

Sygnały i układy analogowe

1. Szereg Fouriera:

$x(t)$ – okresowy, okres T

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}, \quad f_0 = \frac{1}{T}$$

Współczynniki Fouriera: $X_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$

2. Transformata Fouriera:

$x(t)$ – sygnał w dziedzinie czasu

Widmo (transformata Fouriera): $X(f) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$, f - częstotliwość

Odwrotna transformata Fouriera: $x(t) = F^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$

3. Transformata Fouriera w funkcji $\omega = 2\pi f$:

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

4. Przesunięcie w dziedzinie czasu: gdy $X(f) = F[x(t)]$, to $F[x(t - t_0)] = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$

5. Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości: gdy $x(t) = F^{-1}[X(f)]$, to

$$F^{-1}[X(f - f_0)] = e^{j2\pi f_0 t} x(t)$$

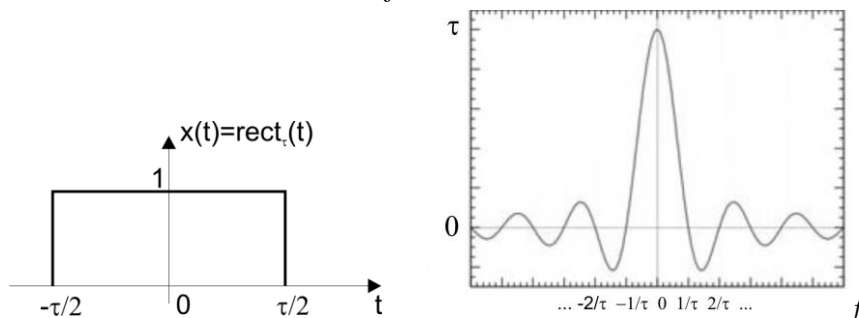
6. Splot: $x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) x(t - \tau) d\tau$

7. Transformata Fouriera splotu: gdy $v(t) = x(t) * y(t)$, to

$$V(f) = F[v(t)] = F[x(t)] F[y(t)] = X(f) Y(f)$$

8. Transformata Fouriera impulsu prostokątnego:

$$X(f) = F[\text{rect}_\tau(t)] = \tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}$$



9. Delta Diraca $\delta(t)$:
-

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1,$$

Transformata Fouriera $\delta(t)$: $F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1$

Transformata Fouriera przesuniętej delty Diraca: $F[\delta(t - t_0)] = e^{-j2\pi ft_0}$

Splot z przesuniętą delta Diraca: $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$

10. Delta Diraca w dziedzinie częstotliwości: $\delta(f)$:

Jej odwrotna transformata Fouriera: $F^{-1}[\delta(f)] = 1$

Odwrotna transformata Fouriera przesuniętej delty:

$$F^{-1}[\delta(f - f_0)] = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)$$

11. Widmo (transformata Fouriera) sinusa i cosinusa:

$$F[\cos(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$F[\sin(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

12. Układy LTI (Linear Time Invariant):



- W dziedzinie czasu: $y(t) = x(t) * h(t)$, gdzie $h(t)$ – odpowiedź impulsowa
- W dziedzinie częstotliwości: $Y(f) = X(f) H(f)$, gdzie $H(f) = F[h(t)]$ – transmitancja (ch-ka częstotliwościowa)
- Wzmocnienie filtru w funkcji częstotliwości: $|H(f)| = |Y(f)| / |X(f)|$
- Energia (lub gęstość mocy) $|Y(f)|^2 = |X(f)|^2 |H(f)|^2$
 $G_y(f) = G_x(f) |H(f)|^2$

Modulacje analogowe

13. Modulacja amplitudy dwuwstęgowa z wytłumioną nośną (DSB-SC):

$s(t) = m(t) \cos(2\pi f_0 t)$, gdzie f_0 - częstotliwość fali nośnej, $m(t)$ – sygnał modulujący

14. Widmo DSB-SC: $S(f) = F[s(t)] = \frac{1}{2} M(f - f_0) + \frac{1}{2} M(f + f_0)$

15. Modulacja amplitudy dwuwstęgowa z falą nośną (DSB):

$s(t) = m(t) \cos(2\pi f_0 t) + \cos(2\pi f_0 t)$, gdzie f_0 - częstotliwość fali nośnej, $m(t)$ – sygnał modulujący

16. Widmo sygnału DSB:

$$S(f) = F[s(t)] = \frac{1}{2} M(f - f_0) + \frac{1}{2} M(f + f_0) + \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$$

17. Modulacja częstotliwości (FM): $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + D_f \int_0^t m(\lambda) d\lambda)$, gdzie A –

amplituda fali nośnej, f_0 - częstotliwość fali nośnej, $m(t)$ – sygnał modulujący, D_f reprezentuje wzmocnienie modulatora lub amplitudę sygnału modulującego.

18. Faza chwilowa sygnału FM: $\Phi(t) = 2\pi f_0 t + D_f \int_0^t m(\lambda) d\lambda$

Gdy $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$, to $\Phi(t) = 2\pi f_0 t + \frac{D_f}{2\pi f_m} \sin(2\pi f_m t)$

Największa odchyłka fazy (od fazy fali nośnej): $\beta = \frac{D_f}{2\pi f_m}$ jest nazywana indeksem modulacji

19. Częstotliwość chwilowa: $f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) = f_0 + \frac{D_f}{2\pi} m(t)$.

Gdy $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$, to $f(t) = f_0 + \frac{D_f}{2\pi} \cos(2\pi f_m t)$.

Maksymalna odchyłka częstotliwości, czyli dewiacja częstotliwości $\Delta F = \frac{D_f}{2\pi}$.

Spełniony jest wzór $\beta = \frac{\Delta F}{f_m}$

20. Przybliżone pasmo sygnału FM (prawo Carsona):

$$B = 2(\beta + 1) f_m = 2(\Delta F + f_m)$$

Sygnały dyskretne

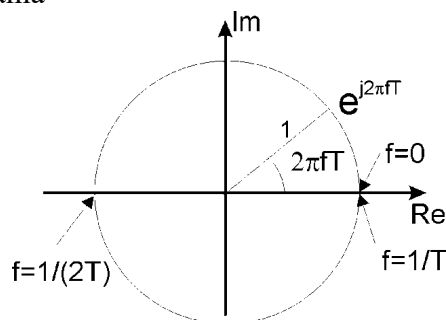
21. Próbkowanie idealne: $x(t) \cdot \sum_n \delta(t - nT)$, gdzie $x(t)$ – wejściowy sygnał ciągły, T – okres próbkowania

22. Transformata Fouriera sygnału próbek: $F[x(t) \cdot \sum_n \delta(t - nT)] = \frac{1}{T} \sum_n X(f - \frac{n}{T})$, gdzie $1/T$ – częstotliwość próbkowania.

23. Tw. o próbkowaniu: Sygnał $x(t)$ o paśmie B [Hz] można odtworzyć z próbek, jeśli częstotliwość próbkowania $f_s = \frac{1}{T} > 2B$

24. Transformata Z: $X(z) = Z[\{x_n\}] = \sum_n x_n z^{-n}$, gdzie $\{x_n\}$ – ciąg próbek

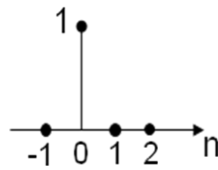
25. Przejście z transformaty Z do transformaty Fouriera: $z = e^{j2\pi fT}$, gdzie T – okres próbkowania



26. Właściwości transformaty Z:

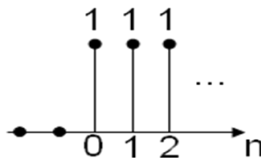
- Liniowość $Z[\{ax_n + by_n\}] = aX(z) + bY(z)$
- Przesunięcie $Z[\{x_{n+k}\}] = z^k X(z)$
- Tłumienie $Z[\{x_n a^n\}] = X[\frac{z}{a}]$
- Splot: Gdy $y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} = x_n * h_n$ to $Y(z) = X(z) \cdot H(z)$

27. Delta Kroneckera:



- $y_n = x_n * \delta_{n-m} = x_{n-m}$
- $Z[\delta_n] = \sum_n \delta_n z^{-n} = 1$
- $Z[\delta_{n-m}] = \sum_n \delta_{n-m} z^{-n} = z^{-m}$

28. Dyskretny skok jednostkowy

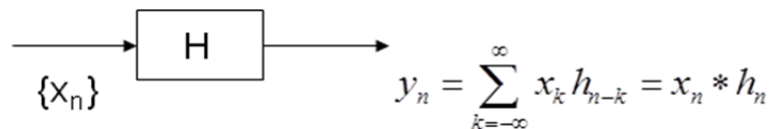


- $Z[1_n] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1}$
- $y_n = a^n 1_n \xrightarrow{|a|<1} Y(z) = \frac{z}{z-a}$

29. Odwrotna transformata Z: $x_n = \sum_i \text{Res}_{z_i} (z^{n-1} X(z))$, gdzie z_i – bieguny funkcji $z^{n-1} X(z)$

Gdy z_i jest pojedynczym biegunem, to $\text{Res}_{z_i} (z^{n-1} X(z)) = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) z^{n-1} X(z)$

30. Dyskretny układ LTI (Linear Time Invariant):



gdzie $\{h_n\}$ – odpowiedź impulsowa (na pobudzenie deltą Kroneckera).

- $Y(z) = X(z)H(z)$, gdzie $H(z) = Z[\{h_n\}]$ - transmitancja
- Stabilność w sensie BIBO (bounded input – bounded output) jest zapewniona gdy każdy biegun $H(z)$ leży w kole o promieniu jednostkowym: $|z_i| < 1$

31. Ch-kę częstotliwościową układu LTI obliczamy przez podstawienie $z = e^{j2\pi fT}$, gdzie T – okres próbkowania

Modulacje cyfrowe

32. $s_i(t)$ - symbol transmisji danych, czas trwania T

- Energia $s_i(t)$: $E_i = \int_0^T s_i^2(t) dt$
- Średnia energia w czasie T : $E_s = \sum_i P_i E_i$, gdzie P_i – prawdopodobieństwo transmisji symbolu $s_i(t)$

- Moc średnia $S = \frac{E_s}{T}$
- Szybkość modulacji (baud rate, liczba symboli/s) $R_m = \frac{1}{T}$
- Szybkość transmisji (bit rate) $R_b = R_m \log_2 M$, gdzie M – wartościowość modulacji (w transmisji binarnej M=2 i $R_b = R_m$)
- Średnia energia na bit $E_b = \frac{S}{R_b}$
- Efektywność widmowa $\frac{R_b}{B}$ [$\frac{\text{bits/s}}{\text{Hz}}$], gdzie B – szerokość pasma [Hz]

33. Tw. Nyquista: W kanale o szerokości pasma B [Hz] można transmitować co najwyżej 2B symboli na sekundę bez interferencji międzysymbolowej

- Efektywność widmowa transmisji binarnej: $\frac{R_b}{B} = \frac{R_m}{B} = \frac{2B}{B} = 2$ [$\frac{\text{bits/s}}{\text{Hz}}$]
- Jak wyżej dla wartościowości M:

$$\frac{R_b}{B} = \frac{R_m \log_2 M}{B} = \frac{2B \log_2 M}{B} = 2 \log_2 M$$
 [$\frac{\text{bits/s}}{\text{Hz}}$]

34. Odbiornik optymalny symboli binarnych:

- Prawdopodobieństwo przekłamania $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\frac{E_{10}}{4\eta}})$, gdzie $E_{10} = \int_0^T p^2(t) dt$ jest the energią sygnału różnicowego $p(t) = s_1(t) - s_0(t)$, η - gęstość mocy szumu w kanale
- Próg decyzyjny $\frac{1}{2}(E_1 - E_0)$
- Optymalna para symboli $s_0(t) = -s_1(t)$

35. Prawdopodobieństwo błędu binarnej modulacji PSK i DPSK z odbiornikiem

koherentnym: $P_e^{DPSK} = 2P_e^{PSK}(1 - P_e^{PSK}) \approx 2P_e^{PSK}$

36. Tw. Shannona o przepustowości kanału: Jest możliwa bezbłędna transmisja danych, jeśli szybkość transmisji nie przekracza C bit/s, gdzie

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{\eta B}\right)$$

37. Największa efektywność widmowa $\frac{R_b}{B}$ jest opisana funkcją: $\frac{E_b}{\eta} = \frac{B}{R_b} \left[2^{\frac{R_b}{B}} - 1 \right]$,

gdzie $\frac{E_b}{\eta}$ wyraża stosunek sygnału do szumu w kanale.

38. Największa odporność na szумы w kanale: $SNR_0 \leq \left(1 + \frac{f_M}{B} SNR\right)^{B/f_M} - 1$, gdzie f_M –

szerokość pasma przed modulacją, B – szerokość pasma po modulacji, $SNR = \frac{S}{\eta f_M}$

Kwantyzacja i kompresja

39. L – liczba poziomów kwantyzacji, b – liczba bitów na próbkę sygnału: $L = 2^b$

40. Średnia moc szumu kwantyzacji σ_e^2 jest odwrotnie proporcjonalna do L^2 : $\sigma_e^2 = \frac{c}{L^2}$

41. Zasada "6 decybeli na bit":

$$\sigma_e^2 [dB] = 10 \log_{10} \left(\frac{c}{L^2} \right) = 10 \log_{10}(c) - 10 \log_{10}(L^2) = 10 \log_{10}(c) - 20b \log_{10}(2) \approx 10 \log_{10}(c) - 6b$$

tzn. zwiększenie liczby bitów na próbkę o 1 zmniejsza szum kwantyzacji o 6 dB

42. Stosunek mocy sygnału użytecznego do mocy szumu kwantyzacji: $SNR = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}$ można

zapisać w postaci

$$SNR [dB] = 10 \log_{10} \sigma_x^2 - 10 \log_{10} \sigma_e^2 = \sigma_x^2 [dB] - \sigma_e^2 [dB] = \sigma_x^2 [dB] - 10 \log_{10}(c) + 6b$$

tzn. zwiększenie liczby bitów na próbkę o 1 powiększa SNR o 6 dB

43. Entropia: średnia ilość informacji generowana przez źródło: $H = \sum_{i=1}^M p_i \log_2 \left(\frac{1}{p_i} \right)$ gdzie

p_i = prawdopodobieństwo wystąpienia i-go zdarzenia

44. Bezstratna kompresja jest możliwa gdy średnia długość słowa kodowego wynosi co najmniej H (np. kod Huffmana z algorytmem rozszerzania źródła)

45. Stratna kompresja: najmniejsza moc błędu kwantyzacji zależy od sygnału i od średniej liczby bitów na próbkę b. Ta najmniejsza moc błędu jest opisana przez tzw. rate distortion function (RDF). Dla nieskorelowanego sygnału gaussowskiego

$$RDF = \sigma_{e,\min}^2 = \sigma_x^2 2^{-2b}$$

46. Liniowy predyktor: $x_n^p = \sum_{i=1}^p a_i x_{n-i}$, gdzie a_i - współczynniki predykcji.

$$\text{Błąd predykcji } \varepsilon_n = x_n - x_n^p$$

47. Zysk predykcji: $G_p = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\varepsilon^2}$, gdzie σ_x^2 - moc sygnału, σ_ε^2 - moc błędu predykcji

48. Obliczanie mocy błędu predykcji, mając dane współczynniki autokorelacji sygnału:

$$R_i = E[x_n x_{n-i}], \quad i = 0, 1, \dots, p, \quad E - \text{operator uśredniania:}$$

- Gdy jest tylko jeden współczynnik predykcji: $x_n^p = a_1 x_{n-1}$,

$$\sigma_\varepsilon^2 = E[\varepsilon_n^2] = E[(x_n - a_1 x_{n-1})^2] = E[x_n^2] - 2a_1 E[x_n x_{n-1}] + a_1^2 E[x_{n-1}^2] = R_0 - 2a_1 R_1 + a_1^2 R_0$$

Z tego wzoru można obliczyć optymalny współczynnik predykcji,

minimalizujący σ_ε^2 .

- Obliczanie p (np.4) współczynników metodą blokową polega na rozwiązaniu układu równań:

$$\begin{bmatrix} R_0 & R_1 & R_2 & R_3 \\ R_1 & R_0 & R_1 & R_2 \\ R_2 & R_1 & R_0 & R_1 \\ R_3 & R_2 & R_1 & R_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix}$$

49. Kwantyzator wektorowy posiada L wektorów słownika (wymiar wektorów N):

$$L = 2^{bN}, \quad \text{gdzie } b - \text{liczba bitów na próbkę.}$$

Przeplątność binarna tego kodera $R_b = b f_s$, gdzie f_s - częstotliwość próbkowania