $P_e^{PSK} = P_e$.

Zdanie 11.

Gęstość mocy szumu w kanale wynosi $\eta=1$ [W/kHz], średnia moc nadajnika jest równa $S=42$ [W], a pasmo kanału wynosi $B=6$ [kHz].

Oblicz:

- Moc szumu na wyjściu kanału (N)
- Największą szybkość modulacji, czyli liczbę symboli transmisyjnych na sekundę (w bodach)
- Przepustowość kanału, czyli największą szybkość transmisji z dowolnie niską stopą błędów.

Powtórz obliczenia dla szerokości pasma $B=14$ [kHz] i porównaj z wynikami dla $B=6$ [kHz].

Rozwiązanie:

Przypadek wąskopasmowy ($B=6$ kHz): Moc szumu $N_1 = \eta B = 6$ W. Największa szybkość modulacji (zgodnie z twierdzeniem Nyquista) jest równa $2B = 12000$ Bd (symboli na sekundę).

Największa szybkość transmisji (przepustowość kanału zgodnie z twierdzeniem Shannona):

$$C_1 = B \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) = 6000 \log_2\left(1 + \frac{42}{6}\right) = 18000 \text{ bits/s.}$$

Przypadek szerokopasmowy ($B = 14 \text{ kHz}$): Moc szumu $N_2 = \eta B = 14 \text{ W}$. Największa szybkość modulacji wynosi $2B = 28000 \text{ Bd}$ (symboli na sekundę).

Największa szybkość transmisji: $C_2 = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) = 14000 \log_2 \left(1 + \frac{42}{14} \right) = 28000 \text{ bit/s}$.

System szerokopasmowy zapewnia szybszą transmisję mimo większej mocy szumu na wyjściu kanału.

Zadanie 12.

Kanał transmisyjny jest opisany następującymi parametrami: szerokość pasma $B = 1000 \text{ Hz}$ i gęstość mocy szumu $\eta = 10^{-3} \text{ W/Hz}$. Oblicz średnią moc sygnału S , zapewniającą bezbłędną transmisję ($\text{BER}=0$, $P_e=0$) z szybkością $1000 \text{ bitów na sekundę}$.

Rozwiązanie: Wykorzystujemy wzór Shannona: $C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$. Podstawiamy $C=1000 \text{ bit/s}$, $N = \eta B = 1 \text{ W}$, $B = 1000 \text{ Hz}$. Otrzymujemy $S = 1 \text{ W}$.

Zadanie 13.

Sprawdź czy jest możliwa bezbłędna transmisja danych z szybkością 5000 bit/s , gdy mamy nadajnik o mocy

$S=9 \text{ [W]}$, oraz nietłumiący kanał o szerokości pasma $B=3 \text{ [kHz]}$ i gęstości mocy szumu na wyjściu $\eta=1 \text{ [W/kHz]}$?

Rozwiązanie: Wykorzystujemy wzór Shannona $C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$. Podstawiamy $B=3000 \text{ Hz}$, $S=9 \text{ W}$, $N = \eta B = 3 \text{ W}$. Obliczamy przepustowość kanału $C=6000 \text{ bit/s}$. Jeśli można transmitować 6000 bit/s bez błędów, to można i 5000 bit/s