2018

Moduł 1

MODELOWANIE 3D

BARBARA PUTZ

[Słowa kluczowe]

[Streszczenie]

Spis treści

2 Geometria krzywych

2.1 Parametryczny zapis krzywych

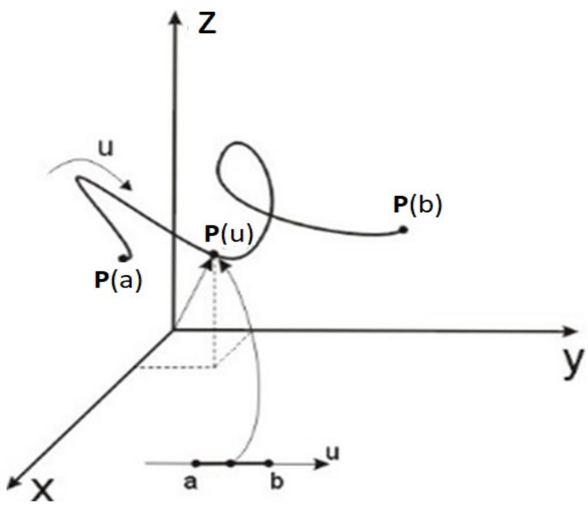
Reprezentacje figur geometrycznych stosowane w projektowaniu przy użyciu komputera powinny mieć następujące własności:

- powinny być wygodne dla projektanta, tak by dzięki nabytemu doświadczeniu i wyczuciu mógł łatwo wykonywać i modyfikować projekty;
- powinny umożliwiać łatwą realizację algorytmów przetwarzania, co wiąże się z obniżeniem kosztów implementacji systemów modelowania;
- powinny istnieć szybkie algorytmy przetwarzania reprezentacji, na przykład wykonywania takich przekształceń, jak obroty czy skalowanie; ma to zasadniczy wpływ na efektywność i wygodę pracy projektanta;
- własności reprezentacji powinny umożliwiać weryfikacje założeń projektowych (takich jak utrzymanie tolerancji kształtu), a także badanie modelu komputerowego przed wykonaniem prototypu
- powinna również istnieć możliwość wymiany danych miedzy różnymi systemami.

Parametryczny opis krzywej jest najbardziej ogólnym i najwygodniejszym opisem do określenia i obliczeń charakterystycznych własności geometrycznych krzywej. Punkty krzywej parametrycznej opisane są odwzorowaniem:

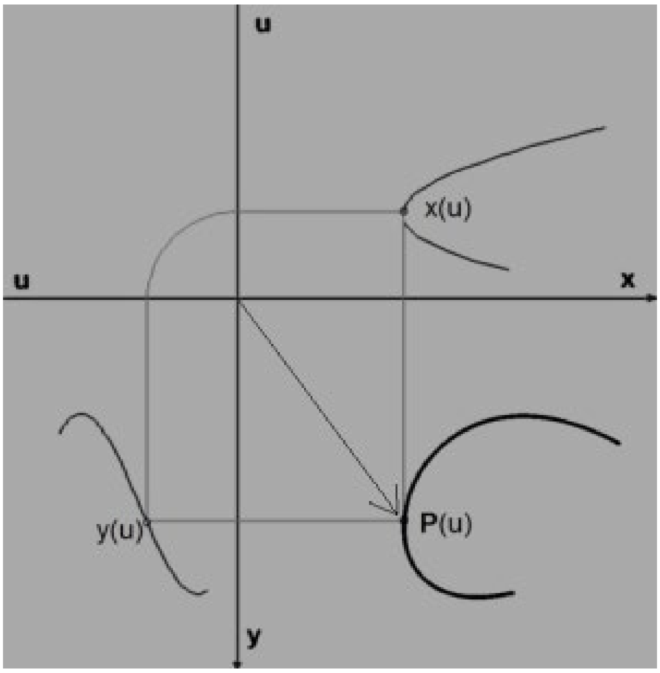
$$\boldsymbol{P}(u) = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{bmatrix}, \qquad gdzie\ \ u \in < a, b > \tag{1}$$

Wielkość **P**(u) należy traktować jako wektor wodzący punktu **P** leżącego na krzywej i odpowiadającego parametrowi *u,* który zmienia się w podanym zakresie (Rysunek 1). Zwrot krzywej, zaznaczany na krzywej lub obok krzywej strzałką, określony jest przez dodatni przyrost parametru.



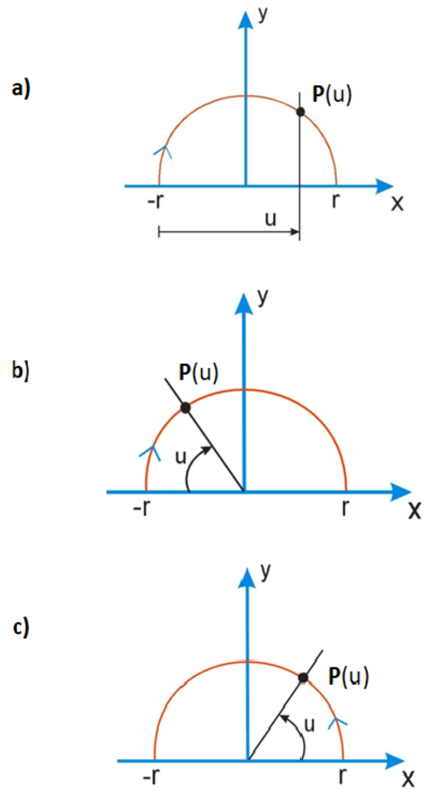
Rysunek 1. Parametryczna krzywa w przestrzeni 3D.
*Punkt **P**(u) jest odwzorowaniem parametru u*
w przestrzeń 3D

Jeśli krzywa jest płaska, pomija się funkcję z(*u*). Zapis parametryczny w postaci dwóch funkcji x(*u*) i y(*u*) pozwala zdefiniować krzywe płaskie, również takie, których nie da się opisać funkcją y(x) (Rysunek 2).



Rysunek 2. Rysunek obrazuje zależność między funkcjami x(u) i y(u), a wynikającą z nich krzywą ***P****(u)*

Po danej krzywej możemy się poruszać na nieskończenie wiele sposobów; można więc ją sparametryzować nieskończenie wieloma odwzorowaniami.



a) $\begin{cases} x = u \\ y = \sqrt{r^2 - u^2} \\ -r \le u \le r \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = -r\cos u \\ y = r\sin u \\ 0 \le u \le \pi \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = r\cos u \\ y = r\sin u \\ 0 \le u \le \pi \end{cases}$

Rysunek 3. Przykłady różnych parametryzacji półokręgu.

Przykładowo półokrąg (Rysunek 3) można opisać funkcjami x(u) i y(u):

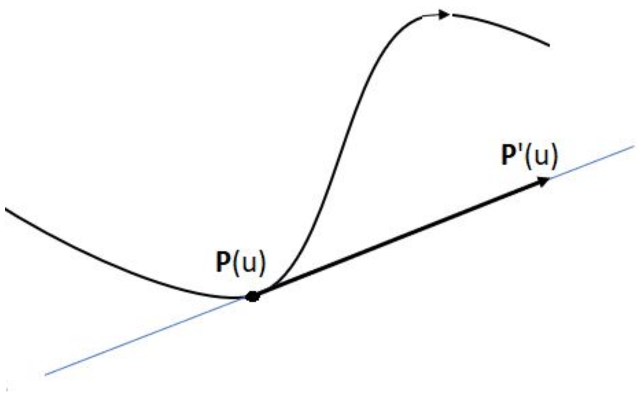
a) wyprowadzonymi bezpośrednio z zależności y= f(x) dla półokręgu
b) i c) funkcjami trygonometrycznymi, gdzie parametr *u* oznacza kąt promienia wodzącego punktu **P**(u), liczony zgodnie lub przeciwnie do ruchu wskazówek zegara; jeśli zwiększymy zakres parametru *u* do 2π, można tym sposobem opisać cały okrąg (czego nie da się zrobić w przypadku a).

2.2 Krzywe różniczkowalne i wektor prędkości

Dla krzywej parametrycznej **P**(u) definiuje się **wektor pierwszej pochodnej P**'(u) (zwany krótko wektorem pochodnej krzywej):

$$\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} x'(u) \\ y'(u) \\ z'(u) \end{bmatrix},\ gdzie\ \ u \in < a, b > \tag{2}$$

Wektor pochodnej **P**'(*u*) jest styczny do krzywej (chyba że ma on długość równą zeru) i ma zwrot zgodny ze zwrotem krzywej (Rysunek 11). Gdyby krzywą traktować jako tor poruszającego się punktu, a parametr *u* jako czas, to wektor **P**'(*u*) można interpretować jako wektor prędkości poruszającego się po tym torze punktu w chwili *u*. Dlatego wektor pochodnej bywa nazywany **wektorem prędkości** krzywej. Jest on więc zależny od parametryzacji krzywej - zmiana wzorów opisujących krzywą powoduje zmianę wektora prędkości w danym punkcie.



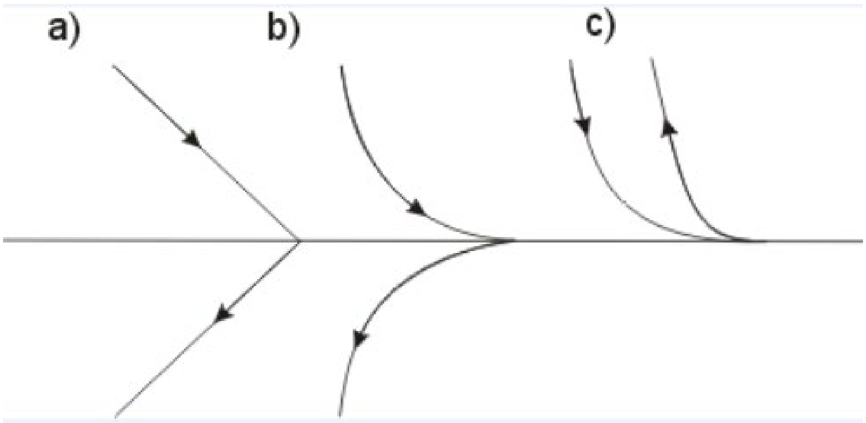
*Rysunek 4. Krzywa **P**(u) i wektor prędkości **P**'(u) leżący na prostej stycznej do krzywej w punkcie **P**(u)*

DEFINICJA 1

*Krzywa jest **różniczkowalna**, jeśli w każdym jej punkcie można wyznaczyć wektor pierwszej pochodnej, (w skrócie: wektor pochodnej), nazywany również **wektorem prędkości** krzywej.*

Mogą jednak wystąpić sytuacje, kiedy wektora pochodnej nie da się wyznaczyć i wówczas krzywa ma w tym miejscu ostrze (Rysunek 5a). Krzywe parametryczne stosowane w modelowaniu geometrycznym są więc w ogólności **kawałkami gładkie** - są ciągłe i mają skończoną liczbę ostrzy. Ostrza na krzywej (Rysunek 5) są miejscami, w których mogą zajść dwa przypadki:

- krzywa nie jest różniczkowalna: wektory pochodnej lewo- i prawostronnej są różne - przypadek a)
- krzywa jest różniczkowalna, ale wektor pochodnej jest wektorem zerowym, czyli prędkość punktu poruszającego się po krzywej spada w tym punkcie do zera (wektor prędkości zmienia zwrot na przeciwny) – przypadek b) i c). Mówimy, że krzywa w tym punkcie nie jest regularna.



Rysunek 5. Krzywe kawałkami gładkie: a) w tym punkcie ostrza krzywa nie jest różniczkowalna; b) i c) to przypadki tzw. antystyczności - krzywa w punkcie ostrza jest różniczkowalna, ale nie jest regularna.

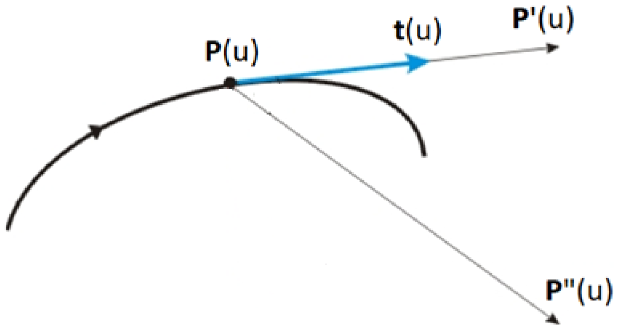
2.3 Krzywe gładkie, wersor styczny i krzywizna krzywej

DEFINICJA 2

*Jeżeli krzywa jest różniczkowalna i wektor pierwszej pochodnej w żadnym jej punkcie nie jest wektorem zerowym (zawsze ma długość nierówną zeru), to jest to **krzywa regularna**, czyli **gładka**; wówczas w każdym jej punkcie można dla niej określić **wersor styczny**.*

Wersor styczny do krzywej (Rysunek 6) jest wielkością geometryczną, niezależną od parametryzacji. Charakteryzuje on tylko kierunek stycznej do krzywej i zwrot krzywej w punkcie *u*. Zmiana zwrotu (orientacji) krzywej powoduje zmianę zwrotu wersora stycznego na przeciwny. Wersor styczny **t**(u) wyznacza się dzieląc wektor pochodnej przez jego długość:

$$\boldsymbol{t}(u) = \frac{\boldsymbol{P}'(u)}{\|\boldsymbol{P}'(u)\|} \tag{3}$$



*Rysunek 6. Wektory pierwszej i drugiej pochodnej oraz wersor styczny **t**(u) w wybranym punkcie krzywej **P**(u).*

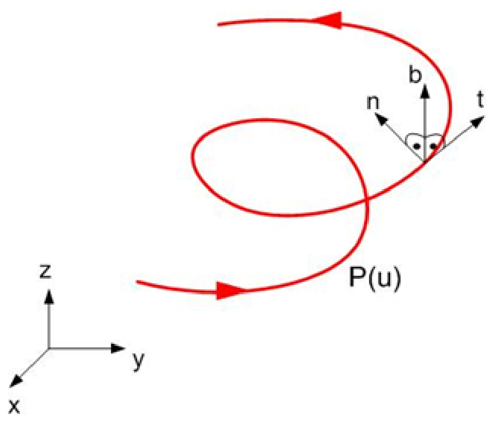
Istnieje nieskończenie wiele krzywych stycznych mających w danym punkcie ten sam wersor styczny; wszystkie te krzywe są gładkie, ale różnią się stopniem odchylenia od prostej stycznej - czyli różnią się krzywizną. Mówiąc ściślej, **krzywizna** krzywej κ(u) jest skalarem, który definiuje, z jaką prędkością kątową (względem długości łuku krzywej) zmienia się położenie wersora stycznego. Krzywizna jest więc wielkością geometryczną, zależną wyłącznie od kształtu krzywej. W ogólnym przypadku krzywych 3D krzywiznę wyznacza się ze wzoru, gdzie występuje wektor drugiej pochodnej **P**”(*u*):

$$\kappa(u) = \frac{\|\boldsymbol{P}'(u) \times \boldsymbol{P}"(u)\|}{\|\boldsymbol{P}'(u)^3\|} \tag{4}$$

Wektor **P**"(*u*), wyznaczany przez różniczkowanie w sposób analogiczny jak wektor **P**'(*u*), jest skierowany we wklęsłą stronę krzywej, ale jego kierunek jest ściśle zależny od parametryzacji krzywej (Rysunek 6). W punktach, w których wektory pierwszej i drugiej pochodnej mają wspólny kierunek, krzywizna krzywej - zgodnie z wyżej podanym wzorem - ma wartość równą zeru. Punkty takie nazywamy **punktami wyprostowania** krzywej. W przypadku krzywych płaskich najczęściej są to **punkty przegięcia**.

2.4 Układ Freneta, wektor krzywizny i skręcenie krzywej

W modelowaniu 3D i w zastosowaniach CAD/CAM bardzo często zamiast krzywizny wykorzystuje się **wektor krzywizny**, ale aby go zdefiniować, należy wprowadzić pojęcia wersora normalnego i płaszczyzny ściśle stycznej do krzywej, związane z trójścianem Freneta (Rysunek 7).



*Rysunek 7. Trójścian Freneta: wersor styczny **t**=**t**(u), normalny **n**=**n**(u) i binormalny **b**=**b**(u)*

Trójścian (układ) Freneta definiuje się za pomocą trzech wzajemnie prostopadłych wersorów: wersora **stycznego t**(u), wersora **binormalnego b**(u), określonego wzorem

$$\boldsymbol{b}(u) = \frac{\boldsymbol{P}'(u) \times \boldsymbol{P}''(u)}{\|\boldsymbol{P}'(u) \times \boldsymbol{P}''(u)\|} \tag{5}$$

i wersora **normalnego n**(u), wyznaczanego jako iloczyn wektorowy dwu poprzednich wersorów:

$$\boldsymbol{n}(u) = \boldsymbol{b}(u) \times \boldsymbol{t}(u) \tag{6}$$

DEFINICJA 3

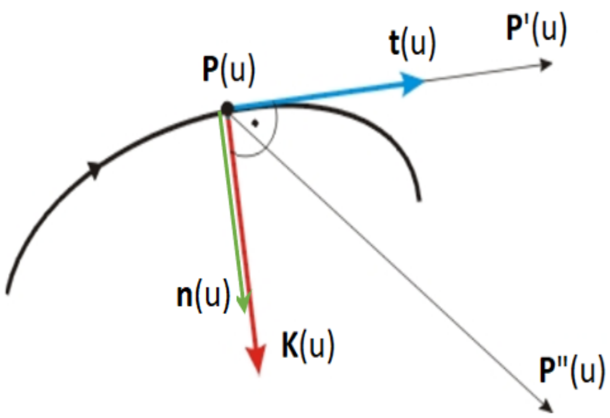
*Dla **trójścianu Freneta**, utworzonego przez wersory **t**=**t**(u), **b**=**b**(u) i **n**=**n**(u) definiuje się 3 płaszczyzny:*

- *płaszczyznę **ściśle styczną** - rozpiętą przez wersory **t**, **n***
- *płaszczyznę **prostującą** - rozpiętą przez wersory **t**, **b***
- *płaszczyznę **normalną** - rozpiętą przez wersory **n**, **b***

Teraz już można zdefiniować wektor krzywizny, który ma długość równą krzywiźnie krzywej:

$$\boldsymbol{K}(u) = \kappa(u)\boldsymbol{n}(u) \tag{7}$$

Wektor krzywizny niesie więcej informacji, niż sama krzywizna: oprócz tego, że jego długość pokazuje wartość krzywizny, jego kierunek i zwrot jest zgodny z kierunkiem wersora normalnego i jest on skierowany we wklęsłą stronę krzywej (Rysunek 8).



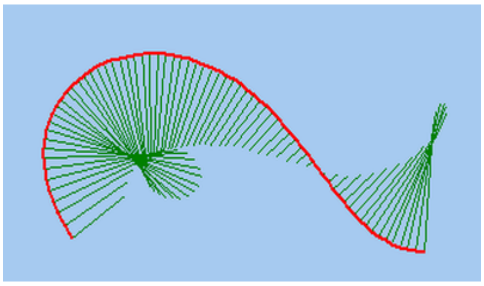
*Rysunek 8. Wektory pierwszej i drugiej pochodnej, wersor styczny **t**(u), wersor normalny **n**(u) i wektor krzywizny **K**(u) w wybranym punkcie krzywej gładkiej*

DEFINICJA 4

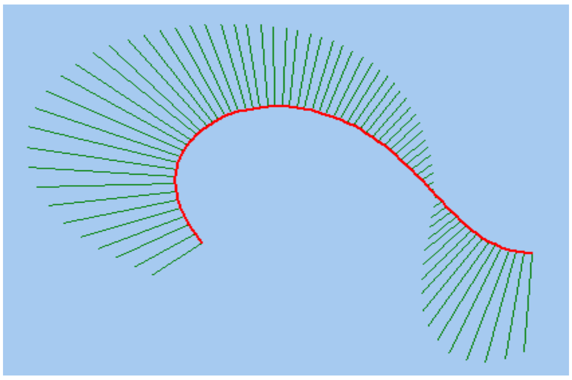
__Krzywizna__ jest skalarną miarą odchylenia krzywej od prostej stycznej i albo jest równa zeru (w punktach wyprostowania krzywej) albo jest mierzona w kierunku wersora normalnego i wtedy jest dodatnia.

__Wektor krzywizny__ jest wektorową miarą odchylenia krzywej od jej stycznej. Ma on długość równą krzywiźnie krzywej i albo jest wektorem zerowym, albo leży w płaszczyźnie ściśle stycznej do krzywej, jest prostopadły do wersora stycznego t(u) i skierowany we wklęsłą stronę krzywej.

Wektor krzywizny krzywej wyraźnie pokazuje wszelkie niuanse związane ze zmianą krzywizny, których nie da



Rysunek 10. Wykres przeskalowanego wektora krzywizny



Rysunek 9. Odwrócony i przeskalowany wykres wektora krzywizny

się dostrzec gołym okiem, a które powodują, że krzywa nie ma pożądanego, gładkiego kształtu, bez raptownych zmian krzywizny. Wykres wektora krzywizny przeskalowanego i wyświetlonego z zadaną gęstością wzdłuż krzywej może mieć postać jak na Rys. 9. Na ogół jednak w systemach CAD wyświetla się wykres wektora przeciwnego do wektora krzywizny, gdyż jest on znacznie czytelniejszy (Rys. 10).

Podsumujmy więc ostatecznie:
Dla krzywej, która w analizowanym punkcie nie jest płaska, czyli odchyla się od swojej płaszczyzny stycznej, można dodatkowo na bazie trójścianu Freneta i wektorów pochodnych aż do **P**’’’(u) włącznie zdefiniować pojęcia skręcenia krzywej (zgodne z intuicyjnym rozumieniem tego pojęcia) i wektora skręcenia:

DEFINICJA 5

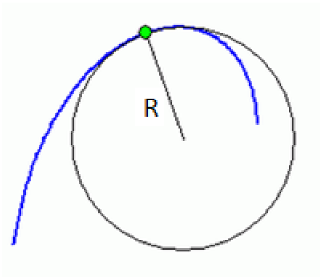
__Skręcenie__ krzywej jest skalarną miarą odchylenia krzywej od płaszczyzny ściśle stycznej i jest mierzone w kierunku wersora binormalnego. Skręcenie krzywej jest dodatnie, jeśli krzywa kieruje się w stronę wersora binormalnego i ujemne w przypadku przeciwnym. Skręcenie krzywej płaskiej = 0.

__Wektor skręcenia__ jest wektorową miarą odchylenia krzywej od jej płaszczyzny ściśle stycznej. Ma on długość równą modułowi skręcenia krzywej, kierunek wersora binormalnego, a jego zwrot pokazuje, w którą stronę krzywa odchyla się od płaszczyzny ściśle stycznej.

Z pojęciem krzywizny związane jest pojęcie okręgu ściśle stycznego, który - spośród nieskończenie wielu okręgów stycznych w danym punkcie do krzywej i leżących w jej płaszczyźnie ściśle stycznej jest okręgiem najbardziej zbliżonym krzywizną do krzywej, najlepiej do niej "przylegającym". Promień okręgu ściśle stycznego, nazywany **promieniem krzywizny**, jest odwrotnością krzywizny krzywej w danym punkcie: im większa krzywizna, tym mniejszy promień krzywizny i odwrotnie.

$$R = R(u) = \frac{1}{\kappa(u)} \tag{8}$$

Okręgu ściśle stycznego nie można wyznaczyć w punktach wyprostowania krzywej, gdyż miałby tam promień nieskończony. Dlatego promień krzywizny jest mniej uniwersalny niż krzywizna, którą można określić we wszystkich punktach krzywej gładkiej i dlatego też do oceny własności krzywej zwykle stosuje się wykres wektora krzywizny.



Rysunek 11. Okrąg ściśle styczny do krzywej w wybranym punkcie; krzywa przechodzi w punkcie styczności z jednej strony okręgu na drugą

UWAGA

A co to jest krzywa gładka? Przypomnijmy sobie definicję.

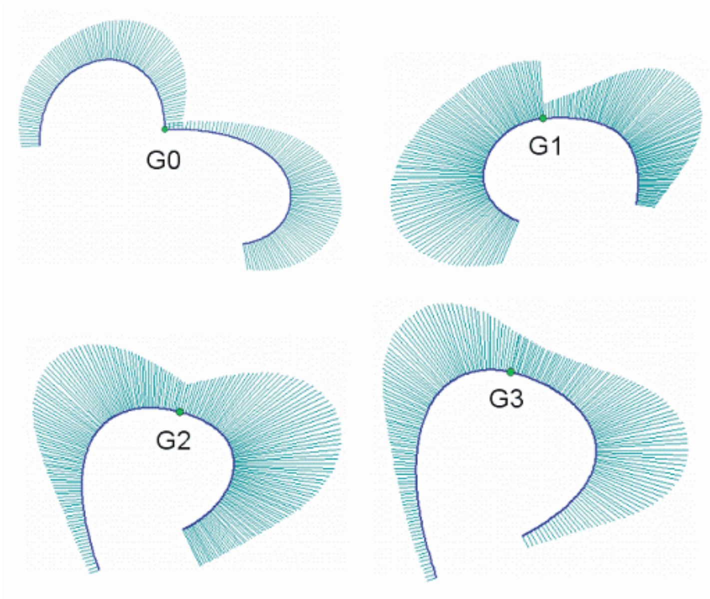
2.5 Klasy ciągłości krzywej

Pojęcie ciągłości krzywych jest fundamentalne w projektowaniu. Najczęściej spotyka się następujące klasy ciągłości:

- C0 (inaczej: G0) - jeśli dwie krzywe mają tylko punkt wspólny;
- C1 - jeśli na połączeniu krzywych wektor pierwszej pochodnej jest ciągły (krzywe mają wspólny wektor prędkości);
- G1 - jeśli na połączeniu krzywych nachylenie stycznej do krzywej jest ciągłe (krzywe mają wspólny wersor styczny);
- C2 - jeśli na połączeniu krzywych wektor drugiej pochodnej jest ciągły;
- G2 - jeśli na połączeniu krzywych nachylenie stycznej zmienia się w sposób płynny, a krzywizna jest ciągła;
- G3 - jeśli na połączeniu krzywych krzywizna zmienia się w sposób płynny.

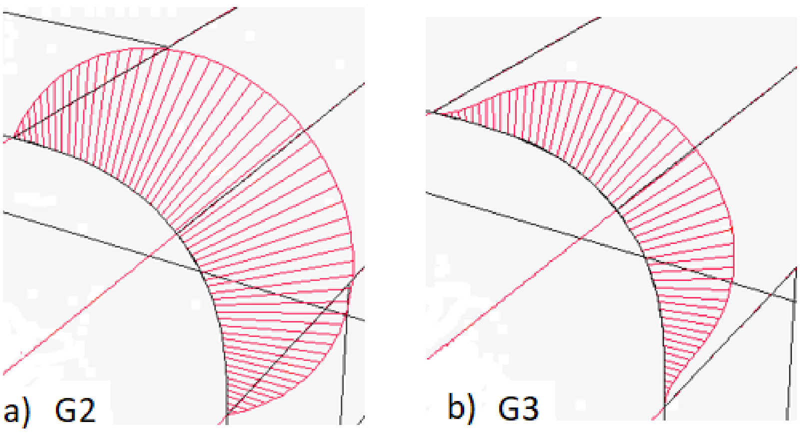
Ciągłość niezależna od parametryzacji, związana jedynie z kształtem (geometrią) krzywej, nosi nazwę **ciągłości geometrycznej** i oznaczana jest literą G. Ciągłość wektorów pochodnych w punkcie połączenia, ściśle związana z parametryzacją, jest ciągłością **analityczną** i oznaczamy ją literą C. Ciągłość analityczna jest silniejszym wymaganiem niż geometryczna: jeśli mamy ciągłość C^k, to na pewno jest to też ciągłość G^k, ale nie na odwrót.

Różne klasy ciągłości geometrycznej na połączeniu 2 krzywych zobrazowano na Rysunek 12 wraz z wykresami wektora krzywizny dla połączonych krzywych. Widzimy, że na połączeniu klasy G1 krzywizna zmienia się skokowo, dla G2 krzywizna nie zmienia swej wartości w punkcie połączenia, ale wykres krzywizny nie jest płynny w tym punkcie i dopiero w przypadku klasy G3 mamy płynny wykres krzywizny w punkcie połączenia. Wszystkie krzywe poza pierwszą są gładkie.



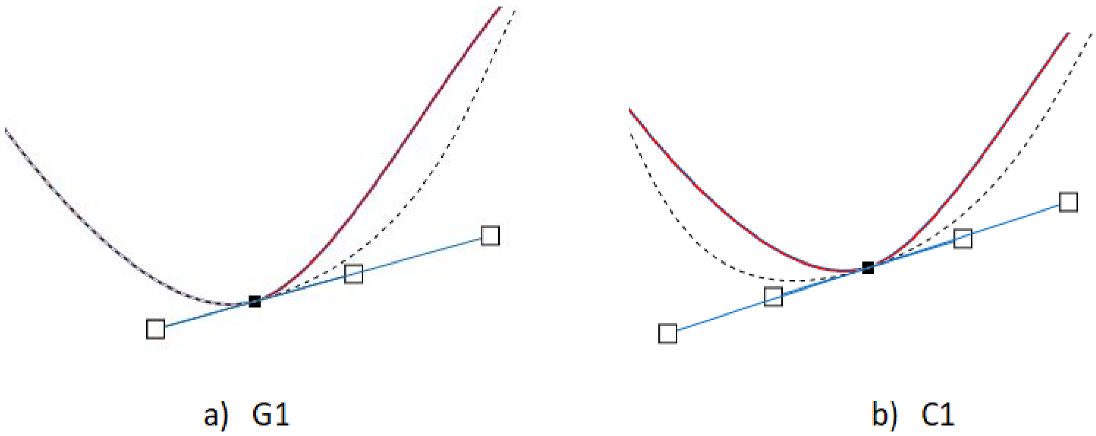
Rysunek 12. Klasy ciągłości geometrycznej krzywych: G0, G1-skokowa zmiana krzywizny, G2–ciągła krzywizna, G3- płynna krzywizna.

W większości zastosowań inżynierskich i we wzornictwie przemysłowym projektanci zadowalają się ciągłością G2 na połączeniu, jednak w stylizacjach o szczególnych wymaganiach (np. karoserie samochodów) narzuca się wymaganie G3. Bliżej wyjaśnimy te wymagania w dalszej części odnoszącej się do klas ciągłości powierzchni, ale już tutaj na przykładzie Rysunek 13 przyjrzyjmy się raz jeszcze różnicom między G2 a G3.



Rysunek 13. Porównanie ciągłości G2 i G3. W obu przypadkach na końcach krzywej krzywizna spada do zera i krzywa przechodzi w odcinki prostoliniowe, ale tylko w przypadku G3 to przejście jest płynne – styczna do wykresu krzywizny pokrywa się z prostą, w którą przechodzi.

Z drugie strony twórcom ilustracji, czy choćby zwykłym użytkownikom narzędzi rysunkowych Worda wystarcza ciągłość G1 na połączeniu krzywych, czyli wymaganie, by były one gładkie (ciągłość krzywizny nie jest potrzebna). Oznacza to, że można modyfikować jedną z krzywych bez zmiany drugiej (Rysunek 14a). Wraz z taką standardową opcją użytkownik dostaje możność równoczesnej zmiany obu połączonych krzywych, co jest równoważne zachowaniu ciągłości C1 (Rysunek 14b). Oczywiście zamiast określeń G1 i C1 używa się w takich aplikacjach pojęć bardziej zrozumiałych, choć często przy tym dziwnych (np. w Wordzie: punkt gładki – oznacza C1, punkt prosty – G1, punkt narożny – G0).



Rysunek 14. Porównanie klasy G1 (geometrycznej) z klasą C1 (analityczną). Odcinki prostych po obu stronach punktu połączenia odpowiadają przeskalowanym wektorom prędkości połączonych krzywych. Linią przerywaną zaznaczono nowe położenie krzywych po wydłużeniu wektora prędkości dla krzywej prawostronnej. W przypadku b) wektor prędkości dla krzywej lewostronnej automatycznie się do wektora prawostronnego dopasowuje i zmiana kształtu (wybrzuszenia) krzywej następuje po obu stronach.

3 Krzywe wielomianowe 3 i 2 stopnia

3.1 Reprezentacja Hermite'a

Krzywa wielomianowa trzeciego stopnia jest najczęściej stosowanym segmentem krzywej, z którego buduje się dowolnie złożone krzywe, zarówno w aplikacjach rysunkowych (rastrowych i wektorowych), jak i we wszelkiego rodzaju modelerach - służących do modelowania kształtów w systemach CAD/CAM i w systemach animacji komputerowej. Można powiedzieć bez żadnej przesady, że jest to najbardziej popularny "kawałek" krzywej, który stanowi podstawę matematycznej reprezentacji tego wszystkiego, co widzimy w animacji komputerowej i tego, czym posługujemy się na co dzień jako wytworami wzornictwa przemysłowego. Krzywa taka jest na tyle wysokiego stopnia, że może być krzywą przestrzenną i może mieć jeden lub dwa punkty przegięcia, a nawet ostrze. Zarazem jest na tyle niskiego stopnia, że umożliwia bardzo proste i szybkie obliczenia i jest wygodna jako element do konstruowania złożonych krzywych.

Pojedynczy łuk krzywej wielomianowej trzeciego stopnia można zdefiniować ogólnym wzorem

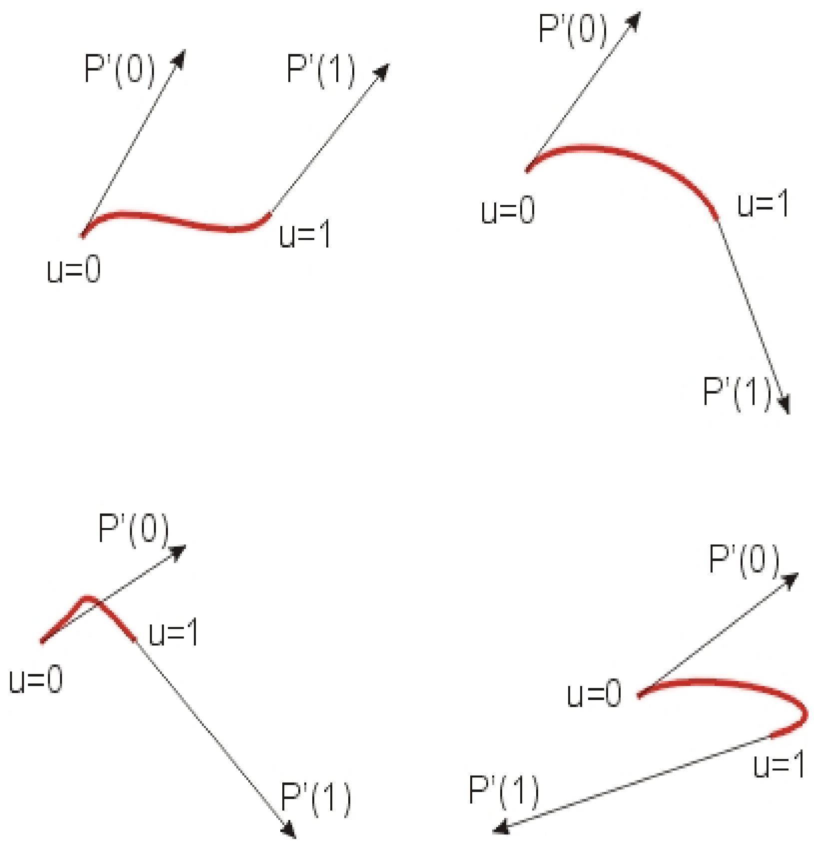
$$\mathbf{P}(u) = \mathbf{A}_3 u^3 + \mathbf{A}_2 u^2 + \mathbf{A}_1 u + \mathbf{A}_0$$

(8)

w którym cztery wielkości A_i są wektorami 2D lub 3D nie mającymi żadnej interpretacji geometrycznej.
Można go też zdefiniować za pomocą czterech innych wektorów: dwóch punktów krańcowych i wektorów pochodnych w tych punktach. Jest to tzw. reprezentacja Hermite'a, mająca znaczenie geometryczne: wektory pochodnych pokazują, w jakim kierunku poruszamy się po krzywej i z jaką prędkością. Im bardziej wydłużymy wektory pochodnych, tym bardziej krzywa się "wybrzuszy" - bo długość toru musi wzrosnąć, skoro ma być na nim większa prędkość.

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{u}) = (2\mathrm{u}^3 - 3\mathrm{u}^2 + 1) \cdot \mathbf{P}(0) + (-2\mathrm{u}^3 + 3\mathrm{u}^2) \cdot \mathbf{P}(1) + (\mathrm{u}^3 - 2\mathrm{u}^2 + \mathrm{u}) \cdot \mathbf{P}'(0) + (\mathrm{u}^3 - \mathrm{u}^2) \cdot \mathbf{P}'(1)$$

(9)



Rysunek 15. Przykłady różnych segmentów wielomianowych trzeciego stopnia w reprezentacji Hermite'a. Do wyznaczenia krzywej służą punkty krańcowe krzywej i wektory pochodnych w tych punktach.

Zależności pomiędzy obiema reprezentacjami opisują wzory:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_0 &= \mathbf{P}(0) \\
\mathbf{A}_1 &= \mathbf{P}'(0) \\
\mathbf{A}_2 &= -3\mathbf{P}(0) + 3\mathbf{P}(1) - 2\mathbf{P}'(0) - \mathbf{P}'(1) \\
\mathbf{A}_3 &= 2\mathbf{P}(0) - 2\mathbf{P}(1) + \mathbf{P}'(0) + \mathbf{P}'(1)
\end{aligned}$$

3.2 Reprezentacja Béziera

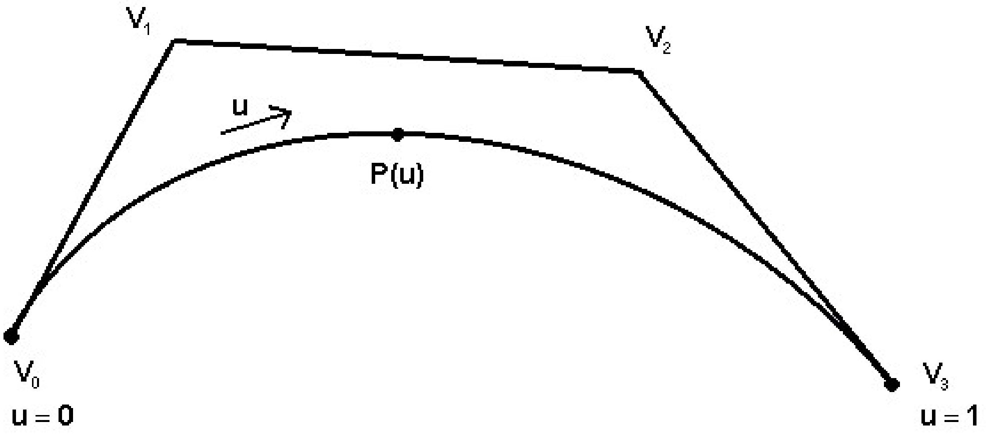
Projektowanie krzywych za pomocą matematycznych wzorów wielomianowych nie jest w praktyce możliwe - bo niemożliwe jest określenie wektorowych współczynników niemających żadnej interpretacji geometrycznej. Możliwość komputerowego projektowania krzywych i powierzchni zawdzięczamy geniuszowi francuskiego matematyka i inżyniera Pierre'a Bézier (Rysunek 16).

Rysunek 16. Pierre Bézier (1910-1999), karoseria Renault zaprojektowana jego metodą i odręczny rysunek wykreślony przez Béziera za pomocą jego krzywych.

Pracując w Renault nad projektowaniem karoserii opracował on pod koniec lat sześćdziesiątych metodę, która polega na definiowaniu krzywych za pomocą tzw. wierzchołków kontrolnych (obecnie często oznaczanych w różnych aplikacjach jako **CV** - ang. *Control Vertices*). **Wierzchołki kontrolne** bywają też nazywane punktami kontrolnymi, punktami sterującymi, a czasem obrazowo "uchwytami" krzywej (bo jak zobaczymy, można za nie "chwycić" krzywą i ją modelować). Reprezentacja za pomocą wierzchołków kontrolnych ma swoje bezpośrednie odniesienie do reprezentacji Hermite'a, ale jest wygodniejsza w zastosowaniach.

Krzywą Béziera 3 stopnia definiuje się za pomocą 4 wierzchołków kontrolnych $\mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ (Rysunek 17) zgodnie ze wzorem:

$$\mathbf{P}(u) = \mathbf{V}_0(1-u)^3 + \mathbf{V}_1 3u(1-u)^2 + \mathbf{V}_2 3u^2(1-u) + \mathbf{V}_3 u^3$$

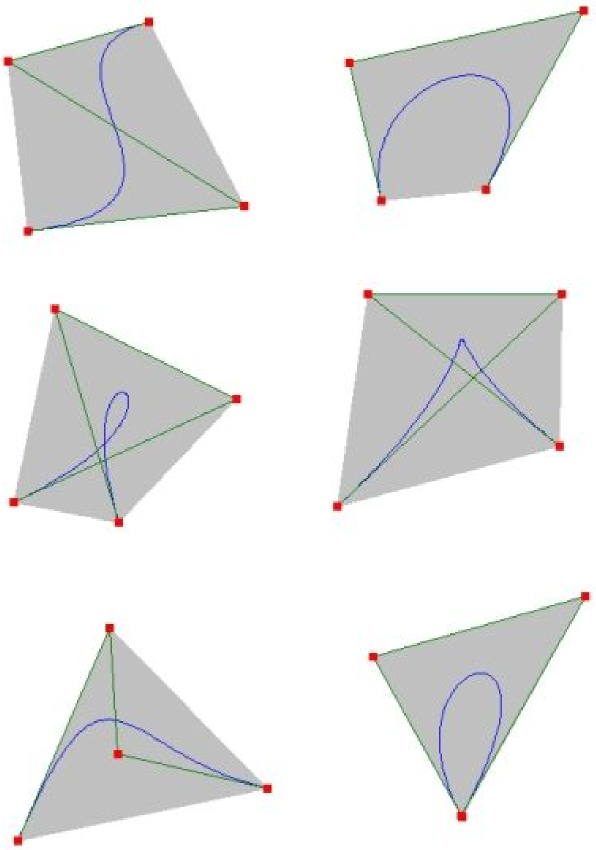


Rysunek 17. Krzywa wielomianowa 3 stopnia w reprezentacji Béziera. Jest jednoznacznie zdefiniowana wielobokiem kontrolnym o 3 bokach.

Krzywa taka ma następujące własności (Rysunek 18):

- Przechodzi przez punkty krańcowe wieloboku i jest styczna w tych punktach do krańcowych boków wieloboku.
- Leży całkowicie wewnątrz wypukłego wieloboku rozpiętego na wierzchołkach wieloboku Béziera.
- Odzwierciedla charakterystyczny kształt wieloboku i jest jego gładkim przybliżeniem. Jeśli wielobok jest wypukły, to odpowiadająca mu krzywa Béziera też jest wypukła.

- Aby przekształcić afinicznie krzywą Béziera (przesunąć, obrócić, przeskalować), wystarczy przekształcić afinicznie wielobok, a następnie wygenerować z niego krzywą Béziera.

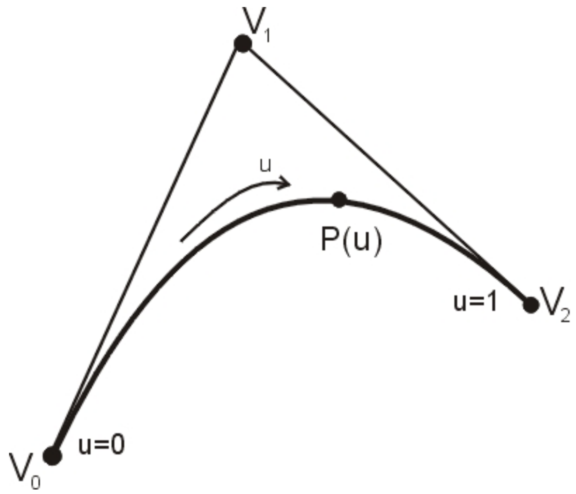


Rysunek 18. Przykłady krzywych Béziera 3 stopnia i ich wieloboków wypukłych.

Krzywa Béziera 3 stopnia może mieć jeden lub dwa punkty przegięcia, a nawet pętlę lub ostrze. Może być też krzywą przestrzenną, zatem rysunki powyższe można traktować jako rzuty krzywych 3D - wówczas, gdy jeden z wierzchołków kontrolnych leży poza płaszczyzną ekranu. Z tego właśnie powodu krzywe 3 stopnia są najbardziej uniwersalne i to z nich buduje się większość bardziej złożonych kształtów.

Krzywą Béziera 2 stopnia (Rysunek 19) definiuje się za pomocą 3 wierzchołków kontrolnych V_0, V_1, V_2 zgodnie ze wzorem analogicznym do tego dla krzywych 3 stopnia:

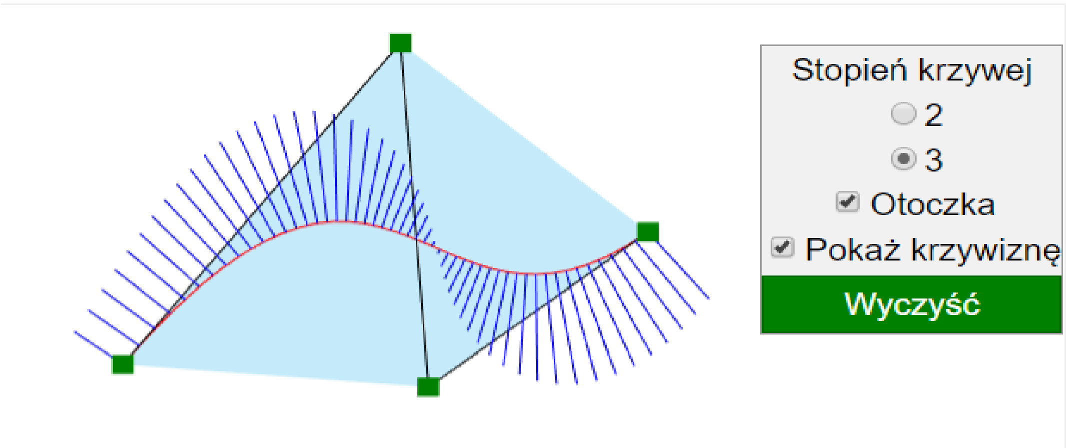
$$\mathbf{P}(u) = \mathbf{V}_0(1-u)^2 + \mathbf{V}_1 2u(1-u) + \mathbf{V}_2 u^2$$



Rysunek 19. Krzywa wielomianowa 2 stopnia w reprezentacji Béziera.

Krzywa taka jest łukiem paraboli. Jest ona zawsze płaska, bo 3 punkty wyznaczają płaszczyznę. Nie może mieć też punktów przegięcia - jest zawsze wypukła. Nie jest więc tak powszechnie użyteczna do konstruowania złożonych krzywych, jak krzywa trzeciego stopnia, ale jej uogólnienia, jak zobaczymy, pozwalają na konstruowanie krzywych stożkowych.

Zalety reprezentacji Béziera widoczne są wówczas, jeśli umożliwimy przesuwanie wierzchołków kontrolnych. Można wówczas w elastyczny sposób modyfikować kształt krzywej, zawsze mając pewność, że krzywa nie "ucieknie" nam poza ekran (bo leży wewnątrz wieloboku rozpiętego na wierzchołkach kontrolnych). Można to przećwiczyć na Aplikacji nr 1 (Rysunek 20), pozwalającej na modelowanie krzywych Béziera 2 lub 3 stopnia. Jak łatwo zauważyć, bardzo szybko udaje się uzyskać wprawę i intuicję w projektowaniu krzywych tym sposobem.



*Rysunek 20 - **Aplikacja nr 1.** Krzywa Béziera drugiego lub trzeciego stopnia. Narysuj krzywą stopnia 3 lub 2 wskazując myszką na ekranie kolejne wierzchołki wieloboku Béziera (program zmusi Cię do podania odpowiedniej liczby wierzchołków). Później możesz dowolnie przeciągać wierzchołki.*

3.3 Zależności między obu reprezentacjami

Reprezentacja Béziera ma ścisły związek geometryczny z reprezentacją Hermite'a. Mając daną reprezentację Hermite'a krzywej 3 stopnia, wierzchołki wieloboku Béziera reprezentującego tę krzywą można wyznaczyć z zależności:

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{P}(0)$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{P}(0) + \frac{1}{3} \cdot \mathbf{P}'(0)$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{P}(1) - \frac{1}{3} \cdot \mathbf{P}'(1)$$

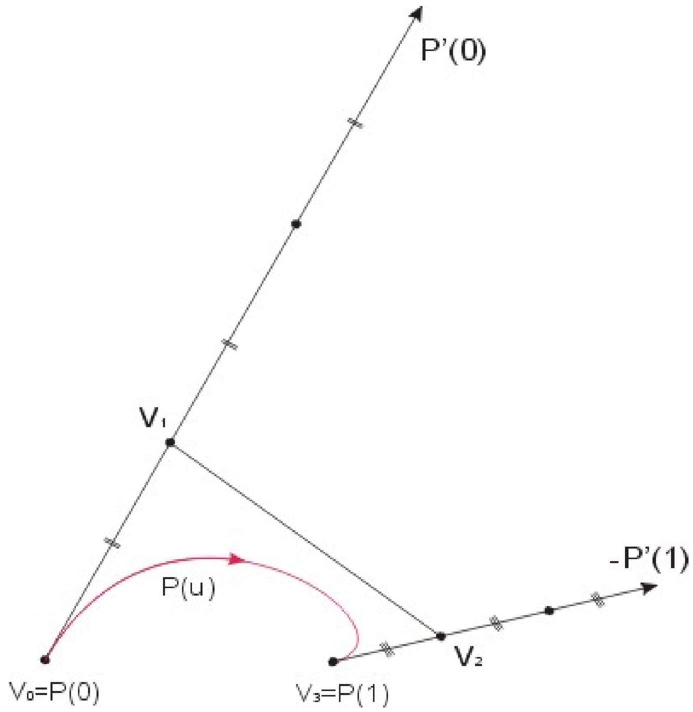
$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{P}(1)$$

i odwrotnie:

$$\mathbf{P}'(0) = 3(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)$$

$$\mathbf{P}'(1) = 3(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2)$$

co obrazuje Rysunek 21:



Rysunek 21. Zależność geometryczna między reprezentacją Hermite'a a reprezentacją Béziera: wektory pochodnych są 3 razy dłuższe niż odpowiednie boki wieloboku; należy zwrócić uwagę na zwrot wektora P'(1).

Natomiast przejście z wieloboku Béziera do reprezentacji wielomianowej ma postać:

$$\mathbf{A_0} = \mathbf{V_0}$$

$$\mathbf{A_1} = 3(\mathbf{V_1} - \mathbf{V_0})$$

$$\mathbf{A_2} = 3(\mathbf{V_2} - 2\mathbf{V_1} + \mathbf{V_0})$$

$$\mathbf{A_3} = (\mathbf{V_3} - \mathbf{V_2}) - 2(\mathbf{V_2} - \mathbf{V_1}) + (\mathbf{V_1} - \mathbf{V_0}) = \mathbf{V_3} - 3\mathbf{V_2} + 3\mathbf{V_1} - \mathbf{V_0}$$

Analogiczne zależności można łatwo wyprowadzić dla krzywych 2 stopnia. Wektory pochodnych są w tym przypadku dwa razy dłuższe od odpowiednich boków wieloboku.

4 Krzywe Béziera dowolnego stopnia

4.1 Funkcje Bernsteina i krzywe wielomianowe Béziera

Wiemy już, że krzywą Béziera 3 stopnia opisuje funkcja wektorowa:

$$\mathbf{P}(u) = \mathbf{V_0}(1-u)^3 + \mathbf{V_1}3u(1-u)^2 + \mathbf{V_2}3u^2(1-u) + \mathbf{V_3}u^3$$

Można ją jednak zapisać inaczej:

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{V_i} \cdot B_{i,3}(u)\ ; \qquad 0 \leq u \leq 1$$

gdzie fu

$$B_{1,3}(u) = \binom{3}{i}(1-u)^{3-i}u^i \ \ ; \ \ 0 \leq u \leq 1$$

są szczególnym przypadkiem znanych z matematyki funkcji Bernsteina (stosowanych w dowodzie twierdzenia Weierstrassa o przybliżeniu funkcji ciągłych), które mogą być dowolnego, n-tego stopnia:

$$B_{i,n}(u) = \binom{n}{i}(1-u)^{n-i}u^i \ \ ; \quad 0 \leq u \leq 1$$

Dla funkcji Bernsteina Pierre Bézier w genialny, nowatorski sposób znalazł jednak zupełnie inne, bardzo praktyczne zastosowanie, gdyż wykorzystał je do definiowania krzywych dowolnego stopnia, będących uogólnieniem krzywych 2 i 3 stopnia. Taka krzywa zdefiniowana jest dowolną liczbą wierzchołków kontrolnych (Rysunek 22).

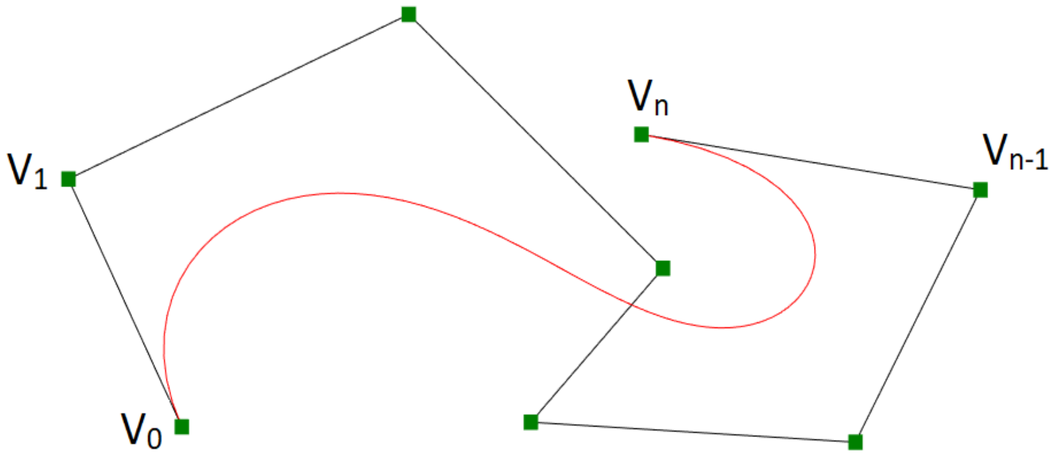
$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{V_i} \cdot B_{i,n}(u) \ \ ; \quad 0 \leq u \leq 1$$

Jeśli ponumerujemy je od 0 do n (Rysunek 22), to krzywa jest stopnia n i określona jest wzorem:

gdzie V_0, V_1, … , V_n są wierzchołkami kontrolnymi krzywej, a funkcje Bernsteina n-tego stopnia pełnią rolę współczynników wagowych przy wierzchołkach. Przykłady funkcji Bernsteina 1, 2 i 3 stopnia przedstawia Rysunek 23.

Funkcje Bernsteina mają następujące własności:

1. są zawsze dodatnie w całym przedziale $0 < u < 1$, a to oznacza, że przesunięcie pojedynczego wierzchołka wieloboku wpływa na zmianę kształtu całej krzywej;

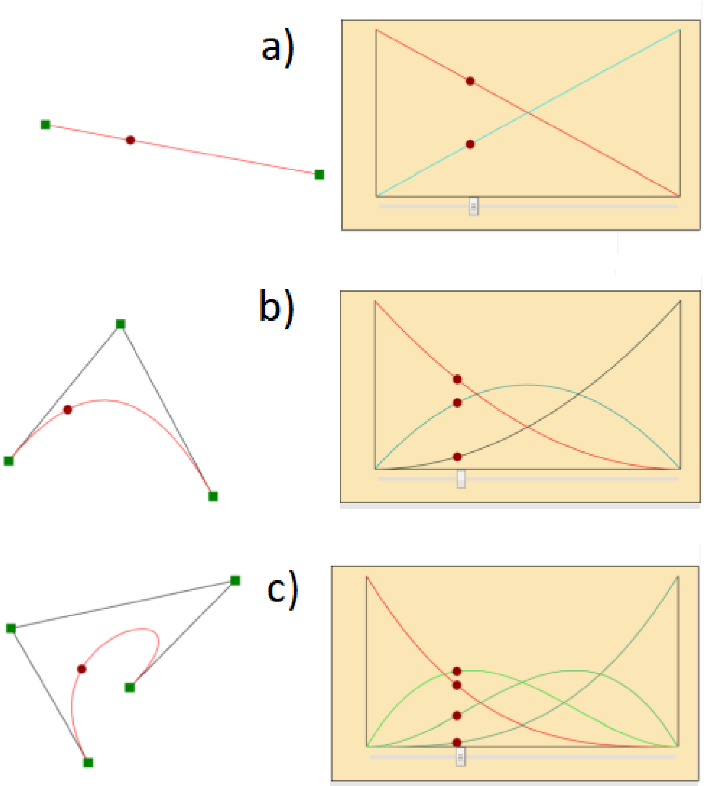


Rysunek 22. Krzywa Béziera zdefiniowana dowolną liczbą wierzchołków, ponumerowanych od 0 do n. Wielobok ma więc n boków i krzywa jest stopnia n.

UWAGA

*Jeśli wielobok kontrolny ma n+1 wierzchołków, czyli **n boków**, to krzywa Béziera jest **stopnia n**.*

2. suma ich dla dowolnej wartości u jest tożsamościowo równa 1, co w połączeniu z własnością 1 oznacza, że każdy punkt krzywej jest średnią ważoną wszystkich wierzchołków kontrolnych (współczynnikami wagowymi są funkcje Bernsteina) i to w taki sposób, że leży on wewnątrz wypukłego wieloboku rozpiętego na wszystkich wierzchołkach.



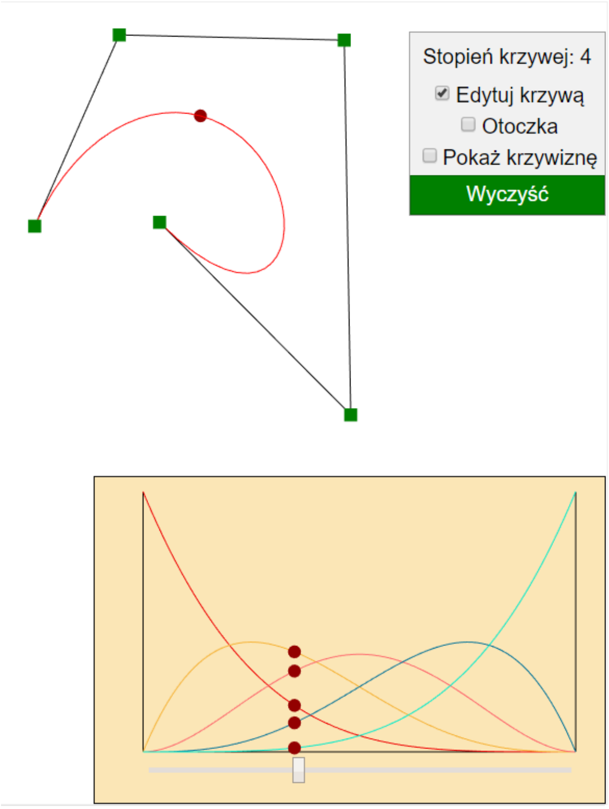
Rysunek 23 – Aplikacja nr 2. Krzywe Béziera i funkcje Bernsteina: a) 1 stopnia, b) 2 stopnia, c) 3 stopnia. Punkt zaznaczony na krzywej obliczany jest na podstawie wierzchołków kontrolnych i wartości funkcji zaznaczonych na wykresach.

Jak łatwo sprawdzić, podane wcześniej krzywe Béziera 2 stopnia są również szczególnym przypadkiem krzywych stopnia n. I jak widać na Rysunek 23, krzywą Béziera pierwszego stopnia jest…odcinek.

PRZYKŁAD

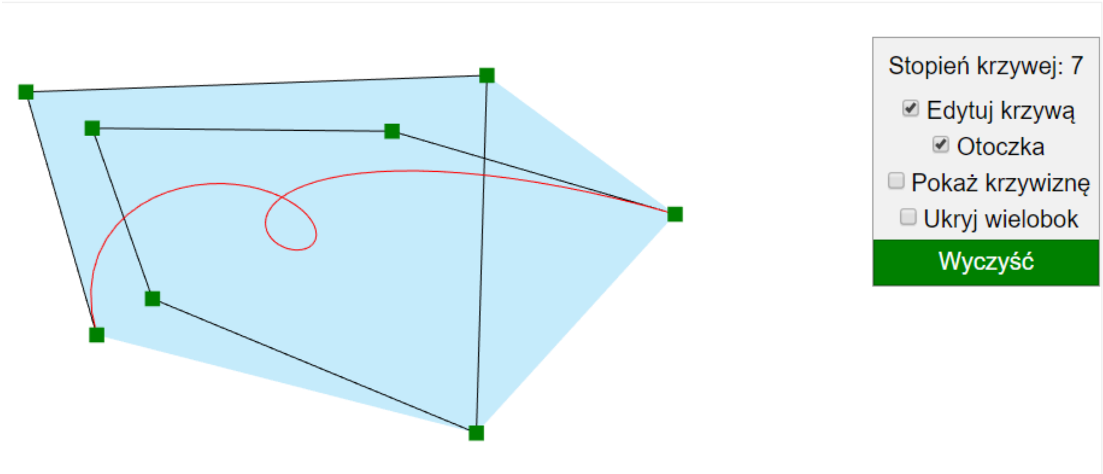
Napisz wzory opisujące krzywą Béziera 1. stopnia

Do ilustracji własności funkcji Bernsteina i krzywych Béziera dowolnego stopnia służy Aplikacja nr 2, którą przedstawia Rysunek 24. Zaznaczając wierzchołki na ekranie, można zamodelować krzywą Béziera dowolnego stopnia i obejrzeć funkcje Bernsteina składające się na jej definicję. Stopień krzywej wynika z liczby podanych wierzchołków i ukazuje się w okienku. Dodatkowo po włączeniu "Edytuj krzywą" można dowolnie przeciągać wierzchołki.



*Rysunek 24 - **Aplikacja nr 2**. Krzywa Béziera i funkcje Bernsteina różnych stopni. Wybierając kliknięciem na ekranie kolejne wierzchołki kontrolne, otrzymujemy krzywą coraz wyższego stopnia, dla których suwakiem można zmieniać wartość parametru u.*

Można też modelować krzywą przy wyłączonym rysunku wieloboku, jak pokazuje Aplikacja nr 3 (Rysunek 25). Sposób taki, choć mniej oczywisty, jest spotykany w niektórych modelerach.



*Rysunek 25 – **Aplikacja nr 3.** Modelowanie krzywej Béziera dowolnego stopnia.*

Do wyznaczania funkcji Bernsteina najlepiej jest wykorzystać zależność rekurencyjną (i nie liczyć wszystkich silni od początku !):

$$\binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \qquad \binom{n}{i+1} = \frac{n-i}{i+1}\binom{n}{i}; \qquad i=2,\ldots,n$$

$$\binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \qquad \binom{n}{i+1} = \frac{n-i}{i+1}\binom{n}{i}; \qquad i = 2, \ldots, n$$

Stąd wynika tzw. **algorytm Kiciaka:**

DEFINICJA – Algorytm Kiciaka

```
s:=1-u;
P:=V0;   // P jest punktem pomocniczym
e:=u; b:=n;
for i:= 1 to n do begin
  P:=s*P+b*e*Vi;
  e:=e*u;
  b:=b*(n-i)/(i+1);
end;
// otrzymany w końcowej iteracji punkt P jest szukanym punktem P(u)
```

Należy podkreślić, że krzywe Béziera wysokiego stopnia nie są zbyt wygodne w modelowaniu - jak łatwo zauważyć, coraz trudniej przewidzieć ich kształt na podstawie wieloboku i coraz mniej są do tego wieloboku zbliżone. Łatwiej też w nich wprowadzić niepożądane zafalowania. Dlatego zaleca się, by w projektowaniu nie używać krzywych Béziera stopnia wyższego niż 7.

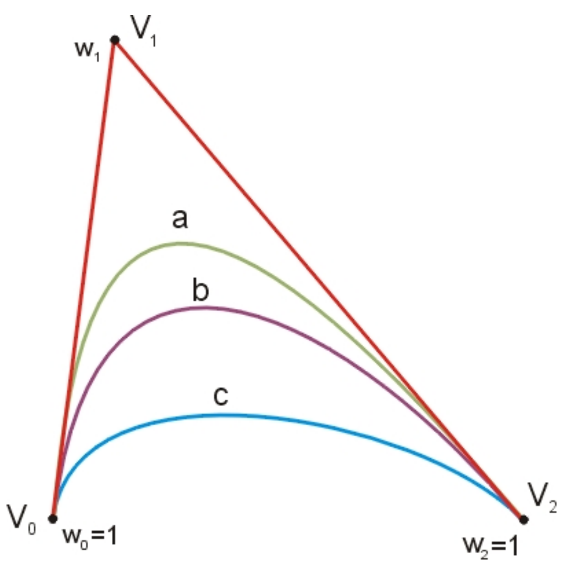
4.2 Wymierne krzywe Béziera

W wielu zastosowaniach inżynierskich zachodzi potrzeba projektowania krzywych stożkowych, a zwłaszcza łuków okręgów. Jak łatwo zauważyć, wielomianowe krzywe parametryczne 2 stopnia nie mogą służyć do reprezentowania dowolnych krzywych stożkowych, bo zawsze są parabolami. Okazuje się jednak, że niezwykła uniwersalność metody Béziera pozwala na rozwiązanie i tego problemu: krzywą możemy zdefiniować za pomocą wierzchołków kontrolnych i związanych z nimi współczynników wagowych, za pomocą uogólnionego wzoru Béziera:

$$\mathbf{P}(u) = \frac{w_0\mathbf{V}_0(1-u)^2 + 2w_1\mathbf{V_1}u(u-1) + w_2\mathbf{V_2}u^2}{w_0(1-u)^2 + 2w_1u(1-u) + w_2u^2} \quad ; \quad 0 \le u \le 1$$

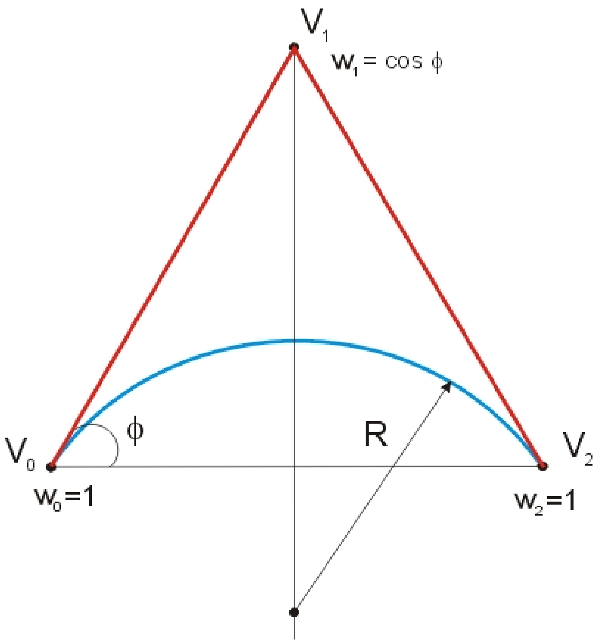
Jest to tzw. wymierna (zdefiniowana ilorazem, ang. rational) krzywa Béziera; każdy wierzchołek kontrolny V_i ma związaną z nim dodatnią wagę (współczynnik wagowy) w_i. W zależności od wagi wierzchołka środkowego otrzymujemy (Rysunek 26) łuk hiperboli ($w_1 > 1$), łuk paraboli ($w_1 = 1$) lub łuk elipsy ($0 < w_1 < 1$).

Można sprawdzić, że jak z powyższego wzoru wynika, przeskalowanie wszystkich wag nie zmienia kształtu krzywej. Jeśli zaś wszystkie wagi są sobie równe, to krzywa wymierna staje się krzywą wielomianową (bo suma funkcji Bernsteina, jaką otrzymamy wówczas w mianowniku, jest równa 1).

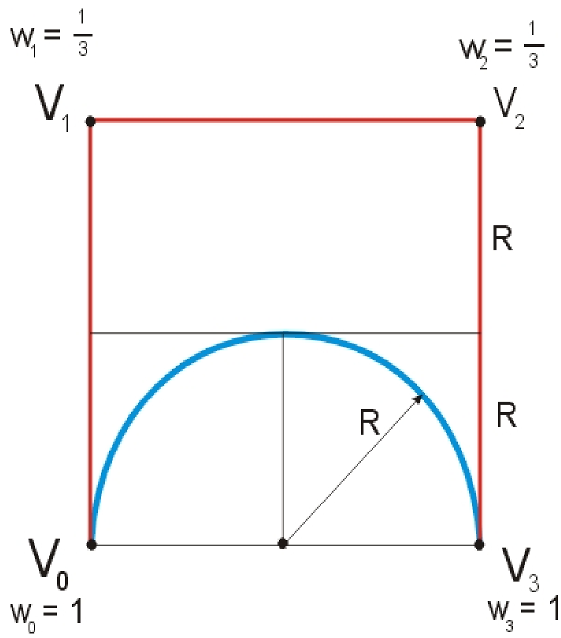


Rysunek 26. Krzywe stożkowe jako wymierne krzywe Béziera. Obok wierzchołków kontrolnych zaznaczono wartości ich wag. W zależności od wagi wierzchołka środkowego otrzymujemy łuk: a) hiperboli. b) paraboli lub c) elipsy.

Łuk okręgu jest szczególnym przypadkiem łuku elipsy; poniżej podano dwa sposoby reprezentowania łuku okręgu za pomocą wierzchołków kontrolnych i ich wag. Sposób, który przedstawia Rysunek 27 nie nadaje się dla półokręgu, ale okazuje się, że półokrąg można przedstawić jako krzywą stopnia 3 (Rysunek 28).



Rysunek 27. Łuk okręgu jako wymierna krzywa Béziera 2 stopnia. Obok wierzchołków kontrolnych zaznaczono wartości współczynników wagowych.

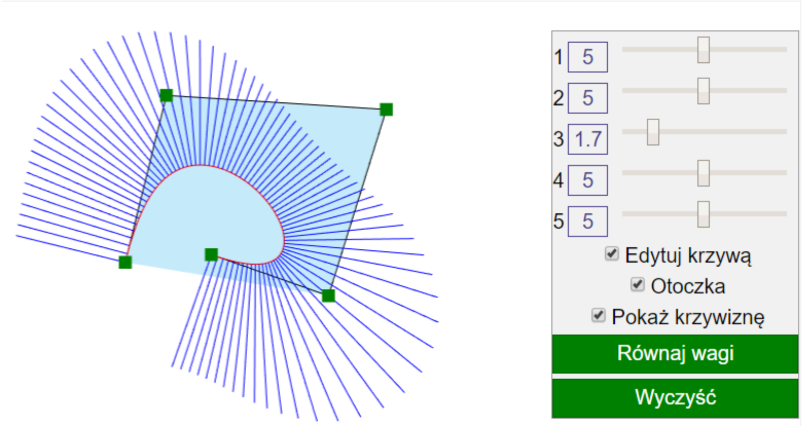


Rysunek 28. Półokrąg jako wymierna krzywa Béziera 3 stopnia. Obok wierzchołków kontrolnych zaznaczono wartości współczynników wagowych.

Krzywe wymierne mogą być dowolnego stopnia, zgodnie ze wzorem:

$$\mathbf{P}(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \mathbf{V_i} B_{i,n}(u)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(u)} \;\; ; \;\; 0 \leq u \leq 1$$

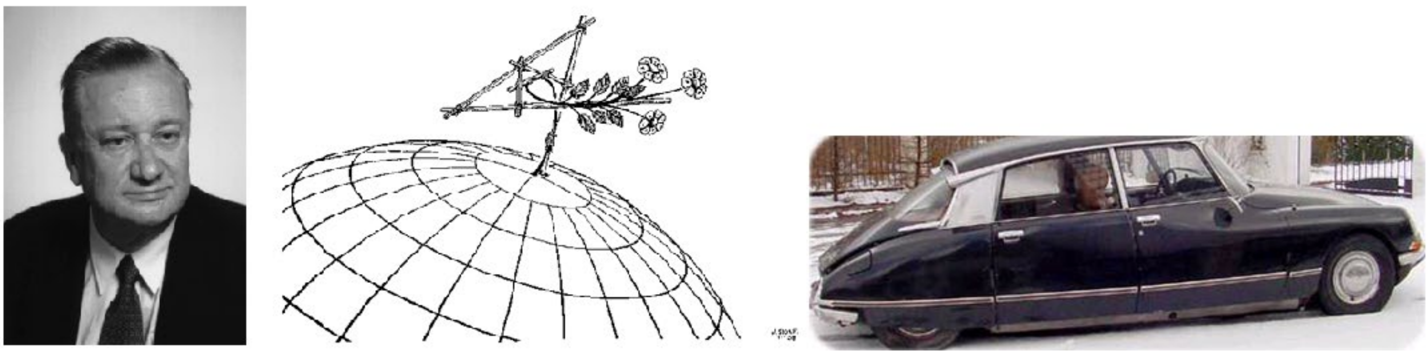
W takich krzywych najbardziej przydatna jest możliwość modyfikacji kształtu krzywej bez zmiany wierzchołków kontrolnych. Pozwala to na bardziej subtelne modyfikowanie modelowanych kształtów. Zwiększając wagę wierzchołka powodujemy, że krzywa zbliża się do tego wierzchołka. Zasadę tę można wypróbować na poniższej Aplikacji nr 4 (Rysunek 29), analogicznej do Aplikacji nr 3.



*Rysunek 29 - **Aplikacja nr 4**. Modelowanie wymiernej krzywej Béziera dowolnego stopnia. Suwakiem można zmieniać wagi wierzchołków kontrolnych. Warto sprawdzić, że jeśli wszystkie wagi będą sobie równe, to niezależnie od ich wartości otrzymamy zawsze tę samą "zwykłą" krzywą wielomianową.*

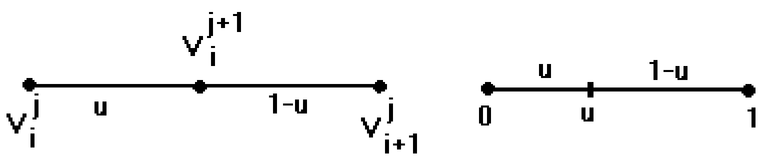
4.3 Algorytm de Casteljau

Prawie 10 lat wcześniej niż Bézier, geometryczną zasadę projektowania krzywych za pomocą wierzchołków kontrolnych opracował, pracując w firmie Citröen, francuski fizyk i matematyk Paul de Faget de Casteljau. Prace jego były jednak objęte tajemnicą, swoich wyników nie mógł w tamtym czasie opublikować. Prof. Bézier opracował swoją metodę zupełnie niezależnie od Paula de Casteljau i upowszechnił ją w r. 1972. Od tej pory krzywe reprezentowane za pomocą wierzchołków kontrolnych noszą nazwę krzywych Béziera. Prace de Castelau doczekały się publikacji parę lat później.

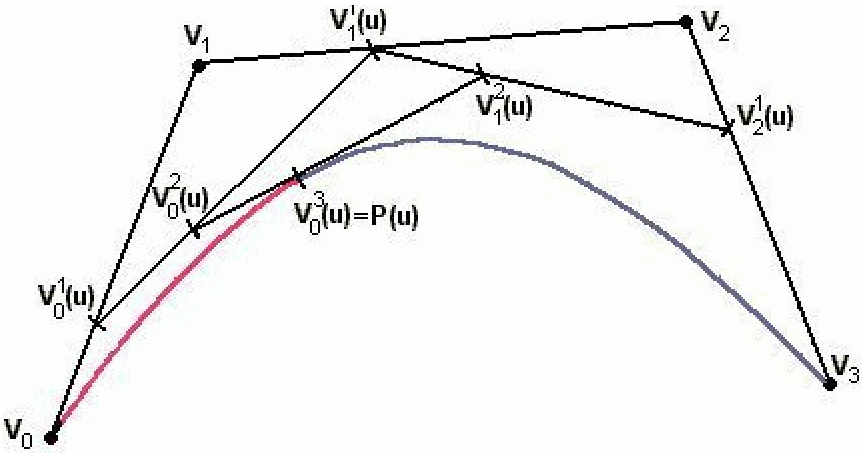


Rysunek 30. Paul de Faget de Casteljau (ur. 1930), jego odręczny rysunek ilustrujący metodę i karoseria Citroena zaprojektowana jego metodą.

Metoda de Casteljau, analogicznie jak metoda Béziera, służy do wyznaczania punktów na krzywych reprezentowanych wierzchołkami kontrolnymi, ale zasada wyznaczania punktów krzywej, choć bazuje na funkcjach Bernsteina, znana jest pod postacią czysto geometrycznej zasady podziału odcinka w stosunku *u*:(1-*u*). Aby wyznaczyć punkt krzywej odpowiadający parametrowi *u*, na kolejnych bokach wieloboku o *n* bokach wyznacza się punkty pośrednie dzielące te boki w stosunku *u*:(1-*u*).

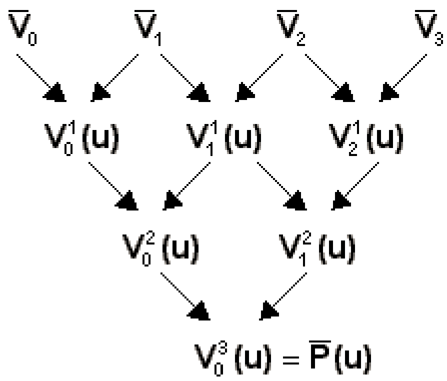


Wyznaczone punkty pośrednie tworzą wielobok o (n -1) bokach. Na jego bokach ponownie wyznacza się punkty pośrednie dzielące te boki w stosunku u :(1-u). Proces ten prowadzi się aż do chwili, gdy będzie można wyznaczyć tylko jeden punkt pośredni - jest on szukanym punktem **P**(u).



Rysunek 31. Zasada konstrukcji de Casteljau dla krzywej 3 stopnia.

Schemat postępowania dla krzywej 3 stopnia można zilustrować następująco (Rysunek 32):



Rysunek 32. Zasada konstrukcji de Casteljau dla krzywej 3 stopnia.

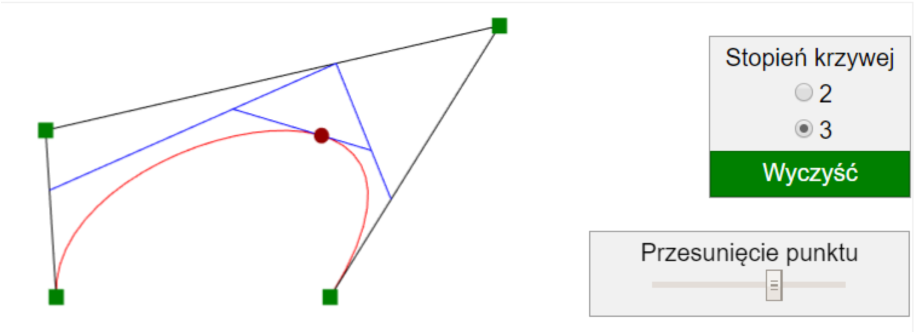
Schemat ten ma postać łatwą do uogólnienia na dowolną liczbę wierzchołków, czyli na krzywe dowolnego stopnia - tu raz jeszcze widać, jaką moc kryje w swej prostocie metoda wierzchołków kontrolnych. Sam zaś pomysł de Casteljau ma w sobie dodatkowo siłę wynikającą z rekurencji zastosowanej tu do geometrii: w wyniku dzielenia odcinków otrzymuje się w etapie końcowym dwa podwieloboki, przy czym dwie odpowiadające im krzywe (czerwona i niebieska na Rysunek 32) tworzą wynikową krzywą dla wieloboku zadanego.

Zasada ta pozwala więc na dwa możliwe sposoby wykorzystania metody de Casteljau do wyznaczania krzywej:

- **Metoda iteracyjna** polega na wyznaczaniu punktów krzywej wg podanego algorytmu dla kolejnych wartości parametru u, zmieniających się z zadanym krokiem.

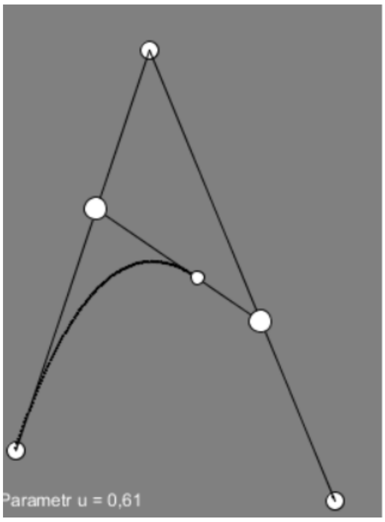
- **Metoda rekurencyjna** polega na wykorzystaniu algorytmu tylko dla wartości ***u*=0.5**, czyli wyłącznie na dzieleniu odcinków na pół: z danego wieloboku otrzymuje się punkt należący do krzywej i dwa podwieloboki, z każdego z nich dwa kolejne podwieloboki itd. - aż do momentu, gdy wyznaczone tym sposobem punkty krzywej będą dostatecznie blisko siebie.

Algorytm de Casteljau dla krzywych drugiego i trzeciego stopnia ilustruje Aplikacja nr 5 (Rysunek 33), w której możemy zmieniać suwakiem parametr *u* i obserwować przesuwającą się konstrukcję - również i tu można przełączać stopień krzywej - pomiędzy 2 a 3. Możemy też przeciągać myszką wierzchołki kontrolne.

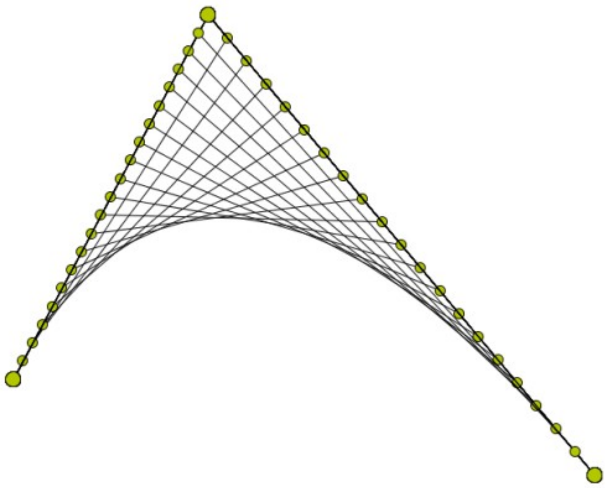


*Rysunek 33 – **Aplikacja nr 5**. Zasada konstrukcji krzywych 2 i 3 stopnia metodą de Casteljau w wersji iteracyjnej - suwakiem zmieniamy parametr u. Warto sprawdzić, jak będzie wyglądała konstrukcja dla wieloboków niewypukłych.*

Powyższą konstrukcję krzywej Beziera 2 stopnia, czyli paraboli, możemy też zaobserwować na poniższej animacji, a także na rysunku wizualizującym parabolę wyłącznie za pomocą wykreślonych stycznych:

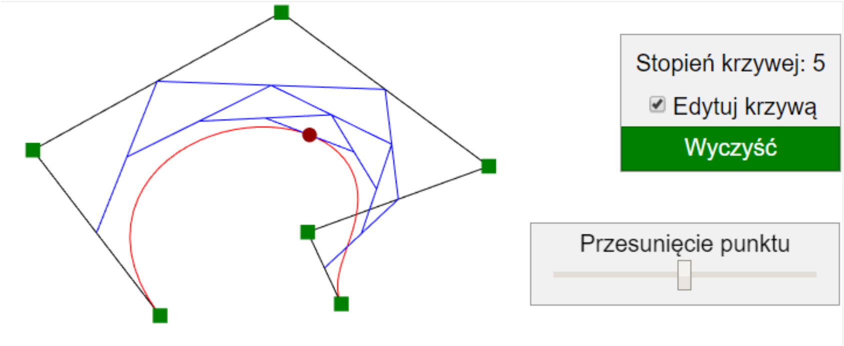


*Rysunek 35. Generowanie punktów paraboli metodą de Casteljau **(animowany gif).***



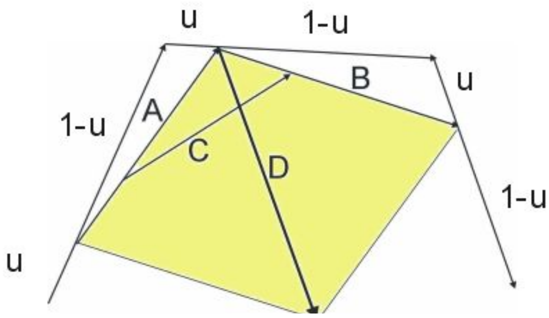
Rysunek 34. Zasada konstrukcji de Casteljau dla krzywej 2 stopnia - parabola jest obwiednią rodziny prostych.

Bardziej ogólną konstrukcję, dla krzywych dowolnego stopnia, prezentuje Aplikacja nr 6.



*Rysunek 36 – **Aplikacja nr 6.** Zasada konstrukcji krzywych Béziera dowolnego stopnia metodą de Casteljau (wersja iteracyjna).*

Algorytm de Casteljau posiada jeszcze głębsze znaczenie, niż wynikałoby to z powyższych konstrukcji. Okazuje się, że z jego pomocą można wyznaczać nie tylko punkty krzywej, ale także wektory pochodnych i krzywiznę krzywej.



Rysunek 37. Zasada wyznaczania wektorów pochodnych w konstrukcji de Casteljau dla krzywej dowolnego stopnia.

Rysunek 37 przedstawia ostatnie trzy kroki algorytmu de Casteljau i wektory wyznaczane w trakcie tych kroków (w szczególności gdy n=3, jest to schemat wszystkich kroków algorytmu).

Wektory pochodnych wyznacza się następująco (**A**, **B**, **C**, **D** są wektorami jak na rysunku, odpowiadającymi parametrowi *u*, zaś ***n* jest stopniem krzywej**):

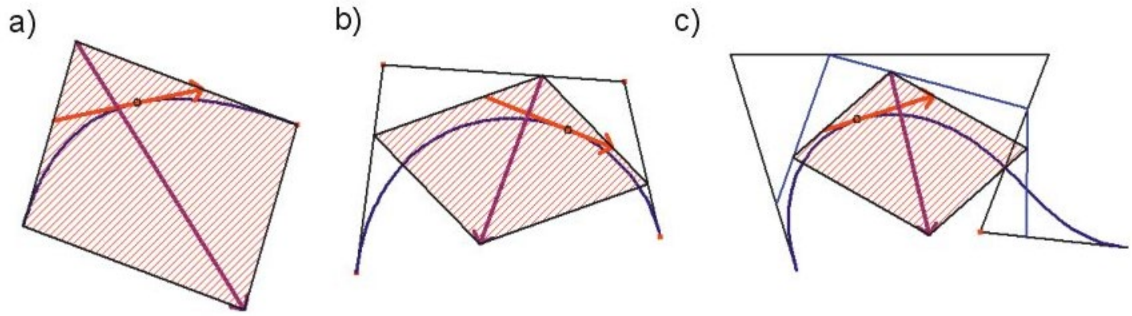
$$\mathbf{P}'(u) = n\mathbf{C}$$
$$\mathbf{P}''(u) = n(n-1)\mathbf{D}$$

natomiast **wartość krzywizny** wg wzoru:

$$\kappa(u) = \frac{(n-1)\cdot|\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}|}{n\cdot|\mathbf{C}|^3}$$

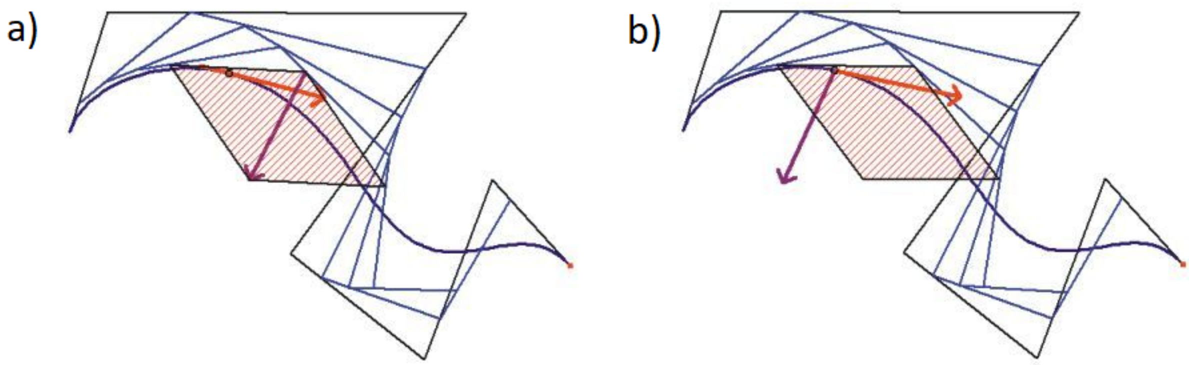
W liczniku występuje iloczyn wektorowy wektorów **A** i **B**, a to oznacza, że **krzywizna zależy od pola równoległoboku** zbudowanego na tych wektorach; zależy też długości wektora **C**. Podane zasady obowiązują dla dowolnego stopnia krzywej:

Warto zwrócić uwagę, że z powyższego rysunku jasno wynika, że wektor drugiej pochodnej dla krzywej 2 stopnia jest stały (co jest oczywiste, bo jest to druga pochodna wielomianu 2 stopnia), ale krzywizna już nie jest wielkością stałą, co też łatwo zauważyć.



Rysunek 38. Zasada wyznaczania wektorów pochodnych i krzywizny dla krzywej: a) drugiego stopnia - n=2, więc zaznaczone wektory są połową właściwych wektorów pochodnych; b) trzeciego stopnia; c) czwartego stopnia.

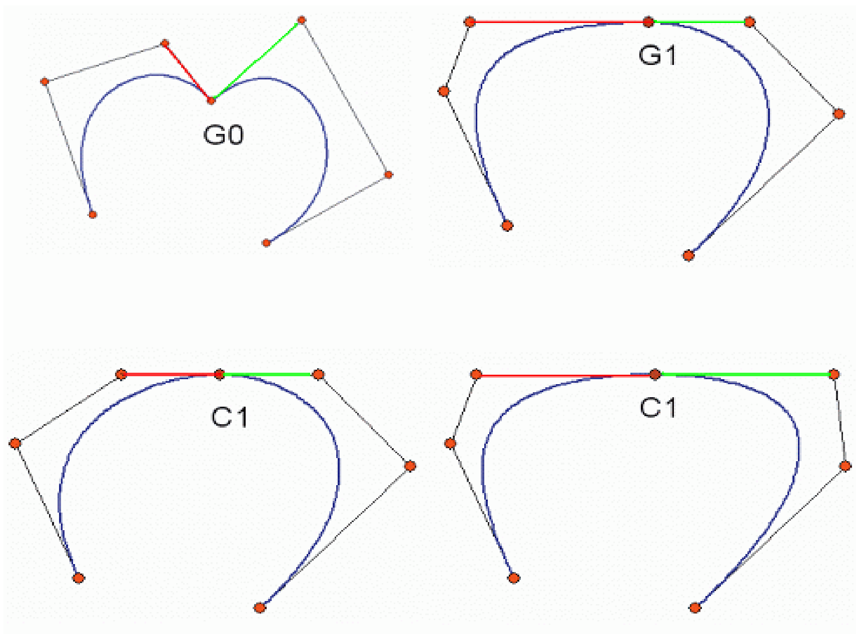
Należy też podkreślić, że wektory na powyższych rysunkach, będące wynikiem podanej konstrukcji, nie są zaczepione w punkcie, do którego się odnoszą, ale przeniesienie ich do tego punktu jest sprawą oczywistą:



Rysunek 39. Wektory pochodnych w metodzie de Casteljau: a) jako bezpośredni wynik konstrukcji równoległoboku; b) zaczepione w punkcie, do którego się odnoszą.

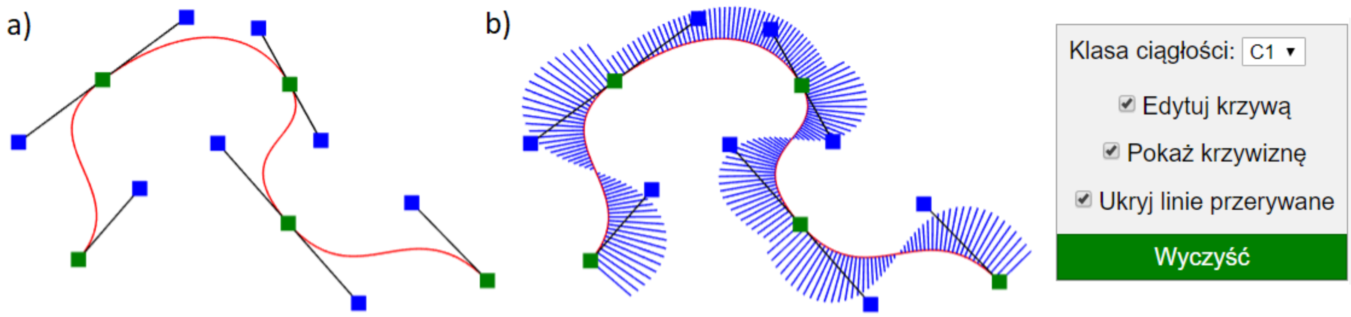
4.4 Krzywe interpolujące 3 stopnia klasy C1

Krzywe Béziera 3 stopnia przedstawione w poprzednich rozdziałach są powszechnie stosowane do rysowania gładkich krzywych w różnego rodzaju wektorowych aplikacjach rysunkowych (np. Corel Draw), a także w edytorach tekstu, takich jak Word. Wszelkie bardziej złożone gładkie krzywe buduje się w nich z zachowaniem ciągłości G1 lub C1, które objaśniono w rozdziale 1.5 i które możemy prześledzić na Rysunek 40 w odniesieniu do krzywych Béziera. Jeżeli wynikowa krzywa musi przechodzić przez zadane punkty, mamy do czynienia z interpolacją. Najprostsze **krzywe interpolujące** buduje się w tych aplikacjach z krzywych wielomianowych trzeciego stopnia z zachowaniem ciągłości C1 na ich połączeniu. Tak zdefiniowane krzywe wyznaczane są zgodnie z regułami Hermite'a; w tym celu najpierw muszą być wyliczone wektory pochodnych w punktach zadanych, co daje się wykonać dowolną lokalną metodą.



Rysunek 40. Zasady łączenia 2 krzywych Béziera z różnymi klasami ciągłości; kolorem czerwonym zaznaczono ostatni bok pierwszego wieloboku, kolorem zielonym - pierwszy bok drugiego wieloboku.

Tak zdefiniowane krzywe interpolujące mogą być reprezentowane za pomocą wierzchołków kontrolnych i modyfikowane lokalnie. Jest to najprostszy sposób modelowania gładkich krzywych, powszechny w narzędziach rysunkowych. Możliwa jest zmiana ciągłości wynikowej krzywej z C1 na G1 lub G0, jak pokazuje Aplikacja nr 7 (Rysunek 41). Po włączeniu "Edytuj krzywą" można dowolnie przeciągać węzły interpolacji (zielone), a także zmieniać wektory pochodnych, poruszając niebieskimi punktami, które są wierzchołkami kontrolnymi Béziera. Włączone linie przerywane pozwalają unaocznić wieloboki Béziera dla każdej kolejnej krzywej. Ważną rolę pełni opcja wyświetlania wektorów krzywizny - można sprawdzić, że krzywa klasy C1 (ani tym bardziej niższej klasy) nie ma – w ogólnym przypadku - ciągłej krzywizny.



*Rysunek 41 - **Aplikacja nr 7**. Krzywa interpolująca złożona z 4 krzywych 3 stopnia - klasę ciągłości w punktach połączenia krzywych z C1 na niższą można zmienić w okienku.*

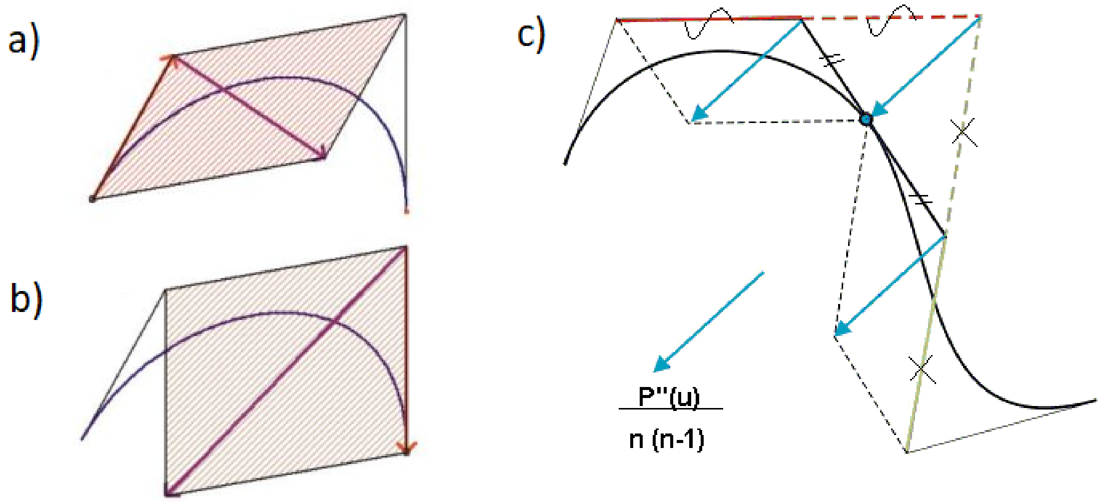
5 Krzywe B-sklejane i krzywe NURBS

W zastosowaniach inżynierskich krzywe o ciągłości C1 czy G1 nie są jednak wystarczające, mimo że są wizualnie gładkie. Na połączeniach segmentów występuje bowiem nieciągłość krzywizny (por. Rysunek 41), a to, jak zobaczymy w następnych rozdziałach, może wpływać niekorzystnie na wygląd powierzchni. Nie są też wygodne w projektowaniu pojedyncze krzywe Béziera wysokiego stopnia.

W kilka lat po publikacjach Béziera amerykańscy naukowcy z Utah znaleźli rozwiązanie tego problemu - uogólnili metodę Béziera w taki sposób, by za pomocą wierzchołków kontrolnych można było projektować złożone krzywe niewysokiego stopnia, za to o dowolnym stopniu złożoności i do tego maksymalnie gładkie. Krzywe takie są złożone z krzywych Béziera, ale połączonych ze sobą z zachowaniem maksymalnie wysokiej klasy ciągłości w punktach połączenia (co oznacza, że krzywe stopnia *k* można połączyć z zachowaniem ciągłości pochodnej stopnia *k*-1). Ten rodzaj łączenia krzywych nazwano "sklejaniem", a otrzymane krzywe wynikowe - krzywymi sklejanymi (ang. *splines*) lub B-sklejanymi (*B-splines*).

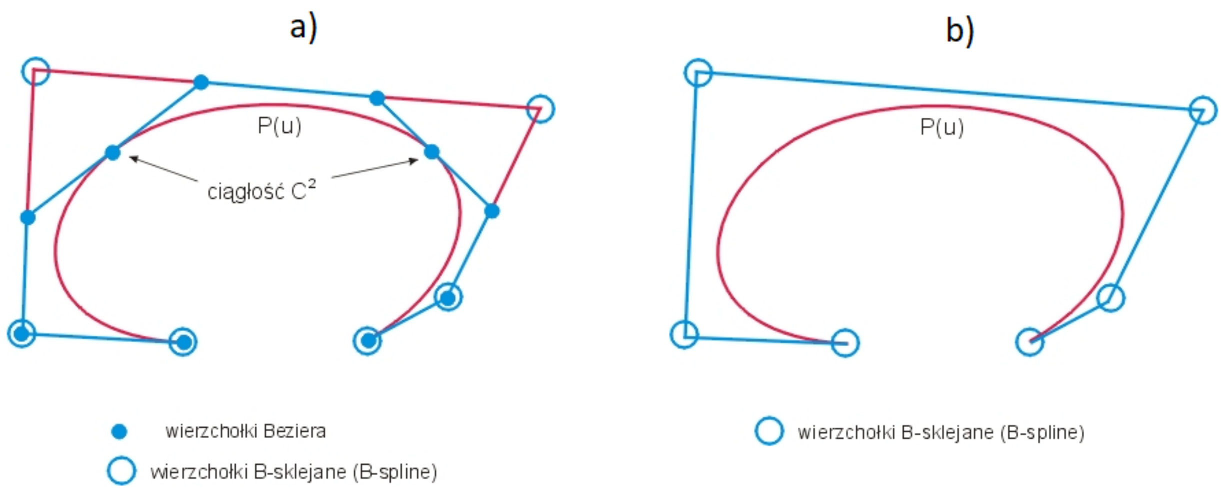
5.1 Krzywe B-sklejane 3 i 2 stopnia

Krzywe B-sklejane 3 stopnia otrzymujemy, gdy połączymy ze sobą krzywe Béziera z zachowaniem ciągłości 2 pochodnej (wyższego stopnia ciągłości już się nie da dla takich krzywych uzyskać). Aby uzasadnić konstrukcję, która do nich prowadzi, przyjrzyjmy się zasadom wyznaczania wektora drugiej pochodnej na końcach krzywej (Rysunek 42 a i b) oraz zasadom połączenia dwóch krzywych z warunkiem ciągłości tego wektora (Rysunek 42 c):



Rysunek 42. Zasada wyznaczania wektora drugiej pochodnej: a) w punkcie początkowym; b) w punkcie końcowym krzywej Béziera; c) zasada łączenia 2 krzywych Béziera z ciągłością wektora drugiej pochodnej (C2). Jednakowe odcinki na rys. c) zaznaczono: w kroku 1 - dwiema kreskami (to zapewnia ciągłość C1), w kroku 2 – wężykiem, w kroku 3 – znakiem x (dodanie tych kroków prowadzi do ciągłości C2).

Wykonajmy teraz analogiczną konstrukcję dla 3 połączonych ze sobą krzywych Béziera 3 stopnia (Rysunek 43a), a następnie usuńmy wierzchołki Béziera i pozostawmy tylko wierzchołki pomocnicze - staną się one wierzchołami jednoznacznie definiującymi nową krzywą (Rysunek 43b). Jednoznacznie - bo jednoznaczna jest konstrukcja, która pozwala uzyskać z nich wierzchołki Béziera. Te nowe wierzchołki kontrolne, definiujące krzywą B-sklejaną, nazywane są w skrócie wierzchołkami B-sklejanymi.



Rysunek 43. a) Krzywa złożona z 3 krzywych Béziera 3 stopnia połączonych z narzuconym warunkiem ciągłości C2 w punkcie połączenia; b) Ta sama krzywa, ale zdefiniowana innymi punktami kontrolnymi - jako krzywa B-sklejana.

Krzywą B-sklejaną można modelować i edytować za pomocą wierzchołków kontrolnych (B-sklejanych) na podobnych zasadach, jak krzywe Béziera. Ta nowa metoda daje jednak znacznie więcej możliwości, które wkrótce szerzej omówimy. Na razie przyjrzyjmy się zasadom, które pozwalają wyznaczyć krzywą B-sklejaną jako ciąg sklejonych krzywych Béziera.

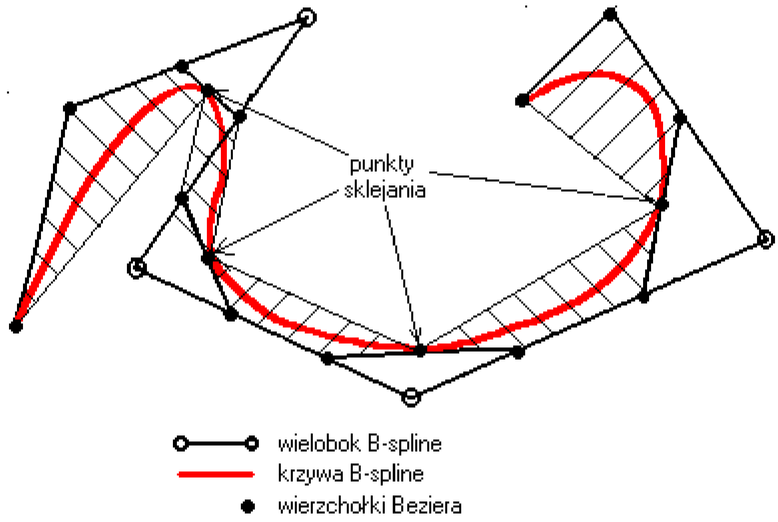
Z konstrukcji na Rysunek 43 wynika zasada wyznaczania krzywych Béziera z wieloboku B-spline. Jest to tzw. Algorytm Boehma:

DEFINICJA – Geometryczny algorytm Boehma dla otwartych krzywych 3 stopnia

- *Pierwszy i ostatni bok wieloboku B-spline nie ulegają podziałowi.*
- *Drugi i przedostatni bok wieloboku dzieli się na połowy.*
- *Pozostałe boki dzieli się na 3 równe odcinki.*
- *Otrzymane w ten sposób odcinki pomocnicze dzieli się na połowy.*
- *Punkty podziału odcinków pomocniczych są punktami sklejenia krzywych Béziera.*

DEFINICJA – Geometryczny algorytm Boehma dla zamkniętych krzywych 3 stopnia

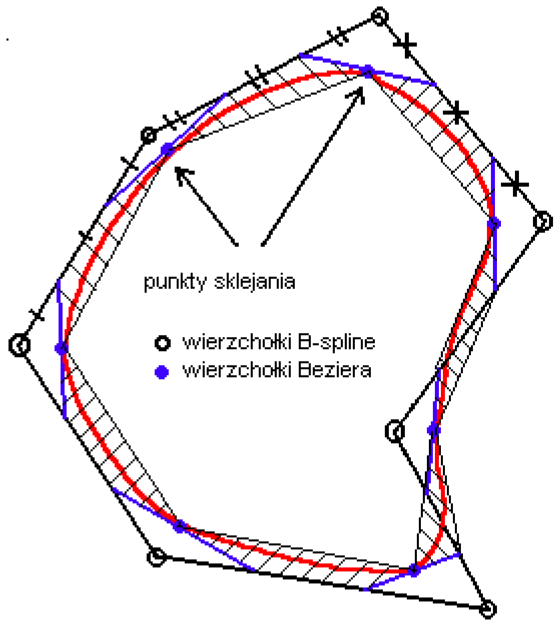
- *Wszystkie boki dzieli się na 3 równe odcinki.*
- *Otrzymane w ten sposób odcinki pomocnicze dzieli się na połowy.*
- *Punkty podziału odcinków pomocniczych są punktami sklejenia krzywych Béziera.*



Rysunek 44. Algorytm Boehma dla krzywych B-sklejanych 3 stopnia - generowanie krzywej B-sklejanej metodą wyznaczania wierzchołków Béziera. Zakreskowane są wieloboki wypukłe kolejnych krzywych Béziera.

Metoda B-spline pozwala również w bardzo wygodny sposób definiować gładkie krzywe zamknięte. Algorytm wyznaczania wieloboków Béziera dla krzywej zamkniętej jest jeszcze prostszy (Rysunek 45):

Łatwo sprawdzić, że i w tym przypadku zachowana jest ciągłość wektora drugiej pochodnej w punktach sklejenia.

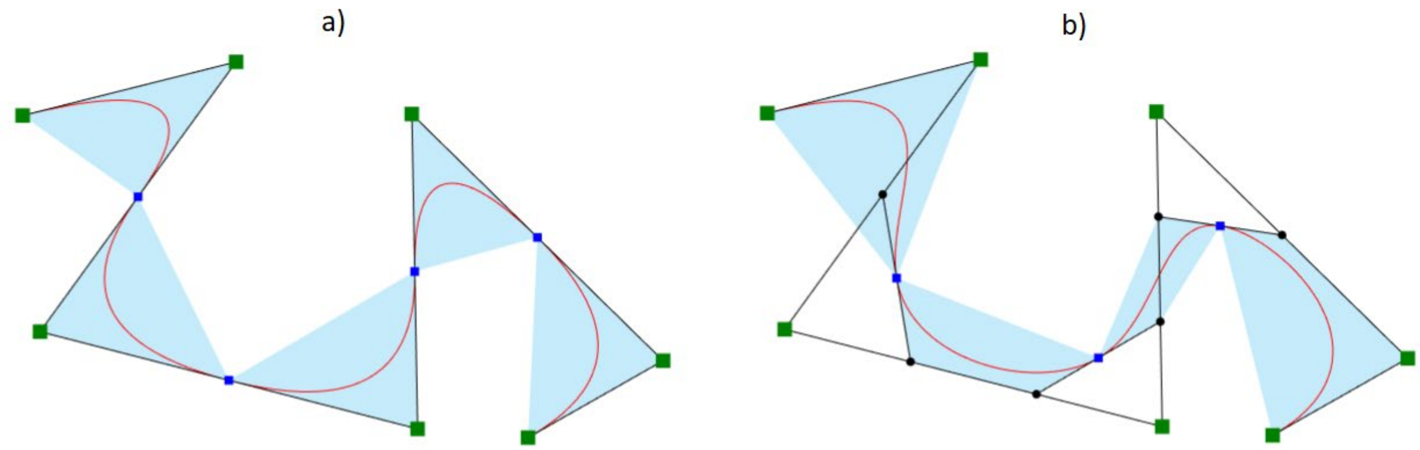


Rysunek 45. Algorytm Boehma dla krzywej zamknietej 3 stopnia. Zakreskowane są wieloboki wypukłe kolejnych krzywych Béziera.

Algorytm Boehma można również w analogiczny sposób wyprowadzić dla krzywych 2 stopnia (Rysunek 46a):

Porównajmy jeszcze tę konstrukcję z konstrukcją generującą dla tego samego wieloboku krzywą 3 stopnia (Rysunek 46b):

I już tylko dla porządku ostatnia definicja:

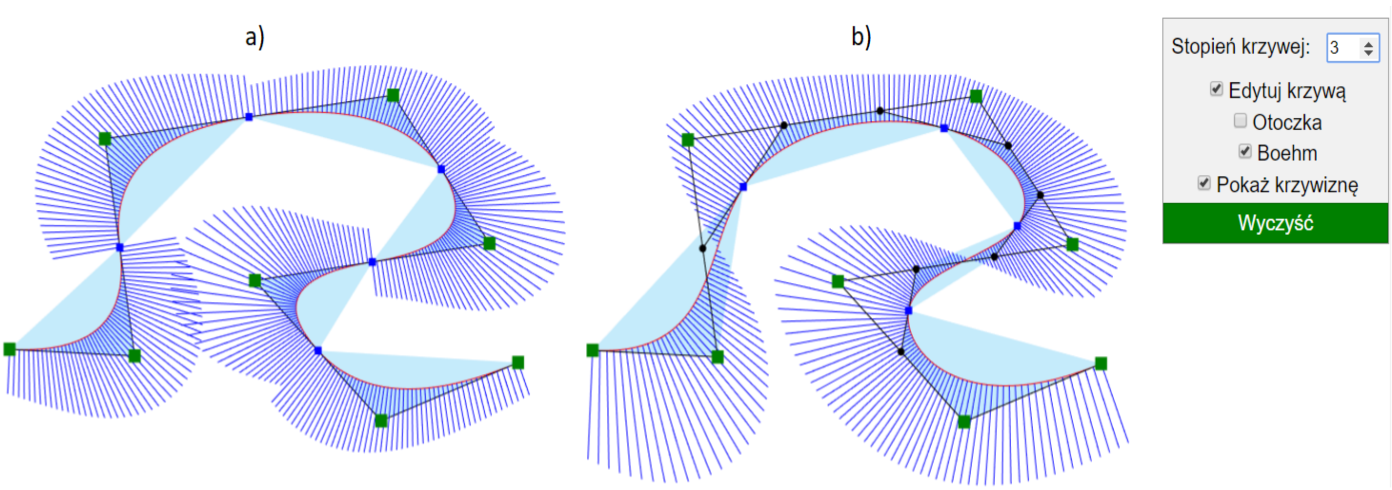


*Rysunek 46 .a) Krzywa B-sklejana i jej podział na krzywe Béziera algorytmem Boehma – punkty sklejenia zaznaczone są małymi niebieskimi kwadracikami: a) **krzywa 2 stopnia**, w punktach sklejania ma ciągłość C1; b) **krzywa 3 stopnia**, w punktach sklejania ma ciągłość C2. Wieloboki wypukłe krzywych składowych są zacieniowane.*

DEFINICJA – Geometryczny algorytm Boehma dla zamkniętych krzywych 2 stopnia

- *Wszystkie boki wieloboku dzieli się na połowy.*
- *Odcinków pomocniczych nie ma, punkty podziału boków są punktami sklejenia krzywych Béziera.*

Przedstawione zasady można dobrze zrozumieć korzystając z Aplikacji nr 8, która dla dowolnego wieloboku generuje otwartą krzywą B-sklejaną wybranego stopnia. Na razie zajmijmy się tymi, które znamy, czyli



*Rysunek 47 – **Aplikacja nr 8.** Krzywe B-sklejane dowolnego stopnia. Zmiany stopnia krzywej można dokonać w górnym okienku - należy jednak pamiętać, że do narysowania krzywej stopnia k potrzeba co najmniej k+1 wierzchołków. Dla krzywej a) 2 lub b) 3 stopnia można wyświetlić wektory krzywizny oraz wieloboki wypukłe (opcja Boehm). Wektory krzywizny wyraźnie pokazują, że krzywe 2 stopnia nie mają ciągłej krzywizny, zaś krzywe 3 stopnia mają ciągłość krzywizny gwarantowaną - z definicji.*

krzywymi 2 i 3 stopnia (Rysunek 47):

W Aplikacji nr 8 dostępna jest również opcja Otoczka. Otoczka to obszar będący sumą wypukłych obszarów rozpiętych na kolejnych (k+1) wierzchołkach wieloboku kontrolnego krzywej B-sklejanej. Jest to obszar, w którym na pewno leży krzywa B-sklejana. To jedna z własności krzywych B-sklejanych, które będą omawiane w dalszej części tego rozdziału. Zauważmy jednak, że kolejne otoczki wyznaczone na podstawie algorytmu Boehma dla krzywych 2 lub 3 stopnia dużo dokładniej określają położenie krzywej. Dla wyższych stopni pozostaje nam jednak tylko opcja Otoczka.

5.2 Krzywe B-sklejane dowolnego stopnia

Cały powyższy wywód, prowadzący do wyjaśnienia istoty krzywych B-sklejanych, celowo był przeprowadzony metodami czysto geometrycznymi. W ten sposób można było uniknąć podawania jakichkolwiek wzorów, co okazało się łatwe do zrobienia w przypadku sklejania krzywych niskiego stopnia. Konstrukcje geometryczne dla wyższych stopni krzywych są jednak daleko bardziej skomplikowane i trudne do uogólnienia. By metodę można było uogólnić, konieczne jest zastosowanie metody algebraicznej, wymagającej zdefiniowania tzw. **funkcji B-sklejanych**. Funkcje te definiuje się wzorami rekurencyjnymi:

$$\mathbf{N}_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 \quad \text{dla } u_{\mathrm{i}} \le u < u_{\mathrm{i+1}} \\ 0 \text{ w przeciwnym razie} \end{cases}$$

$$\mathbf{N}_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} \cdot \mathbf{N}_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u_i}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} \cdot \mathbf{N}_{i+1,k-1}(u) \quad ; \quad dla \;\; k \ge 1$$

a następnie na ich podstawie wyznacza się krzywą dowolnego stopnia:

$$\mathbf{P}(u) = \sum \mathbf{D}_i \, N_{i,k}(u) \;\; ; \quad u_k \le u \le u_{n+1}$$

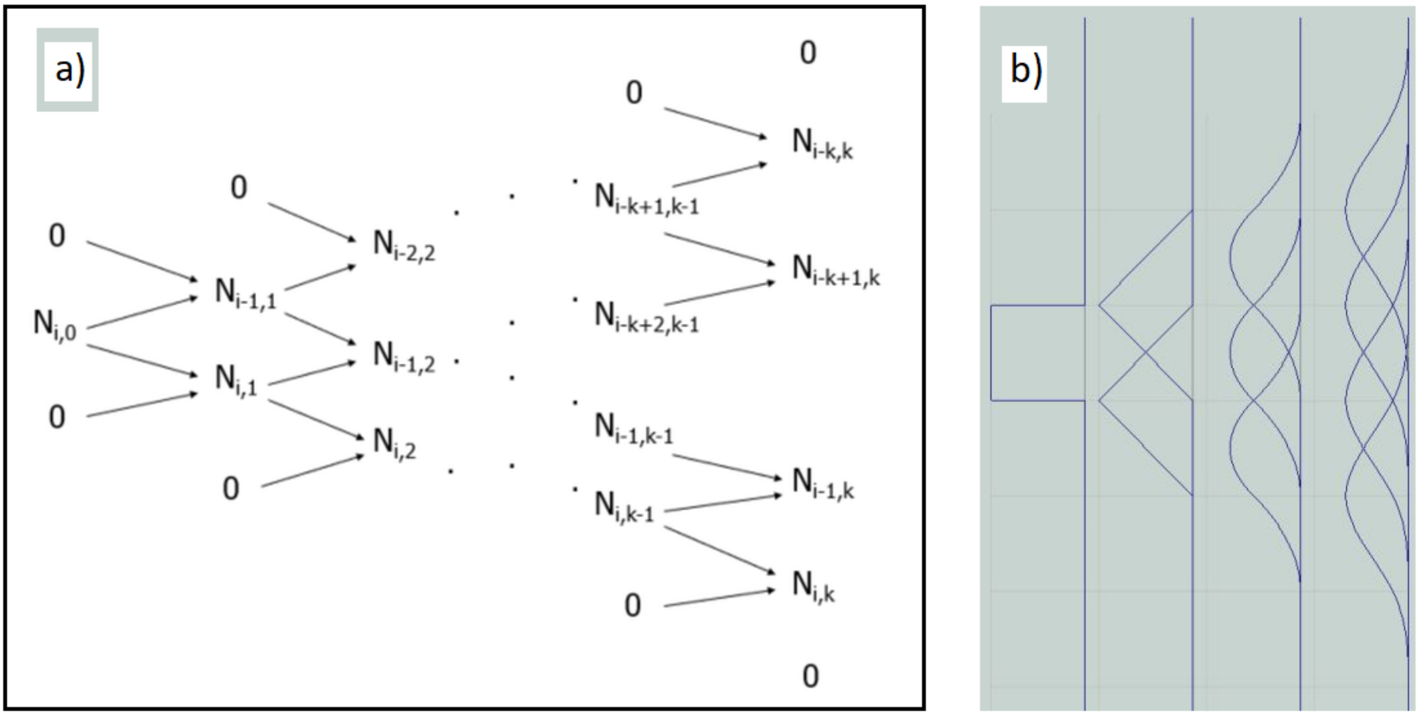
W tej właśnie ogólnej postaci krzywe B-sklejane zostały zaprezentowane przez twórców metody.
Do pełnej definicji krzywej potrzebny jest ciąg węzłów, czyli wartości parametru *u*:

$$(u_1, u_2, \ldots, u_{n+k}) \;\; ; \;\; \text{gdzie} \;\; u_i \le u_{i+1}$$

przy czym węzły wewnętrzne odpowiadają punktom sklejania krzywych.
Funkcje B-sklejane spełniają zależność

$$\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u) = 1 \;\; ; \quad u_k \le u \le u_{n+1}$$

Do wyznaczania funkcji B-sklejanych stosuje się najczęściej szybki i stabilny algorytm de Boora, bazujący na rekurencji zawartej w definicji funkcji B-sklejanych.



Rysunek 48. Algorytm de Boora: a) schemat ogólny; b) funkcje B-sklejane 0, 1, 2 i 3 stopnia – w kolejnych kolumnach, generowane algorytmem dr Boora.

<u>Dane</u>: **T**[1..n+k] - ciąg węzłów dla krzywej o wierzchołkach **D_0..D_n** stopnia **k,** taki że **T[j]=u_j**.

Dany też jest parametr **u** należący do przedziału <u_i..u_{i+1}>, zatem dana jest wartość **i**, która ten przedział określa.

<u>Wynik</u>:

Tablica **B**[1..k+1] zawierająca funkcje $N_{i-k,k}$(u),...,$N_{i,k}$(u) dla danego **u**.

UWAGA: krzywą B-sklejaną wyznacza się w przedziale **<u_k.. u_{n+1}>.** Jeśli u=u_k, należy przyjąć i=k; jeśli u=u_{n+1}, należy przyjąć i=n.

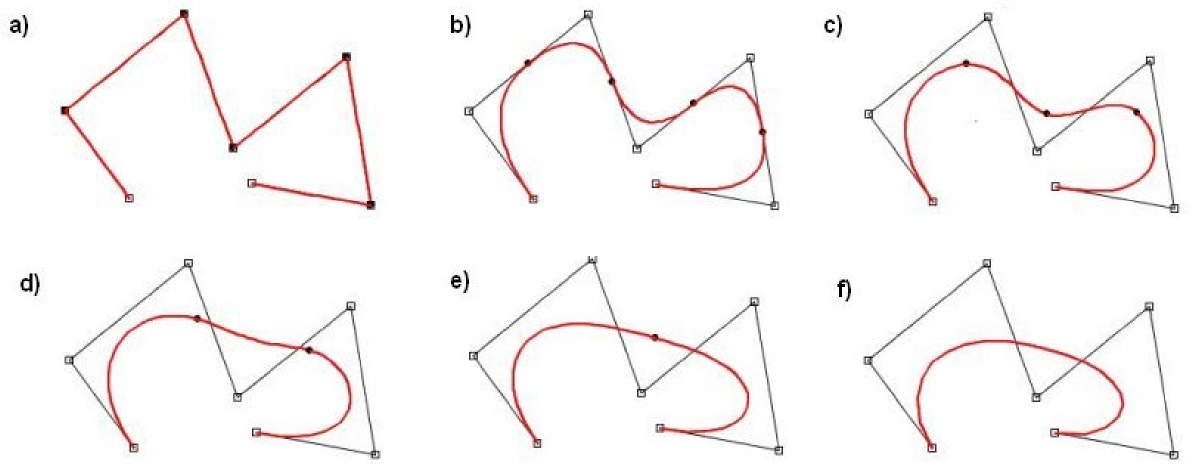
DEFINICJA – Algorytm de Boora

```
B[1]:=1
for j=1,...,k do
    begin
    a[j]:=T[i+j]-u
    d[j]:=u-T[i+1-j]
    saved:=0
    for r:=1,...,j do
        begin
        term:=B[r]/(a[r]+d[j+1-r])
        B[r]:=saved+a[r]*term
        saved:=d[j+1-r]*term
        end
    B[j+1]:=saved
```

Wiemy już, że do zdefiniowania krzywych B-sklejanych potrzebny jest nie tylko wielobok kontrolny, ale również stopień krzywej oraz (czasem niejawnie, jak w przypadku konstrukcji geometrycznych z początku tego rozdziału) ciąg węzłów. Najważniejsze własności krzywych B-sklejanych można ująć następująco:

1. Otwarta krzywa stopnia k zdefiniowana wielobokiem o n+1 wierzchołkach (o indeksach od 0 do n) składa się z (n-k+1) segmentów.
2. Zamknięta krzywa zdefiniowana wielobokiem o n+1 wierzchołkach (z których pierwszy, o indeksie 0, pokrywa się z ostatnim, czyli tym o indeksie n) składa się z n segmentów, niezależnie od stopnia krzywej.
3. Jeśli ciąg węzłów krzywej otwartej ma k-krotne węzły zewnętrzne (na końcach), to krzywa przechodzi przez końcowe wierzchołki wieloboku i jest styczna w tych punktach do boków wieloboku.
4. Krzywa ma ciągłość rzędu (k-1) z wyjątkiem wielokrotnych węzłów wewnętrznych: każda wielokrotność takiego węzła zmniejsza stopień ciągłości o 1.
5. Przesunięcie pojedynczego wierzchołka wieloboku powoduje zmianę co najwyżej (k+1) segmentów krzywej, a więc lokalnie wpływa na jej kształt.
6. Jeśli wielobok jest wypukły, to odpowiadająca mu krzywa też jest wypukła.
7. Krzywa leży wewnątrz obszaru będącego sumą wypukłych obszarów rozpiętych na kolejnych (k+1) wierzchołkach wieloboku.
8. Aby przekształcić afinicznie krzywą (przesunąć, obrócić, przeskalować), wystarczy przekształcić jej wielobok i wygenerować z niego krzywą.

Jako podsumowanie własności krzywych B-sklejanych niech posłuży następujący poglądowy rysunek. Można wszystkie przedstawione tu przypadki sprawdzić w Aplikacji nr 9.



*Rysunek 49. Krzywe B-sklejane różnych stopni, wszystkie zdefiniowane tym samym wielobokiem kontrolnym o 6 bokach. Na rysunku **zaznaczono punkty sklejenia segmentów**; a) krzywa 1 stopnia **pokrywa się z wielobokiem**; b) krzywa 2 stopnia jest styczna do boków wieloboku. c) krzywa 3 stopnia; d) krzywa 4 stopnia; e) krzywa 5 stopnia; f) krzywa 6 stopnia - **jest pojedynczą krzywą Béziera**.*

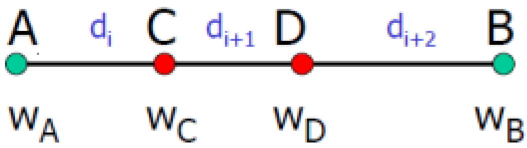
5.3 Krzywe NURBS

Analogicznie jak w przypadku krzywych Béziera, uogólnieniem krzywych B-sklejanych są **wymierne krzywe B-sklejane**, składające się z wymiernych krzywych Béziera. Noszą one powszechnie obecnie używaną nazwę **NURBS** - jako skrót od angielskich słów ***N**on **U**niform **R**ational **B**-**S**plines* (Niejednostajne Wymierne krzywe B-sklejane). **Niejednostajne** - bo węzły mogą być dowolnie rozmieszczone. Modyfikując węzły można zmienić kształt krzywej i zmniejszyć ciągłość krzywej w punktach sklejania. **Wymierne** - bo punktom kontrolnym można przypisać wagi. Modyfikując wagi można uzyskać dodatkowe możliwości modyfikacji kształtu krzywej bez przesuwania wierzchołków.

DEFINICJA – Reprezentacja krzywych NURBS

- *Wierzchołki kontrolne*
- *Stopień krzywej*
- *Wagi wierzchołków kontrolnych*
- *Ciąg węzłów odpowiadających punktom sklejenia krzywych, z węzłami wielokrotnymi na krańcach*

Dla krzywych NURBS 2 i 3 stopnia algorytm Boehma jest uogólnieniem algorytmu dla krzywych B-sklejanych: podział odcinków nie odbywa się już na 2 lub 3 równe części, lecz jest zależny od wag i przyrostów węzłów (Rysunek 50).



$$w_C = \frac{w_A(d_{i+1} + d_{i+2}) + w_B \cdot d_i}{d_i + d_{i+1} + d_{i+2}} \qquad w_D = \frac{w_A d_{i+2} + w_B(d_i + d_{i+1})}{d_i + d_{i+1} + d_{i+2}}$$

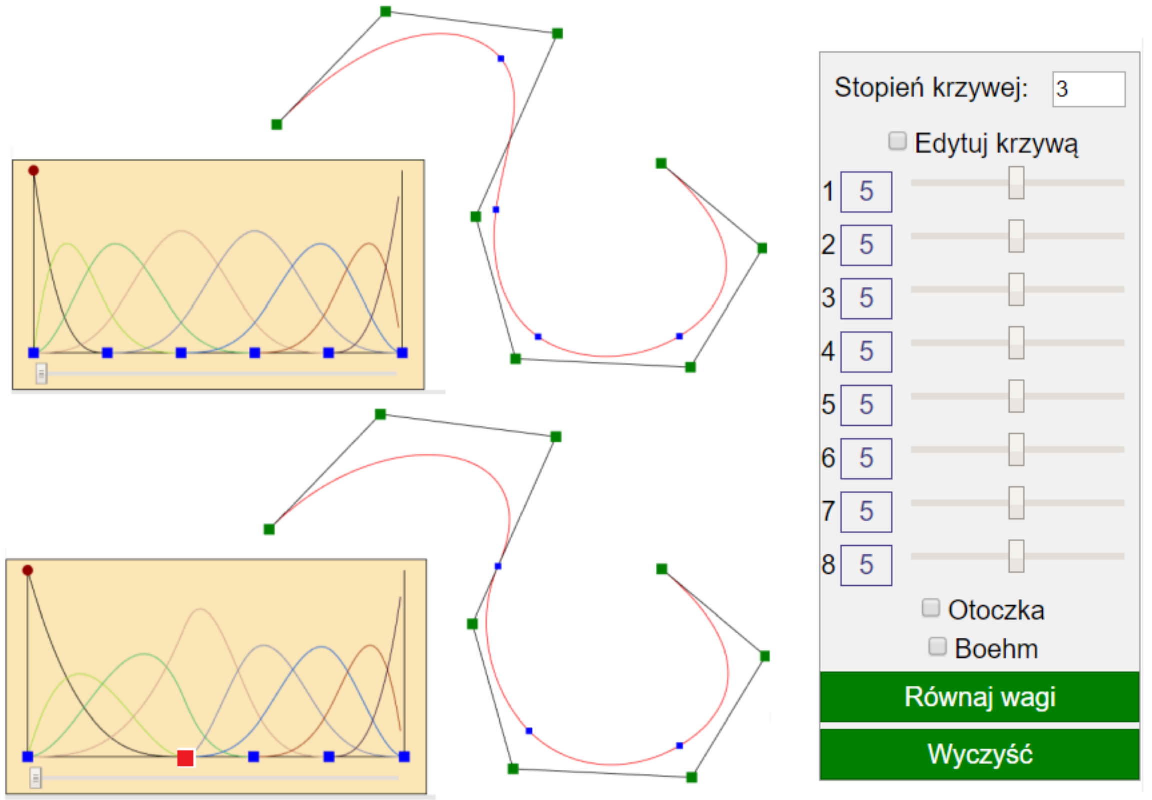
$$\overline{\mathbf{C}} = \frac{\overline{\mathbf{A}} w_A(d_{i+1} + d_{i+2}) + \overline{\mathbf{B}} w_B d_i}{w_C(d_i + d_{i+1} + d_{i+2})} \qquad \overline{\mathbf{D}} = \frac{\overline{\mathbf{A}} w_A d_{i+2} + \overline{\mathbf{B}} w_B(d_i + d_{i+1})}{w_D(d_i + d_{i+1} + d_{i+2})}$$

*Rysunek 50. Reguły podziału odcinka z wagami na końcach w stosunku di : di+1 : di+2. Jeśli odcinek dzielimy na 2 części, to d_{i+2}=0 i wyznaczamy tylko punkt **C**.*

$$w_C = \frac{w_A(d_{i+1} + d_{i+2}) + w_B \cdot d_1}{d_i + d_{i+1} + d_{i+2}} \qquad w_D = \frac{w_A d_{i+2} + w_B(d_i + d_{i+1})}{d_i + d_{i+1} + d_{i+2}}$$

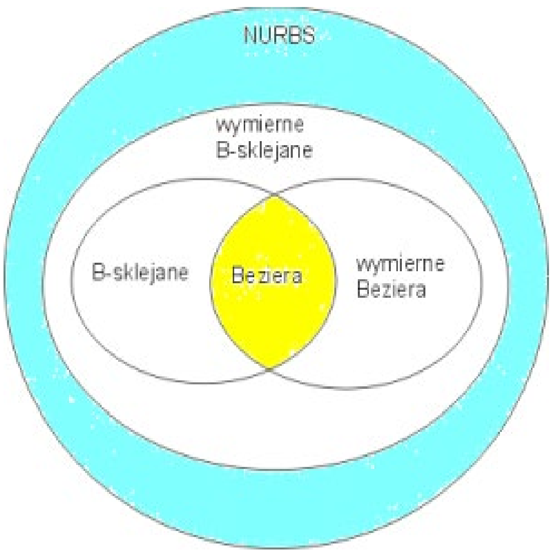
$$\overline{\mathbf{C}} = \frac{\overline{\mathbf{A}} w_A(d_{I+1} + d_{i+2}) + \overline{\mathbf{B}} w_B d_i}{w_C(d_i + d_{i+1} + d_{i+2})} \qquad \overline{\mathbf{D}} = \frac{\overline{\mathbf{A}} w_A d_{i+2} + \overline{\mathbf{B}} w_B(d_i + d_{i+1})}{w_D(d_i + d_{i+1} + d_{i+2})}$$

Rozbudowana Aplikacja nr 9, będąca uogólnieniem Aplikacji nr 8, pozwala na zapoznanie się z różnorodnymi możliwościami modelowania oferowanymi przez reprezentację NURBS i sprawdzenie, że wszystkie wymienione wyżej własności krzywych B-sklejanych są tu spełnione. Należy w szczególności zwrócić uwagę na możliwość modyfikacji węzłów i wprowadzania węzłów wielokrotnych (na rysunku taki węzeł jest zaznaczony na czerwono), co pozwala na uzyskanie styczności krzywej do boków wieloboku oraz ostrzy na krzywej. Węzły wewnętrzne na początku rozłożone są jednostajnie i odpowiadają punktom sklejania segmentów krzywej. Można je przesuwać, ustawiając pod nimi wskaźnik myszki i sklejać je ze sobą, uzyskując ich wielokrotność i obniżenie w tym węźle stopnia ciągłości krzywej.



*Rysunek 51 – **Aplikacja nr 9**. Krzywe NURBS dowolnego stopnia k. Możemy zmieniać stopień krzywej i wagi poszczególnych wierzchołków. Po lewej stronie wyświetlają się funkcje B-sklejane (każda w innym kolorze) wraz z osią węzłów. Zmieniając suwakiem parametr obserwujemy (k+1) wartości funkcji B-sklejanych wpływających na wynikowy punkt poruszający się po krzywej.*

Reprezentacja NURBS jest najbardziej ogólną i najbardziej zwięzłą formą zapisu krzywych parametrycznych. Stanowi podstawę formatów IGES i STEP, będących standardami zapisu danych o krzywych i powierzchniach.
Pojęcia reprezentacji NURBS, Béziera i B-sklejanej są bardzo często mylone ze sobą albo traktowane jako zupełnie od siebie niezależne, i to nieraz w literaturze zbliżonej do "fachowej", w tym nawet w dokumentacjach i opisach modelerów. Dlatego na zakończenie warto uzmysłowić sobie zależności pomiędzy różnymi formami definiowania krzywych podanymi powyżej. Wynikają one w sposób logiczny z zaprezentowanych i omówionych definicji:



Rysunek 52. Zależności pomiędzy różnymi rodzajami reprezentacji krzywych i powierzchni parametrycznych.

Jak widać, reprezentację Béziera należy zawsze traktować jako szczególny przypadek reprezentacji NURBS.

5.4 Krzywe sklejane interpolujące 3 stopnia

Zasady definiowania krzywych B-sklejanych i krzywych NURBS przedstawione w poprzednich rozdziałach pozwalają na tworzenie złożonych krzywych wybranego stopnia o maksymalnie wysokiej klasie ciągłości metodą „ab initio" – za pomocą wierzchołków kontrolnych i dodatkowych danych (wagi, węzły) jednoznaczne definiujących krzywą. Taki sposób konstruowania gładkich krzywych jest bardzo wygodny na etapie projektowania koncepcyjnego, w pierwszej fazie stylizacji, gdy potrzebne jest wypracowanie wstępnego zarysu kształtu. Jednakże w dalszych etapach bardziej potrzebna okazuje się możliwość interpolacji krzywymi sklejanymi, gdy chcemy, by krzywa wynikowa przechodziła przez zadane punkty i miała przy tym maksymalnie wysoką klasę ciągłości. Tych warunków nie spełniają krzywe interpolujące omówione w rozdziale 6, gdyż są one tylko klasy C1.

Istnieją jednak algorytmy interpolacji, które pozwalają wyznaczyć takie wektory pochodnych w węzłach interpolacji, że krzywa wynikowa będzie miała ciągłość C2. Załóżmy więc, że mamy następujące dane:

- $\mathbf{P}_i$, i=0..*n* - punkty dane (przez które przejść ma krzywa)
- $d_i = u_i - u_{i-1}$ - odległości między węzłami (można przyjąć d_i jako odległość między punktami $\mathbf{P}_{i-1}$ i $\mathbf{P}$ lub dla uproszczenia d_i=1 dla wszystkich *i*).

Konieczne jest więc narzucenie warunku równości wektorów drugich pochodnych w węzłach interpolacji, czyli w każdym punkcie danych poza krańcowymi. Tak powstaje układ równań, który w postaci ogólnej można

$$\begin{bmatrix} b_0 & c_o & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0' \\ \mathbf{P}_1' \\ \mathbf{P}_2' \\ \bullet \\ \mathbf{P}_{n-1}' \\ \mathbf{P}_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \bullet \\ \mathbf{F}_{n-1} \\ \mathbf{F}_n \end{bmatrix}$$

zapisać w postaci macierzowej :

gdzie $\mathbf{F}_i = (3*d_{i+1}/d_i)*(\mathbf{P}_i-\mathbf{P}_{i-1}) + (3*d_i/d_{i+1})*(\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_i)$, i=1,...,n-1.

Macierz współczynników przy niewiadomych jest macierzą trójdiagonalną silnie dominującą (moduł elementu na głównej przekątnej jest większy niż suma modułów obu elementów sąsiednich w tym samym wierszu). Taki układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, czyli wektor pochodnych [P_0', ..., P_n'] , które można wyznaczyć metodą eliminacji Gaussa, która prowadzi do następującego algorytmu:

DEFINICJA – Algorytm interpolacji krzywą sklejaną 3 stopnia

$h=1/b_o$

$V_0 = h*F_0$

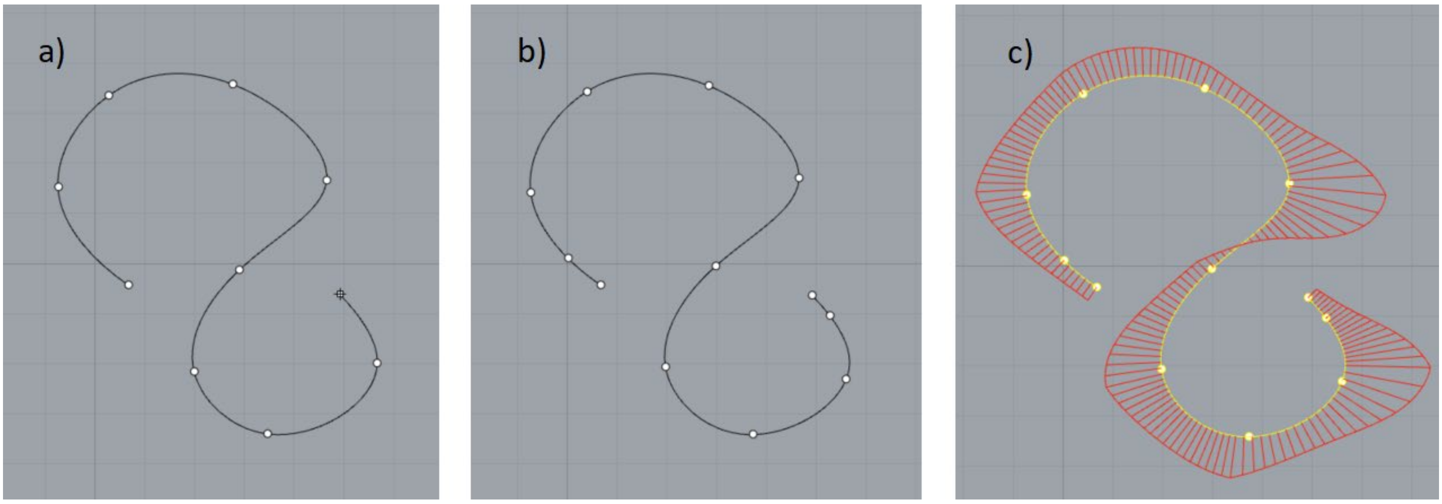
for $i=0..n-1$ *begin*

Dwa równania w układzie z macierzą trójdiagonalną (pierwsze i ostatnie) muszą być jednak narzucone dodatkowo, gdyż z warunków równości drugich pochodnych mamy tylko n-1 równań. Najprostsza możliwość to narzucenie wektorów pochodnych na końcach krzywej:
$\mathbf{F}_0 = \mathbf{P}_0'$ wektor prędkości na początku krzywej
$\mathbf{F}_n = \mathbf{P}_n'$ wektor prędkości na końcu krzywej.
Na tej podstawie wyznaczamy współczynniki macierzy trójdiagonalnej:

$$b_0 = 1 \quad c_0 = 0$$
$$b_n = 1 \quad a_n = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} a_i = d_{i+1} \\ b_i = 2(d_i + d_{i+1}) \\ c_i = d_i \end{array}\right\} \quad i=1,\ldots,n-1$$

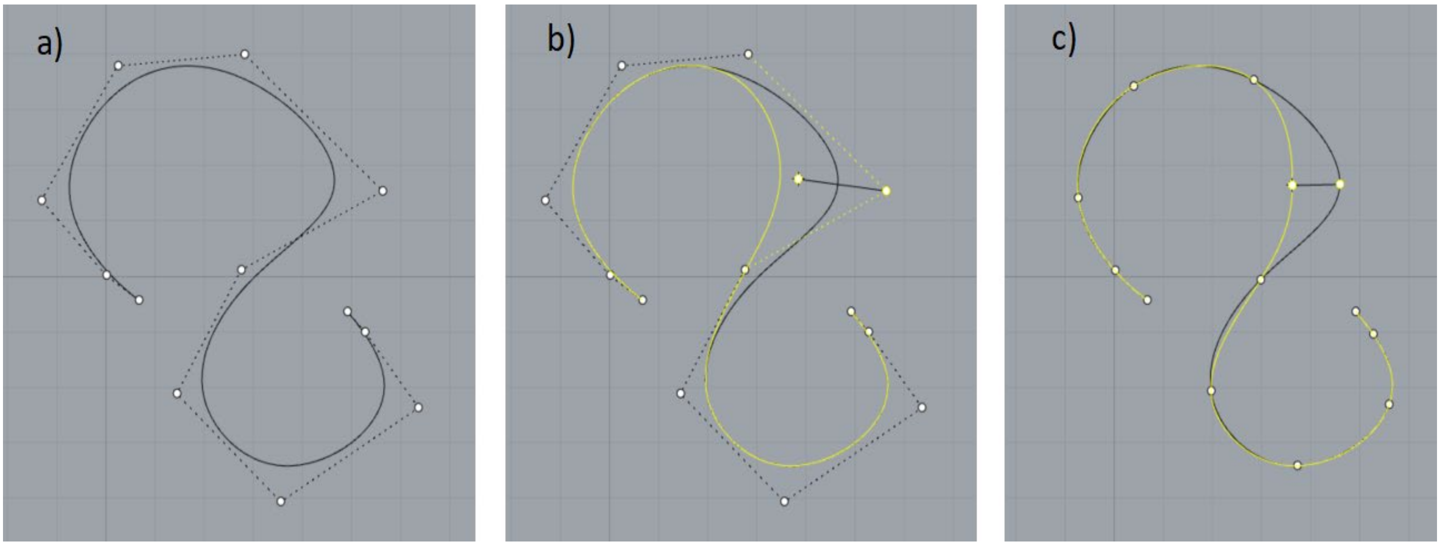
Tak otrzymane krzywe sklejane interpolujące 3 stopnia mają ciągłą krzywiznę, co można zobaczyć na wykresach wektora krzywizny.



Rysunek 53. Krzywe sklejane interpolujące wraz z wykresem wektora krzywizny – modeler Rhinoceros

Można dla nich wyznaczyć odpowiadające im wieloboki B-sklejane (tutaj tego rozwiązania nie omawiamy). W tym momencie taka krzywa nie różni się więc niczym od krzywej zadanej "ab initio" za pomocą wierzchołków kontrolnych. Można ją modyfikować dwojako:

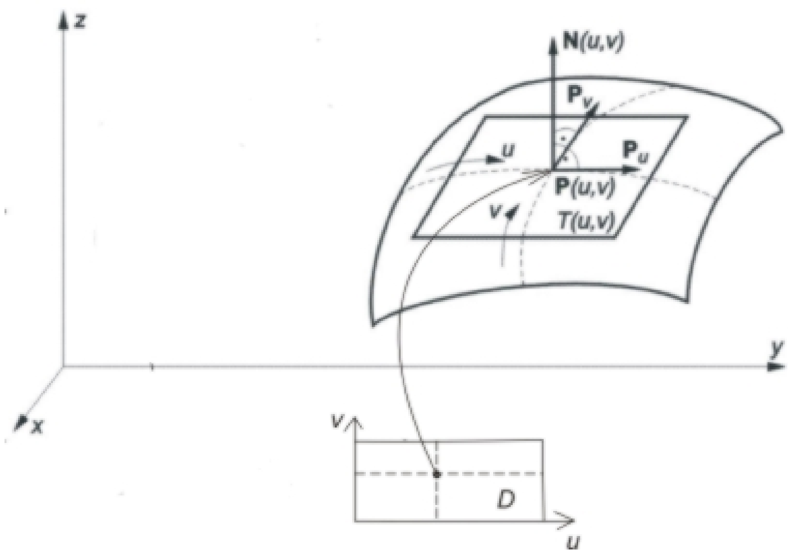
- **modyfikacja punktów kontrolnych lokalnie wpływa na kształt krzywej**, co wynika z podanych już wcześniej własności krzywej B-sklejanej; jeśli więc krzywa jest stopnia 3, to zmieniają się tylko 4 krzywe składowe, położone najbliżej modyfikowanego punktu kontrolnego.
- **modyfikacja punktów sklejania** krzywych (które w przypadku krzywej interpolującej są węzłami interpolacji) **powoduje globalną zmianę całej krzywej**, wszystkich jej krzywych składowych. Zmiany te są najbardziej widoczne w pobliżu punktów modyfikacji i maleją w bardziej oddalonych segmentach, ale można je zaobserwować w całym obszarze krzywej.



Rysunek 54. Modyfikacja krzywych sklejanych metodą zmiany wierzchołków kontrolnych i węzłów interpolacji

6 Geometria powierzchni

6.1 Płaszczyzna styczna i wersor normalny



Rysunek 55. Płaszczyzna styczna i wektor normalny do powierzchni parametrycznej.

Reprezentacją parametryczną powierzchni nazywamy funkcję wektorową ciągłą będącą odwzorowaniem obszaru płaskiego *D* w przestrzeń R^3:

$$\mathbf{P}(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix}, \ \text{gdzie u, v } \in D$$

Zmienne u,v, czyli parametry reprezentacji, nazywane są współrzędnymi krzywoliniowymi lub współrzędnymi Gaussa punktu na powierzchni. Linie, dla których ***u*=const** lub ***v*=const,** nazywane są **liniami stałego parametru** w kierunkach odpowiednio *u* i *v*.

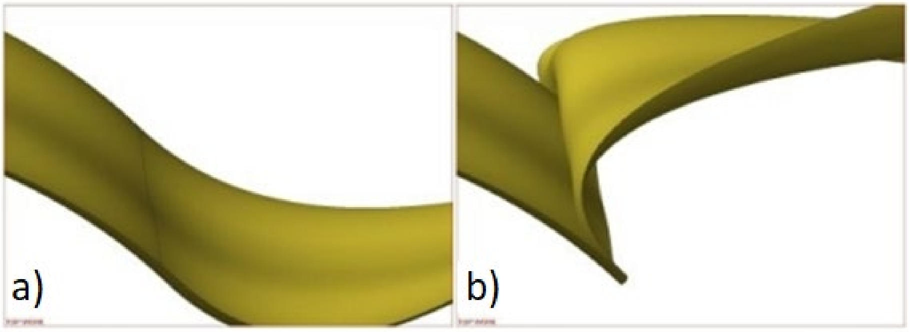
Określenie **powierzchnia parametryczna** oznacza dowolną jej reprezentację parametryczną (przy czym podobnie jak w przypadku krzywych, każda powierzchnia jako twór geometryczny może mieć nieskończenie wiele reprezentacji parametrycznych).

Powierzchnię parametryczną nazywamy **różniczkowalną**, jeśli w każdym jej punkcie istnieją pochodne cząstkowe będące ciągłymi funkcjami w dziedzinie powierzchni:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} = \left[\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right]^T$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} = \left[\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right]^T$$

Jeśli pochodne te są liniowo niezależne (czyli niewspółliniowe), to powierzchnia parametryczna jest **regularna**, czyli gładka. Wówczas bowiem na tych dwóch wektorach można rozpiąć płaszczyznę styczną do powierzchni (rys. 9.1, 9.2a).



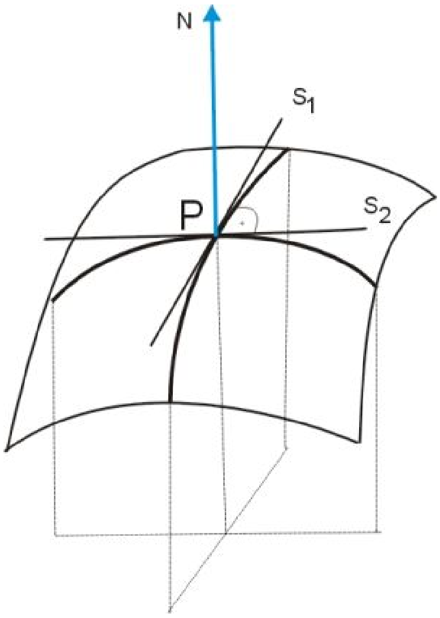
Rysunek 56. Powierzchnia różniczkowalna, złożona z dwu płatów mających wspólną płaszczyznę styczną, może być a) klasy G1; b) klasy G0 (przypadek tzw. antystyczności).

Ponieważ można zdefiniować dwa iloczyny wektorowe:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u},$$

i każdy z nich jest prostopadły do płaszczyzny stycznej, wybór jednego z nich jako **wektora normalnego** powierzchni określa jej orientację: dodatnią stroną powierzchni jest ta strona, po której leży wektor normalny powierzchni. Dla powierzchni regularnej można zdefiniować niezależny od parametryzacji wersor normalny:

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathrm{u}} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathrm{v}}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathrm{u}} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathrm{v}} \right\|}$$

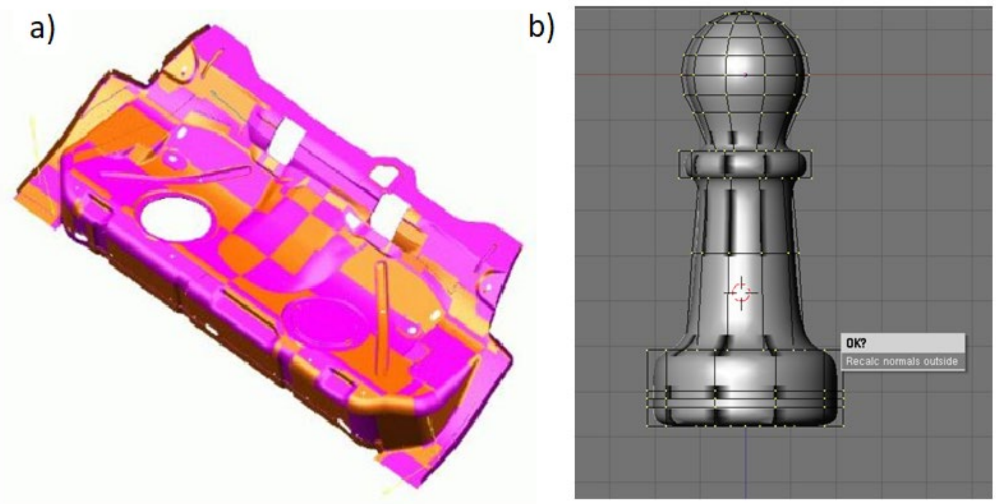


Rysunek 57. Krzywizna normalna powierzchni w punkcie P mierzona jest na przekroju płaszczyzną zawierającą wersor normalny N. Krzywizny główne (ekstremalne) występują na kierunkach prostopadłych s1 i s2; obie są tu ujemne.

przy założeniu, że dodatnią stronę powierzchni określa wektor podany w liczniku. Zmiana orientacji powierzchni powoduje zmianę wersora normalnego na przeciwny. Aby można było badać ciągłość powierzchni i wykonywać różnorodne operacje, wszystkie płaty muszą mieć zgodną orientację.

6.2 Krzywizny powierzchni

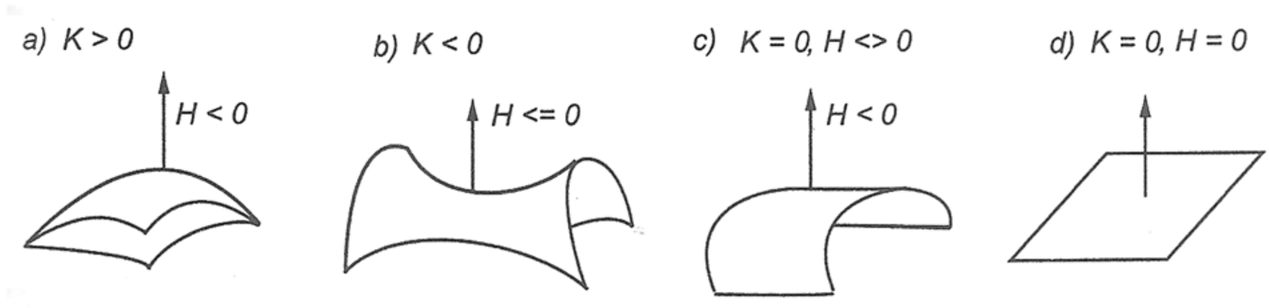
Dla powierzchni w dowolnym jej punkcie nie można wyznaczyć krzywizny, dopóki nie określi się przekroju, na



Rysunek 58. Płaty o przeciwnych orientacjach a) na karoserii Volkswagena (reprodukcja za zgodą autora materiałów); b) na powierzchni zaprojektowanej metodą subdivision w Blenderze. Ciemne fragmenty na powierzchni pionka oznaczają płaty, dla których algorytm wyznaczył niewłaściwe normalne i dlatego uznane zostały one za płaty niewidoczne

którym ma być ona zmierzona. Krzywizna powierzchni jest bowiem liczona jako krzywizna krzywej powstałej z przekroju normalnego tej powierzchni w zadanym kierunku. Przekrój normalny jest krzywą płaską i zawiera w sobie wersor normalny powierzchni. Krzywizna powierzchni w danym kierunku ma wartość ujemną, jeśli wersor normalny powierzchni jest skierowany przeciwnie do wklęsłej strony krzywej.

Krzywizna powierzchni przyjmuje w każdym punkcie (z wyjątkiem punktów sferycznych i punktów spłaszczenia) dwie wartości ekstremalne (minimalną i maksymalną), zwane **krzywiznami głównymi**. Iloczyn krzywizn głównych nazywamy **krzywizną Gaussa**, a ich średnią arytmetyczną - **krzywizną średnią**. Wielkości tych krzywizn i ich znaki mają istotne znaczenie przy badaniu kształtu i ciągłości powierzchni.



Rysunek 59. Kształt powierzchni w zależności od znaku krzywizny Gaussa (K) i krzywizny średniej (H).

W zależności od znaku krzywizny Gaussa i krzywizny średniej na powierzchni można wyróżnić:

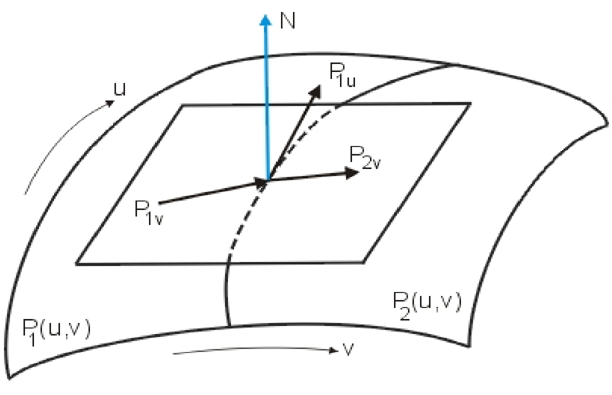
a) punkty eliptyczne, w których $K>0$
b) punkty hiperboliczne, w których $K<0$
c) punkty paraboliczne, w których $K=0$, $H\neq0$
d) punkty spłaszczenia, w których $K=0$, $H=0$.

Przy zmianie orientacji powierzchni na przeciwną wersor normalny powierzchni zmienia zwrot na przeciwny i znak krzywizny średniej zmienia się na przeciwny.

6.3 Klasy ciągłości powierzchni

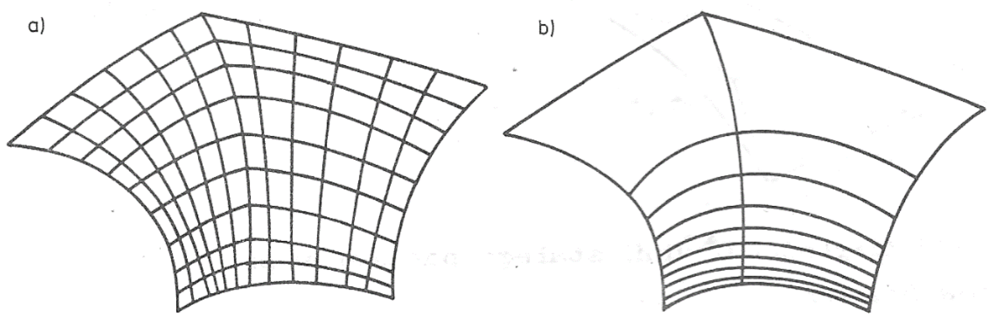
6.3.1 Ciągłość G1

Dwa płaty mają **ciągłość G1**, jeśli płaszczyzny styczne obu płatów pokrywają się w każdym punkcie krzywej ich połączenia (oraz nie zachodzi przypadek pokazanej wcześniej antystyczności płatów).



Rysunek 60. Dwa płaty połączone z ciągłością G1.

Warunek ciągłości G1 dla powierzchni wcale nie musi oznaczać ciągłości G1 linii stałego parametru. Ciekawy przykład pokazuje Rysunek 61: linie stałego parametru nie są gładkie w punktach połączenia płatów i powierzchnia sprawia wrażenie niegładkiej. Na przekrojach poprzecznych tej powierzchni widać, że jest to jednak powierzchnia niegładka.



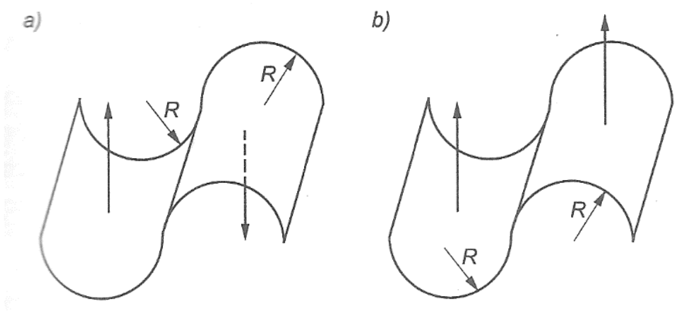
Rysunek 61. Powierzchnia złożona z dwu płatów bikubicznych: a) niegładkie linie stałego parametru na granicy płatów; b) gładkie przekroje poprzeczne dla tej samej powierzchni.

6.3.2 Ciągłość G2 – kryterium krzywizny średniej

Ciągłość krzywizny ma istotne znaczenie związane z wyglądem powierzchni: linie refleksów, czyli odbicia linii prostych na błyszczącej powierzchni, która nie ma ciągłej krzywizny, mają załamania i powodują, ze powierzchnia sprawia niestetyczne wrażenie (Rysunek 62). Dlatego bardzo ważne jest kryterium, które pozwala sprawdzić, czy powierzchnia na połączeniu płatów ma gładką krzywiznę.

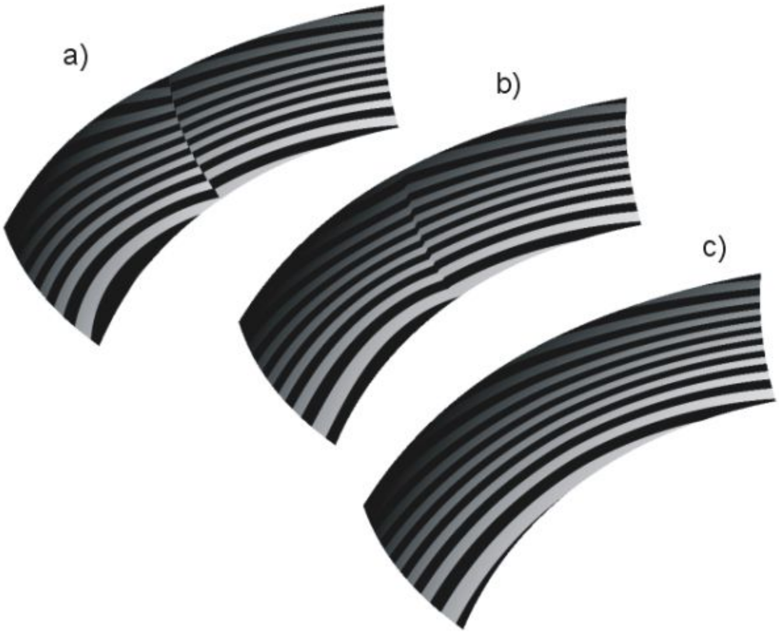
Rysunek 62. Linie refleksów na powierzchni karoserii o nieciągłej krzywiźnie mają załamania, choć pocieniowana powierzchnia wygląda na gładką.

Kryterium krzywizny średniej: dwa płaty mają **ciągłość G2**, czyli ciągłą krzywiznę wzdłuż krzywej połączenia, jeśli mają jednakowe zwroty wersora normalnego i ciągłą płaszczyznę styczną wzdłuż tej krzywej oraz krzywizny średnie obu płatów są sobie równe w każdym punkcie krzywej ich połączenia.
Warunek wspólnej orientacji obu płatów jest niezbędny, bowiem zmiana zwrotu wersora normalnego płata na przeciwny powoduje zmianę znaku krzywizny średniej płata na przeciwny. Przykład dwu płatów, które nie mają ciągłej krzywizny, pokazuje Rysunek 63. W przypadku a) płaty mają jednakowe krzywizny średnie wzdłuż wspólnej krzywej, ale różne zwroty wersorów normalnych, zaś w przypadku b) płaty maja jednakowe wersory normalne, ale różne znaki krzywizny średniej.



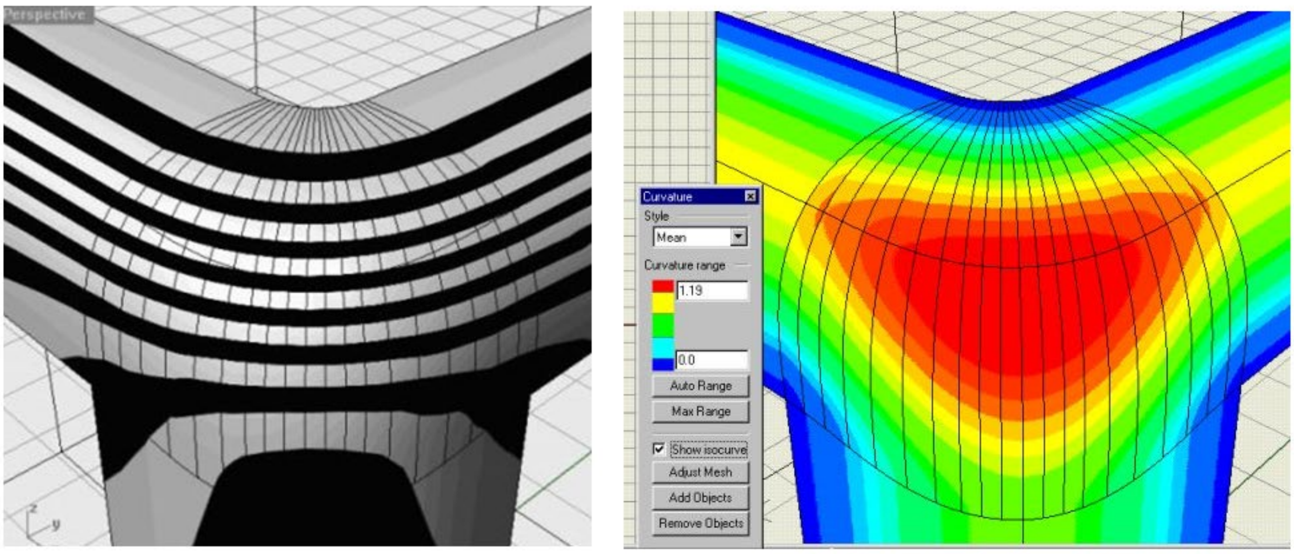
Rysunek 63. Dwa płaty walcowe tworzą powierzchnię klasy G1, ale nie G2.
Wersory normalne, dla przejrzystości, nie są narysowane wzdłuż krzywej połączenia

Do badania ciągłości powierzchni po jej zaprojektowaniu stosuje się więc różnorodne narzędzia analizy gładkości, z których najczęściej stosowane są linie refleksów pokazane na Rys. 62 oraz tzw. linie zebry, stanowiące pewien typ linii stałogradientowych na powierzchni:



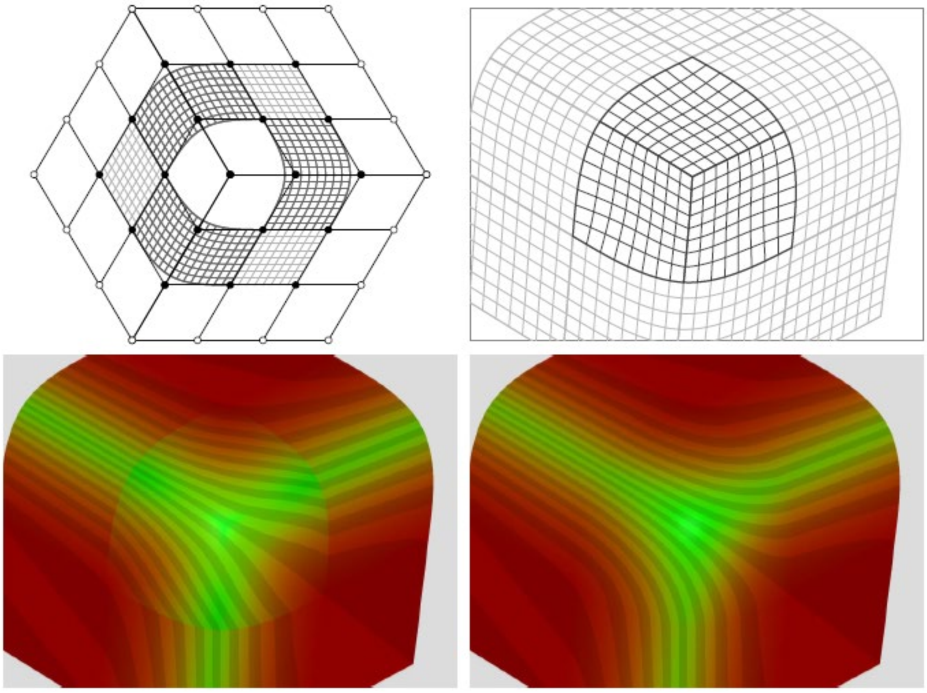
Rysunek 64. Linie typu "zebra" na powierzchni klasy a) G0 - są nieciągłe; b) G1 - mają załamania; c) G2 - są gładkie

W niektórych przypadkach linie takie mogą nie ujawnić niewielkich nieciągłości krzywizny: natomiast nieciągłości te stają się widoczne na mapach krzywizny średniej:



Rysunek 65. Linie typu zebra oraz mapy krzywizny średniej na powierzchni naroża sześcianu.

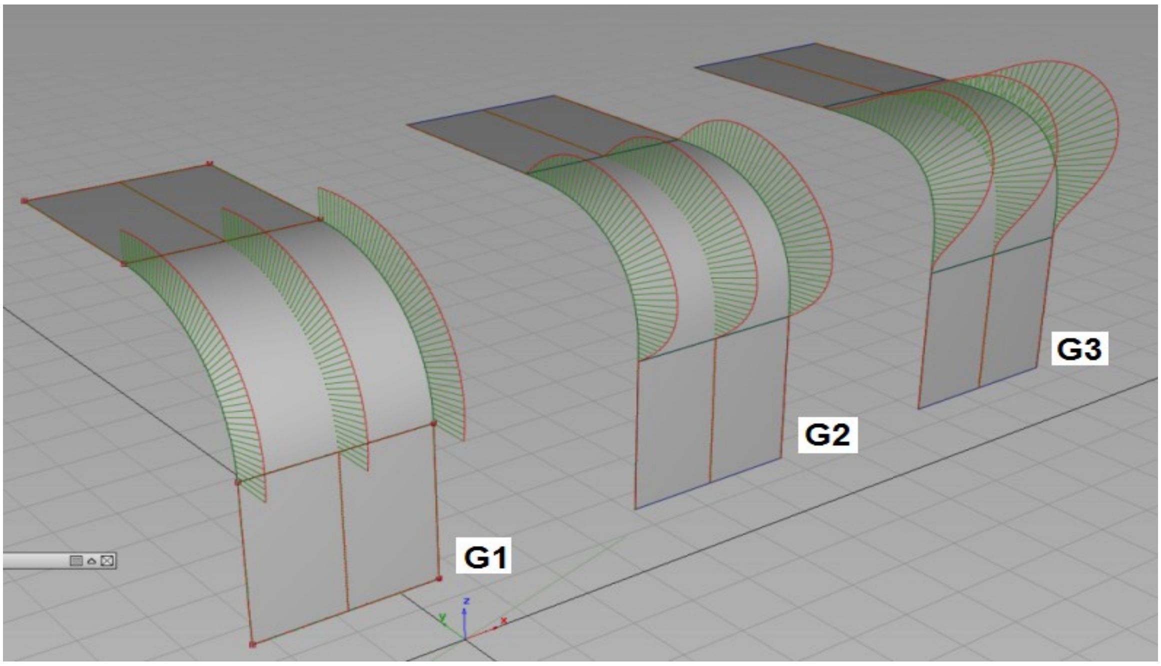
Te same własności można zaobserwować na przykładach wypełniania gładkiego naroża podanych na Rysunek 66 zaczerpniętym z monografii P. Kiciaka. Naroże wklejone z ciągłością G1 ujawnia załamania linii refleksów i bardzo wyraźną nieciągłość map krzywizny średniej. Dopiero wklejenie z ciągłością G2 (na podstawie opracowanych przez P. Kiciaka złożonych algorytmów) daje obraz gładkiego naroża.



Rysunek 66. Wypełnienie naroża sześcianu za pomocą trzech płatów z ciągłością a) G1 i b) G2. Linie zebry widoczne na tle map krzywizny średniej. Linie stałego parametru są nieciągłe na połączeniu tych trzech płatów.

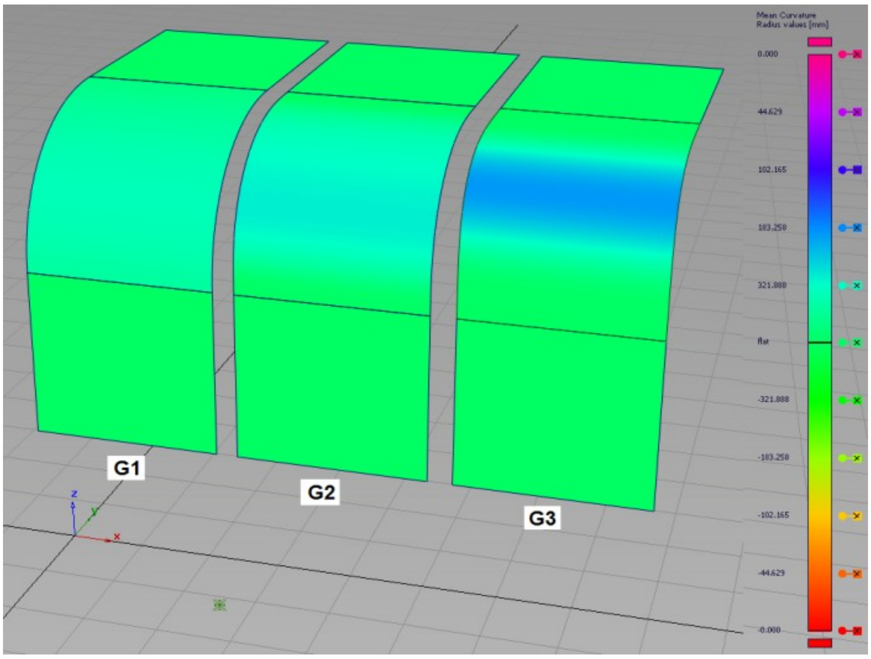
6.3.3 Ciągłość G3

Najnowsze techniki modelowania prowadzą do uzyskania powierzchni o jeszcze wyższej gładkości - powierzchni klasy G3. Różnice między klasami G2 i G3 w odniesieniu do krzywych były pokazane na wykresach krzywizny. Również na powierzchniach wykresy krzywizny są bardzo czułym narzędziem do rozróżnienia klas ciągłości wzdłuż wybranych krzywych - linii stałego parametru lub linii płaskiego przekroju powierzchni:



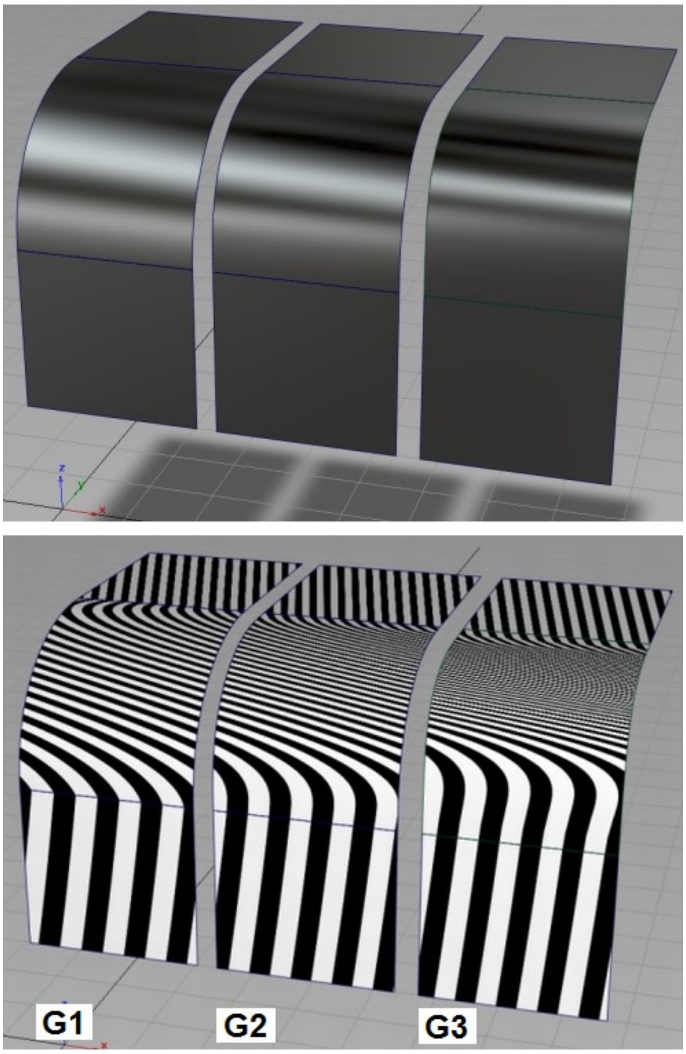
Rysunek 67. Ciągłość G1, G2 i G3 - porównanie wykresów krzywizny na przykładzie połączenia typu fillet blend zaprojektowanego przy użyciu Autodesk Alias Surface 2017 (Free Trial)

Jak widać, na połączeniu klasy G3 krzywizna schodzi do zera w sposób płynny, ale wymuszenie takiej ciągłości wiąże się z większą krzywizną przekrojów na powierzchni łączącej. Można to również zaobserwować na mapach krzywizny średniej:



Rysunek 68. Mapy krzywizny średniej dla powierzchni jak poprzednio. Widać skokową zmianę krzywizny na połączeniu płatów G1 oraz wyższe wartości krzywizny powierzchni łączącej G3, która dzięki temu płynnie przechodzi w

Wizualne różnice między rzeczywistymi widokami powierzchni G1, G2 i G3 przedstawiono na Rys. 69. Wyrenderowane błyszczące powierzchnie różnią się wyglądem, ale dopiero linie zebry pozwalaja ocenić wpływ klasy ciągłości na wygląd linii odbijających się na powierzchni. Linie zebry dla obu klas G2 i G3 są gładkie (w przeciwieństwie do G1), ale różnice dają się zaobserwować:

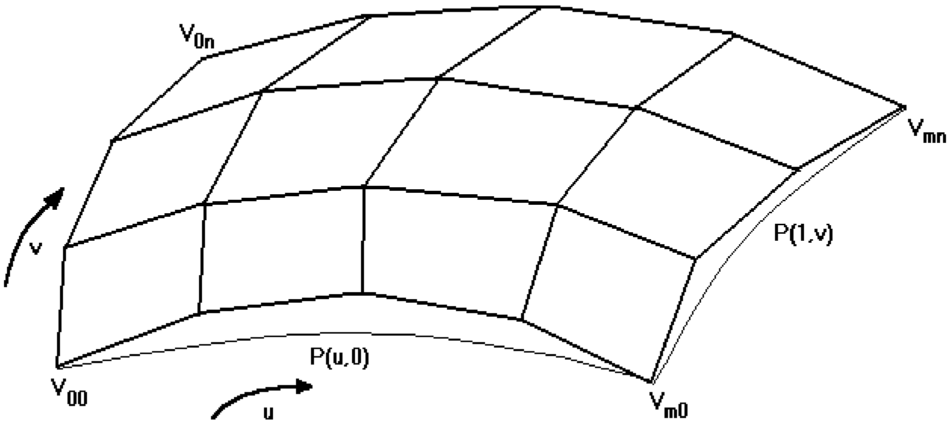


Rysunek 69. Powierzchnie jak poprzednio, w wersji wyrenderowanej oraz z liniami typu "zebra", uzyskane przy użyciu Alias Surface 2017. Im wyższa klasa ciągłości, tym płynniej układają się linie zebry.

W stosunku do linii zebry obowiązuje ta sama zasada, którą pokazuje rys. 9.7: linie zebry mają klasę ciągłości o jeden niższą niż klasa powierzchni. Zatem na powierzchni G2 linie zebry są gładkie, ale mają nieciągłą krzywiznę; dopiero na powierzchni G3 linie zebry nie mają skoku krzywizny. Te różnice są jednak bardzo subtelne i zwykle trudne do zaobserwowania gołym okiem. Dlatego na ogół projektanci zadowalają się ciągłością G2 (która jest nieodzowna w zastosowaniach inżynierskich), a ciągłość G3 wymuszają w bardzo specyficznych sytuacjach.

Bardzo ciekawie zagadnienia ciągłości G3 prezentuje krótki filmik pt. Autodesk Alias 2011 Essentials - G3 Continuity .

7 Powierzchnie Béziera



Rysunek 70. Płaszczyzna styczna i wektor normalny do powierzchni parametrycznej.

Powierzchnie Béziera zdefiniowane są siatką wierzchołków kontrolnych za pomocą funkcji Bernsteina, w sposób będący uogólnieniem metody dla krzywych:

$$\mathbf{P}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\mathbf{V}_{\boldsymbol{i,j}}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v) \quad ; \quad \begin{cases}0\leq \mathrm{u}\leq 1\\ 0\leq \mathrm{v}\leq 1\end{cases}$$

Definicję tę często zapisuje się również w postaci macierzowej:

$$\mathbf{P}(u,v)=\begin{bmatrix}B_{0,m}(u) & B_{1,m}(u) & \dots & B_{m,m}(u)\end{bmatrix}\cdot\mathbf{V}\cdot\begin{bmatrix}B_{0,n}(v)\\ B_{1,n}(v)\\ \dots\\ B_{n,n}(v)\end{bmatrix}$$

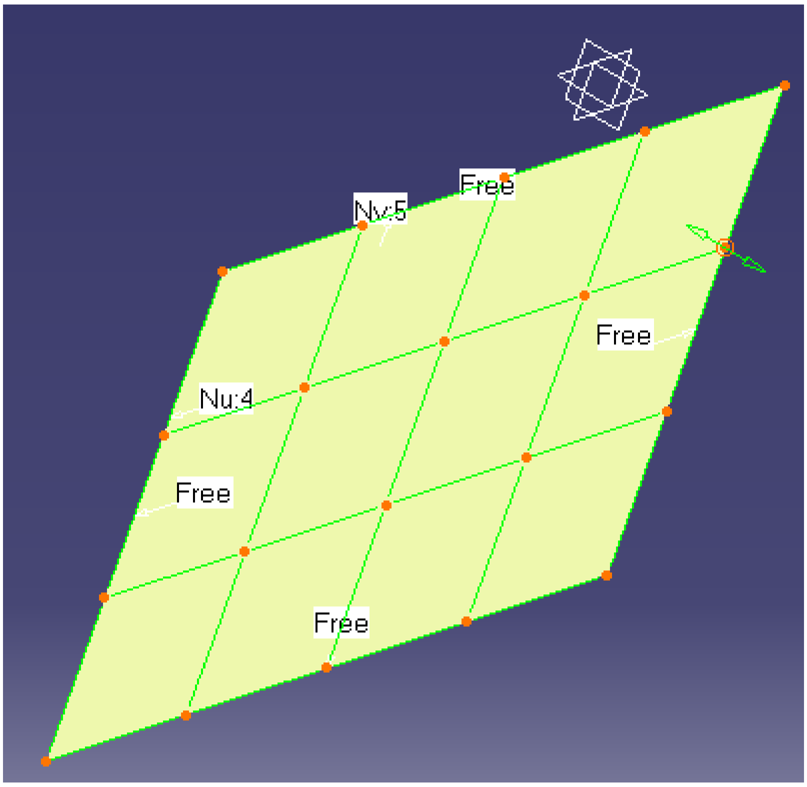
gdzie

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix}\mathbf{V}_{00} & \dots & \mathbf{V}_{\boldsymbol{0n}}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathbf{V}_{\mathrm{m0}} & \dots & \mathbf{V}_{\mathrm{mn}}\end{bmatrix}$$

jest siatką wierzchołków kontrolnych Béziera.

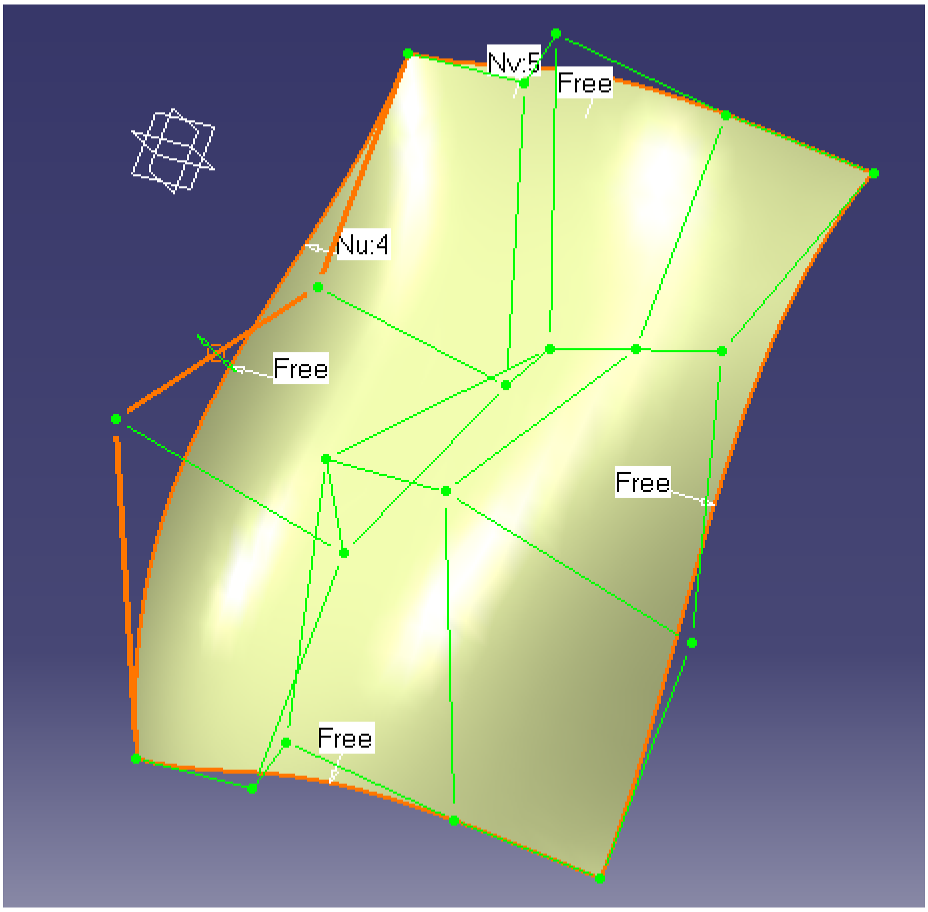
Płat powierzchni w reprezentacji Béziera (w skrócie nazywany **powierzchnią Béziera**) jest więc średnią ważoną wierzchołków siatki, z których cztery narożne leżą na definiowanej powierzchni. Ma on własności analogiczne do krzywych Béziera. Powierzchnia tak zdefiniowana jest stopnia *m* względem parametru *u* i stopnia *n* względem parametru *v*.

Modelowanie powierzchni metodą Béziera często zaczyna się od płaskiej siatki wierzchołków:



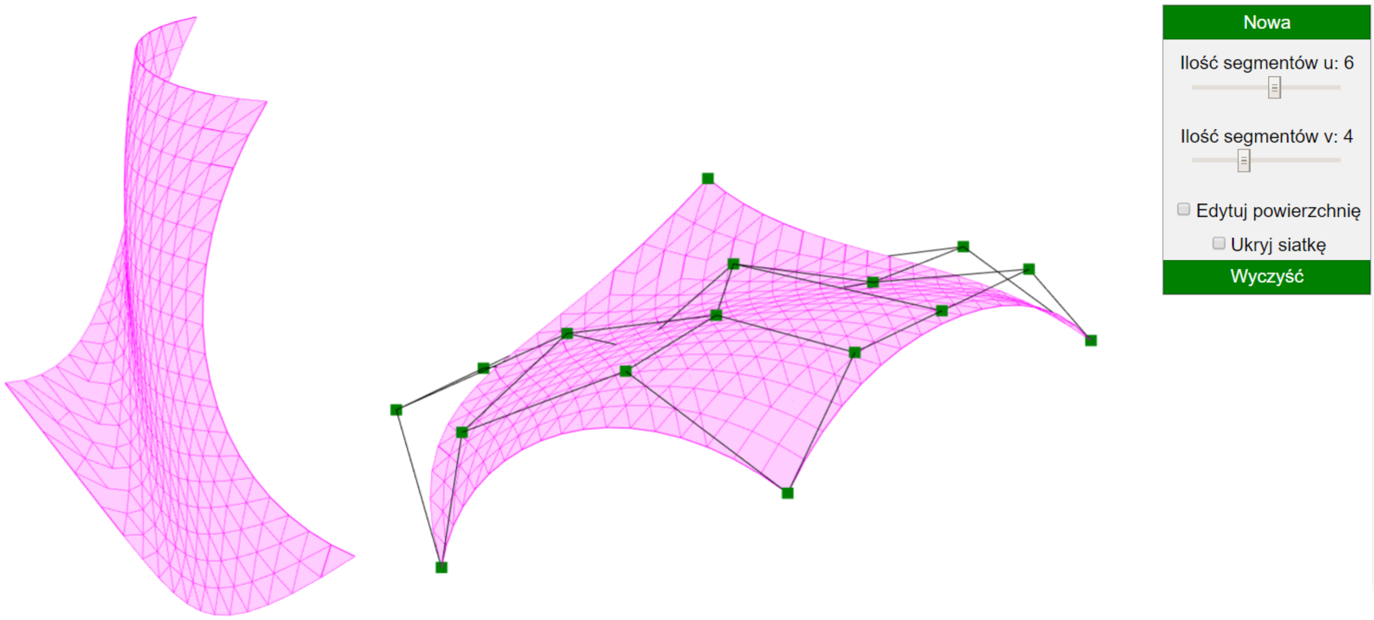
Rysunek 71. . Powierzchnia Béziera 3 stopnia w kierunku u i 4 stopnia w kierunku v. Wykonano przy użyciu systemu Catia..

W następnym etapie wierzchołki dowolnie przesuwa się w przestrzeni, aż do uzyskania pożądanego kształtu:



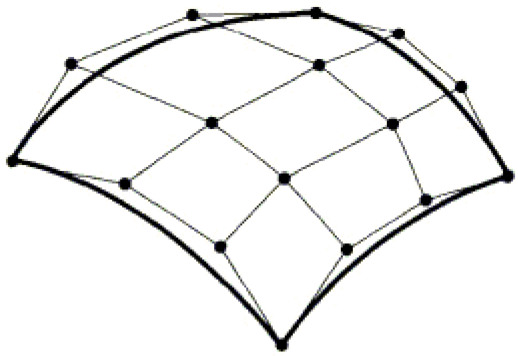
Rysunek 72. Powierzchnia po modyfikacji siatki wierzchołków jak wyżej.

Możliwości te można przetestować przy użyciu Aplikacji nr 10:



*Rysunek 73 - **Aplikacja nr 10**: **M**odelowanie płata Béziera. Przycisk "Nowa" pozwala stworzyć nowy płat. W oknie dialogowym można wybrać ilość kolumn i wierszy siatki punktów kontrolnych (tutaj: 4x5), a więc ustalić stopień płata w każdym z kierunków. Włączenie "Edytuj" umożliwia przeciąganie punktów kontrolnych siatki. Obroty płata wykonujemy myszką przy wyłączonej opcji Edytuj. Tutaj poglądowo płat w dwu różnych ustawieniach, w jednym włączona opcja „Ukryj siatkę".*

Bikubiczne powierzchnie Béziera są szczególnym i najczęściej spotykanym przypadkiem: powierzchnia jest trzeciego stopnia w obu kierunkach. Jest więc zdefiniowana siatką 16 punktów kontrolnych:



Rysunek 74. Bikubiczna powierzchnia wraz z definiującą ją siatką wierzchołków kontrolnych Béziera.

Wektorowy zapis powierzchni bikubicznej ma postać następującą:

$$\mathbf{P}(u,v) = [u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1] \cdot B \cdot V \cdot B^T \cdot \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

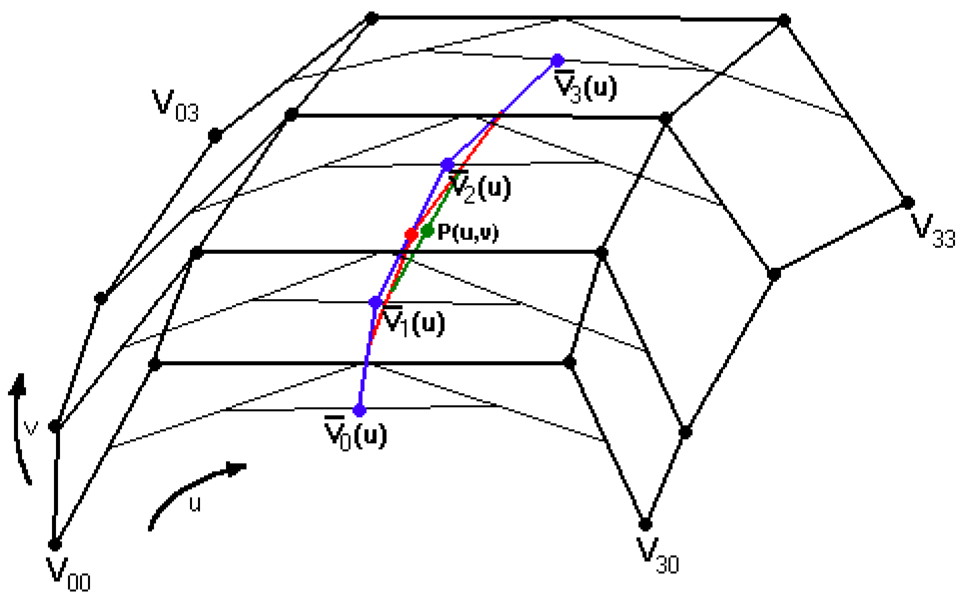
zaś **V** jest tablicą wierzchołków siatki:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V_{00}} & \mathbf{V_{01}} & \mathbf{V_{02}} & \mathbf{V_{03}} \\ \mathbf{V_{10}} & \mathbf{V_{11}} & \mathbf{V_{12}} & \mathbf{V_{13}} \\ \mathbf{V_{20}} & \mathbf{V_{21}} & \mathbf{V_{22}} & \mathbf{V_{23}} \\ \mathbf{V_{30}} & \mathbf{V_{31}} & \mathbf{V_{32}} & \mathbf{V_{33}} \end{bmatrix}$$

Punkty powierzchni Béziera można również wyznaczyć korzystając wyłącznie z algorytmów dla krzywych. Wykonuje się to w dwóch etapach:

- Dla zadanej wartości *u* wyznacza się punkty pośrednie $\mathbf{V}_i(u)$, tworzące wielobok Béziera dla krzywej stałego parametru *u*.
- Następnie dla danego *u* i tak otrzymanego wieloboku pośredniego wyznacza się punkty **P**(*u,v*), tworzące linie stałego parametru *u*.

Metoda może być zastosowana w sposób odwrotny, prowadząc do wyznaczenia linii stałego parametru *v*.



Rysunek 75. Zasada wyznaczania punktów na powierzchni Béziera. Wykorzystano metodę de Casteljau do generowania punktów krzywej.

Kolejna Aplikacja nr 11 (Rysunek 76) pokazuje możliwość modelowania z użyciem współczynników wagowych. Otrzymujemy tzw. wymierne powierzchnie Béziera, zdefiniowane na analogicznych zasadach, jak krzywe wymierne Béziera.

*Rysunek 76 – **Aplikacja nr 11**. Wymierny płat Béziera, tutaj zdefiniowany siatką 3*4 punktów kontrolnych. Zasady modelowania jak poprzednio. Dodatkowo w trybie "Edycji" po naciśnięciu prawego przycisku myszy na wybranym punkcie kontrolnym można zmienić jego wagę.*

8 Powierzchnie B-sklejane i powierzchnie NURBS

Powierzchnie B-sklejane definiuje się jako tzw. iloczyn tensorowy krzywych B-sklejanych stopnia *k* względem parametru *u* i stopnia *r* względem parametru *v*:

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \mathbf{D_{ij}} \cdot N_{i,k}(u) \cdot N_{j,r}(v) \quad ; \quad \begin{cases} u_k \le u \le u_{m+1} \\ v_r \le v \le v_{n+1} \end{cases}$$

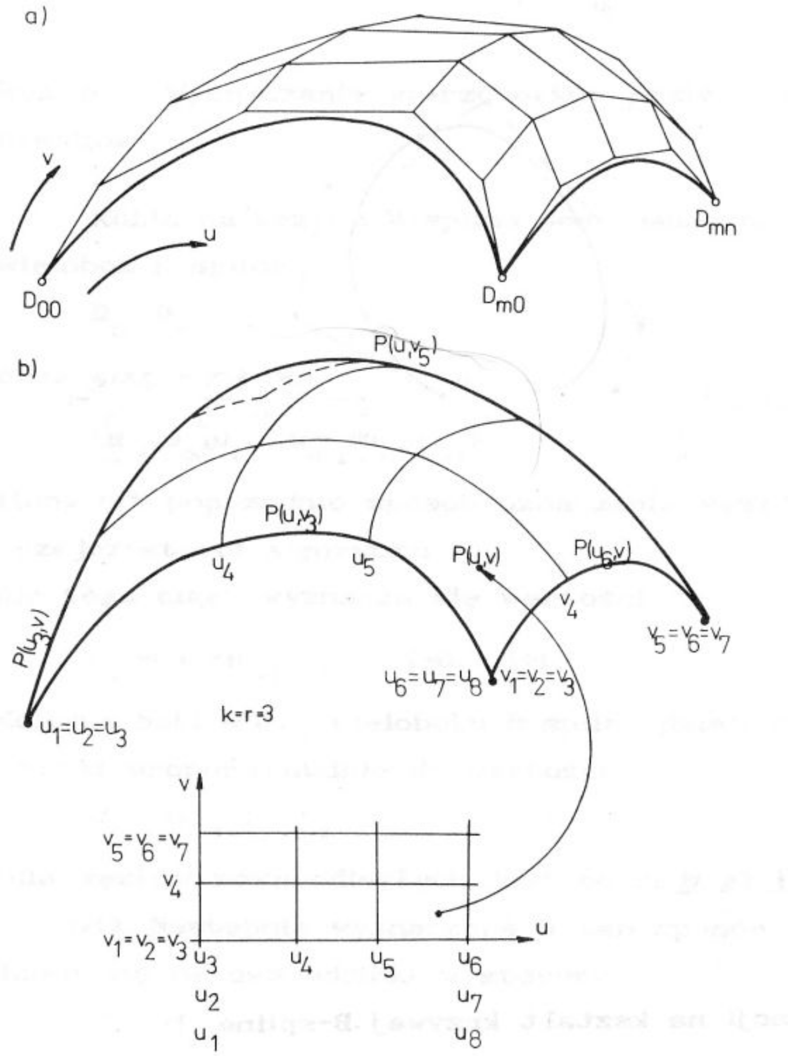
Powierzchnię definiują wierzchołki kontrolne tworzące siatkę (*m*+1)*(*n*+1) punktów:

$\mathbf{D_{ij}}$; $\quad i = 0, \dots, m$; $\quad j = 0, \dots, n$

oraz dwa ciągi węzłów - dla każdego parametru osobne:

$$(u_1, u_2, \dots, u_{m+k}) \; ; \qquad u_i \le u_{i+1}$$
$$(v_1, v_2, \dots, v_{n+r}) \; ; \qquad v_i \le v_{i+1}$$

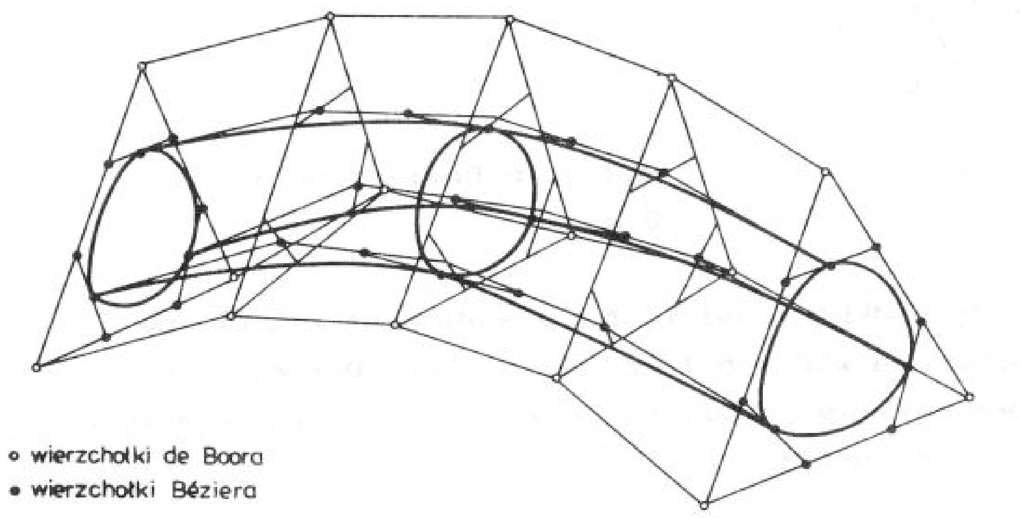
Powierzchnia tak zdefiniowana składa się z (m-k+1)*(n-r+1) płatów. Przykład dla *k*=3 i *r*=3 (czyli dla tzw. powierzchni bikubicznej) podano poniżej:



*Rysunek 77. Zasada definiowania bikubicznej powierzchni B-sklejanej. Liczba płatów wynika z liczby wierszy i kolumn siatki (tutaj: 6*5) oraz stopnia powierzchni w każdym z kierunków (tutaj: 3*3).*

Do wyznaczania punktów powierzchni stosuje się w ogólnym przypadku szybki i stabilny algorytm de Boora, albo też, dla powierzchni stopnia 2 lub 3, geometryczny algorytm Boehma będący uogólnieniem algorytmu dla krzywych:

- Najpierw stosuje się algorytm Boehma w stosunku do każdej kolumny siatki
- Następnie ten sam algorytm stosuje się do każdego wiersza tak otrzymanej pośredniej macierzy wierzchołków.



Rysunek 78. Zasada wyznaczania wierzchołków Béziera na podstawie siatki wierzchołków B-sklejanych (zwanych też wierzchołkami de Boora).

Powierzchnie NURBS definiuje się za pomocą siatki wierzchołków kontrolnych

$\mathbf{D_{ij}}$; $i = 0, \dots, m$; $j = 0, \dots, n$

związanych z nimi współczynników wagowych:

$w_{ij} > 0$; $i = 0, \dots, m$; $j = 0, \dots, n$

i dwu niezależnych ciągów węzłów:

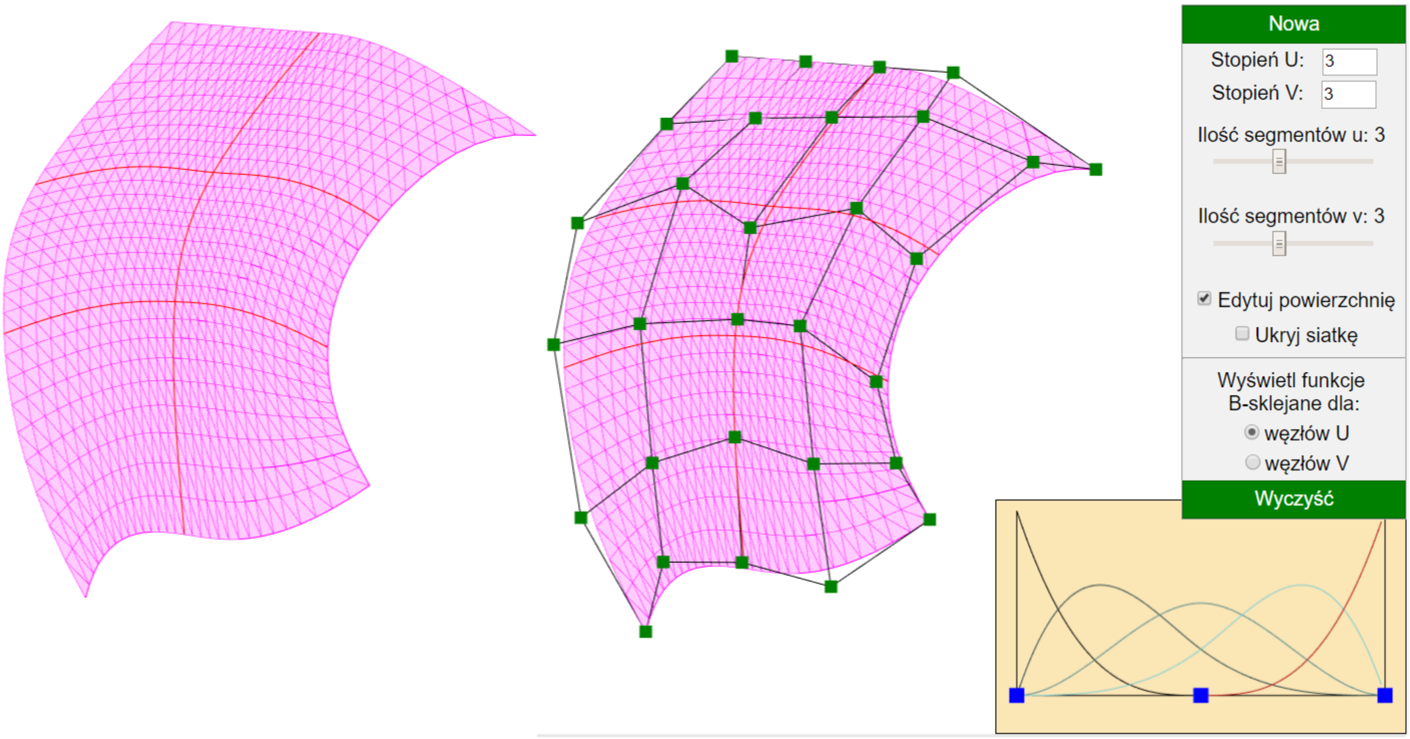
$(u_1, u_2, \dots, u_{m+k})$; $u_i \leq u_{i+1}$

$(v_1, v_2, \dots, v_{n+r})$; $v_i \leq v_{i+1}$

Pełna definicja ma postać analogiczną do wymiernych krzywych B-sklejanych:

$$\mathbf{P}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} w_{ij} \mathbf{D_{ij}} N_{i,k}(u) \cdot N_{j,r}(v)}{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} w_{ij} N_{i,k}(u) \cdot N_{j,r}(v)} \quad ; \quad \begin{cases} u_k \leq u \leq u_{m+1} \\ v_r \leq v \leq v_{n+1} \end{cases}$$

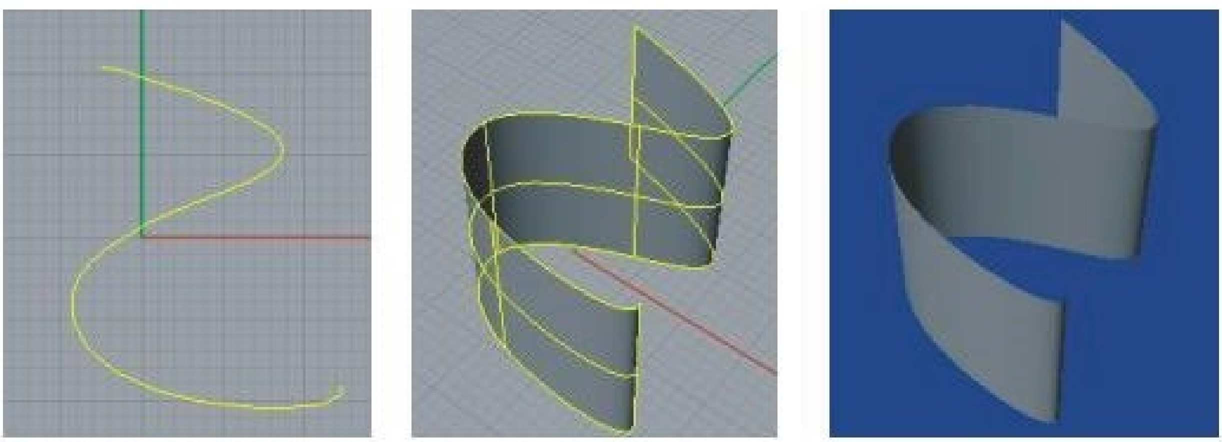
Własności powierzchni NURBS prezentuje rozbudowana Aplikacja nr 12 (Rysunek 79).



*Rysunek 79 – **Aplikacja nr 12**: Powierzchnie NURBS. Aplet umożliwia stworzenie i modelowanie powierzchni NURBS. Po naciśnięciu przycisku "Nowy" w oknie dialogowym można ustalić wielkość siatki wierzchołków kontrolnych (tutaj: 5*6). W trybie edycji możliwa jest zmiana stopnia powierzchni w każdym w kierunku, edycja wag wierzchołków oraz edycja ciągu węzłów dla każdego z kierunków.*

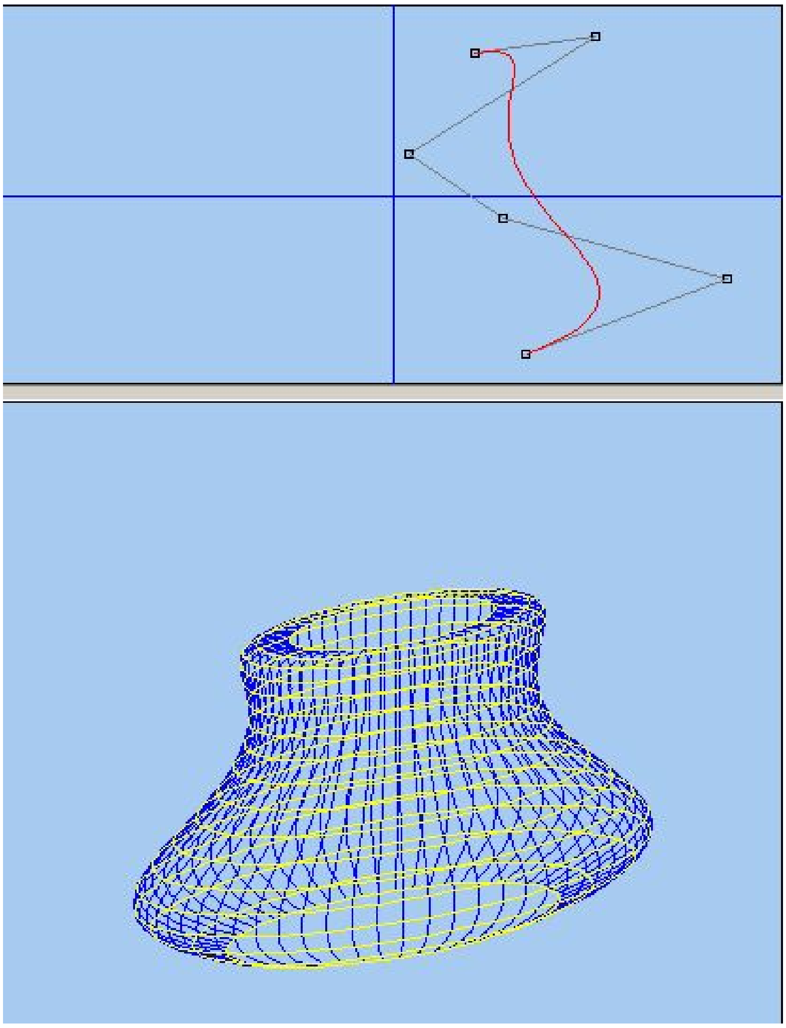
9 Powierzchnie definiowane za pomocą krzywych

Definiowanie powierzchni i brył za pomocą uprzednio zdefiniowanych krzywych jest metodą najbardziej tradycyjną. Najprostszym sposobem jest "wyciąganie " krzywej w zadanym kierunku - operacje takie noszą nazwę "*Extrude*":



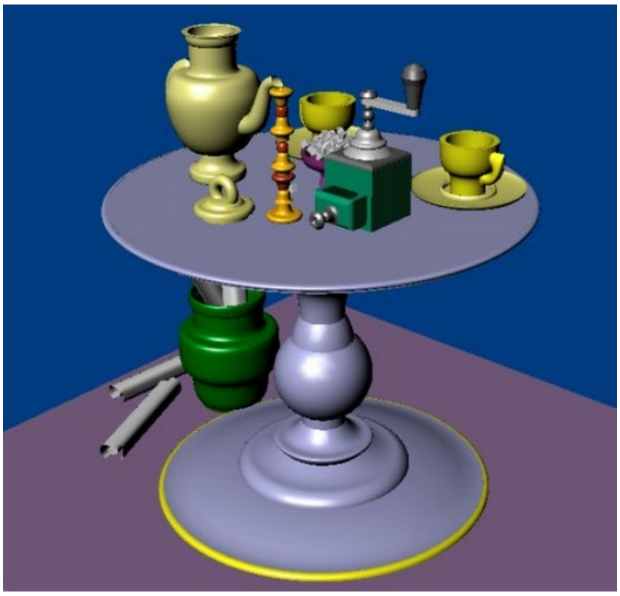
Rysunek 80. Powierzchnia wyciągana z krzywej płaskiej o zadany wektor

Równie intuicyjne jest generowanie powierzchni obrotowych ("*Revolve*"):



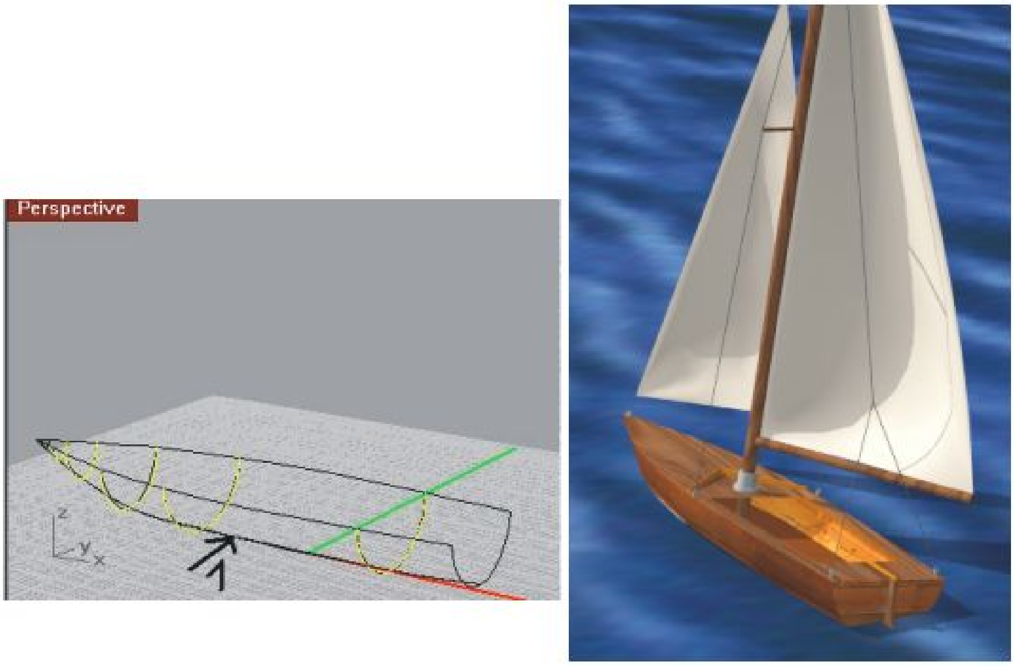
Rysunek 81.Definiowanie powierzchni będącej wynikiem obrotu krzywej Béziera wokół zadanej osi.

Przykład prostej sceny z rozmaitymi powierzchniami obrotowymi, wykonanej w modelerze Rhinoceros, przedstawia rysunek 82.



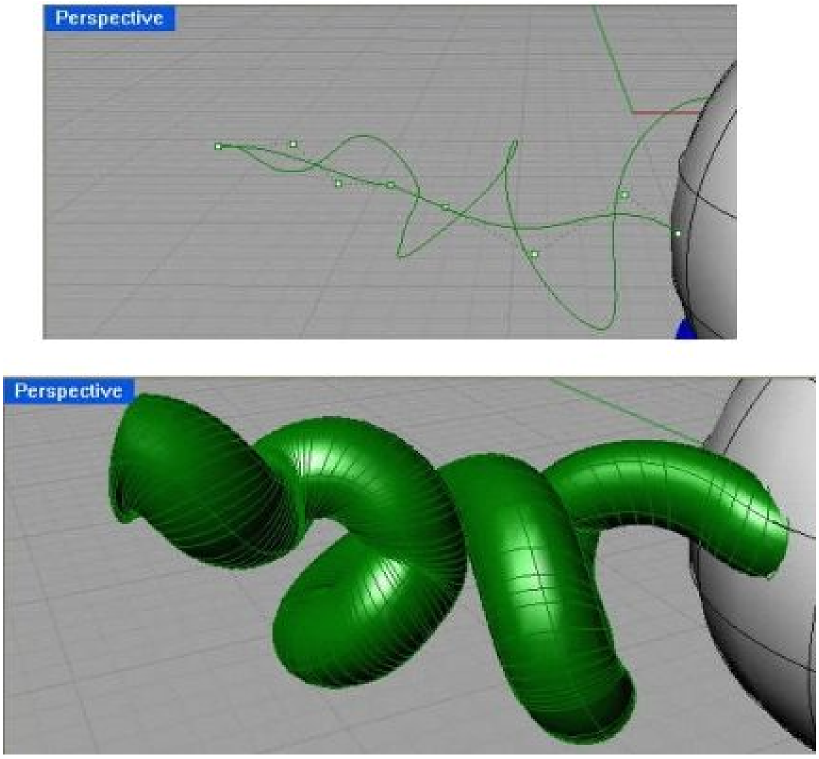
Rysunek 82. https://www.rhino3d.com/gallery/73/17830

Powierzchnię można też "naciągnąć" (rozpiąć) na uprzednio zadanych krzywych (jest to tzw. *"skining"*, lub inaczej *"lofting"*).



Rysunek 83. Powierzchnia kadłuba rozpięta na wręgach - czyli interpolująca zadane krzywe.

Można też zdefiniować ją jako wynik ruchu profilu po jednej lub dwu prowadnicach ("*rail*") - jest to tzw. "*sweeping*":



Rysunek 84. Powierzchnia powstała przez ruch okręgu po spirali nawiniętej wokół zadanej krzywej.

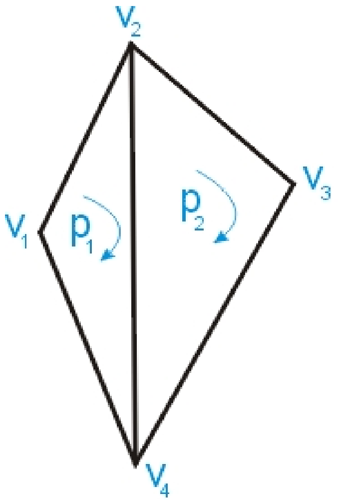
10 Powierzchnie reprezentowane siatkami wielościanowymi (meshes)

Uniwersalną formą zapisu obiektów 3D, zarówno powierzchni jak i brył, są siatki wielościanowe (*polygon meshes*). Najczęściej są to siatki trójkątów, mające tę zaletę, że są to zawsze ściany płaskie. Spotyka się też siatki wypukłych czworokątów lub innych, zwykle wypukłych, wieloboków. Siatki wielościanowe są zazwyczaj wynikiem aproksymacji następujących struktur:

- powierzchni w reprezentacji NURBS
- powierzchni typu subdivision (o których opowiemy dalej)
- chmur punktów, najczęściej pozyskiwanych metodą skanowania obiektów
- innych struktur, których tu nie omawiamy, np. brył CSG

Taka uniwersalna forma zapisu pozwala w jednolity sposób traktować wszystkie obiekty poddawane renderingowi, co ułatwia stosowanie zaawansowanych metod realistycznej wizualizacji.

W wielu przypadkach strukturę ścian zapamiętuje się bardzo prosto - jako listę wszystkich wierzchołków i listę ścian, z których każda określona jest przez adresy wierzchołków (Rysunek 84).

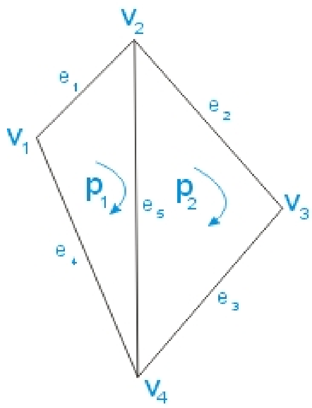


$$\mathbf{v} = \begin{cases} \mathbf{v}_1 = (x, y, z) \\ \mathbf{v}_2 = \ldots \\ \ldots \\ \mathbf{v}_4 = \ldots \end{cases}$$

$$\mathbf{p} = \begin{cases} \mathbf{p}_1 = (1,2,4) \\ \mathbf{p}_2 = (2,3,4) \end{cases}$$

Rysunek 85.

Bardziej złożone struktury polegają na tworzeniu dodatkowo listy krawędzi, dzięki czemu krawędzie przy wyświetlaniu nie są rysowane dwukrotnie (dla każdej przyległej ściany osobno); znak lambda (λ) na Rys. 85 oznacza wskaźnik NULL/**nil**.



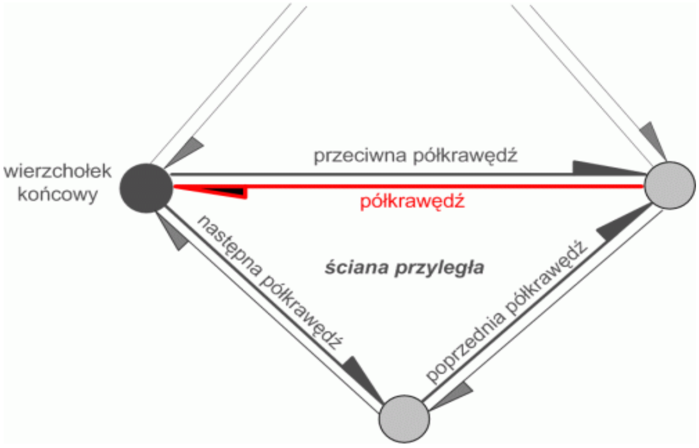
$$\mathbf{v} = \begin{cases} \mathbf{v}_1 = \ldots \\ \ldots \\ \mathbf{v}_4 = \ldots \end{cases}$$

$$\mathbf{p} = \begin{cases} \mathbf{p}_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_4) \\ \mathbf{p}_2 = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_5) \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{e}_1 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{p}_1, \lambda) \\ \mathbf{e}_2 = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{p}_2, \lambda) \\ \mathbf{e}_3 = (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{p}_2, \lambda) \\ \mathbf{e}_4 = (\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1, \mathbf{p}_1, \lambda) \\ \mathbf{e}_5 = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \end{cases}$$

Rysunek 86.

Jeszcze bardziej złożona struktura, o nazwie **half-edge**, jest budowana na wskaźnikach. Spójrzmy na Rysunek 86:

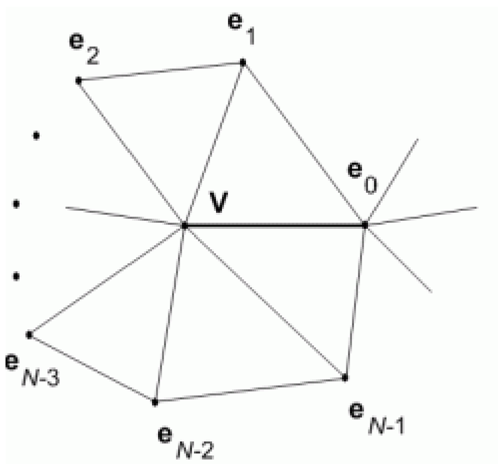


Rysunek 87. Struktura half-edge w reprezentacji brył

W tym przypadku każda krawędź jest reprezentowana przez dwie bliźniacze półkrawędzie, zwrócone w kierunkach przeciwnych. Każda półkrawędź (half-edge), zaznaczona tu na czerwono, zawiera wskaźnik na:

- półkrawędź przeciwną do danej
- wierzchołek końcowy półkrawędzi danej
- ścianę przyległą do danej półkrawędzi
- następną półkrawędź tej ściany, liczoną w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara
- poprzednią półkrawędź tej ściany.

Jest to typowa, aczkolwiek nie minimalna reprezentacja struktury half-edge. Minimalna postać half-edge zawiera tylko wskaźnik na półkrawędź przeciwną i następną, wygodniejsza w użyciu jest jednak struktura taka jak pokazaliśmy, bardziej rozbudowana. Dzięki złożonej strukturze half-edge różnorodne. operacje (np związane z algorytmem podpodziału, którym zajmiemy się w następnym rozdziale) stają się znacznie bardziej efektywne. Przykładowo, żeby obejść wszystkie krawędzie zbiegające się w jakimś wierzchołku, będącym końcem danej półkrawędzi (Rysunek 87),



Rysunek 88

należy wykonać następujące kroki:

- z danej półkrawędzi przejść na półkrawędź następną
- z tej następnej przejść na przeciwną do niej
- z tej przeciwnej (która "wpada" do wierzchołka) na półkrawędź następną
- z tej następnej znów na przeciwną

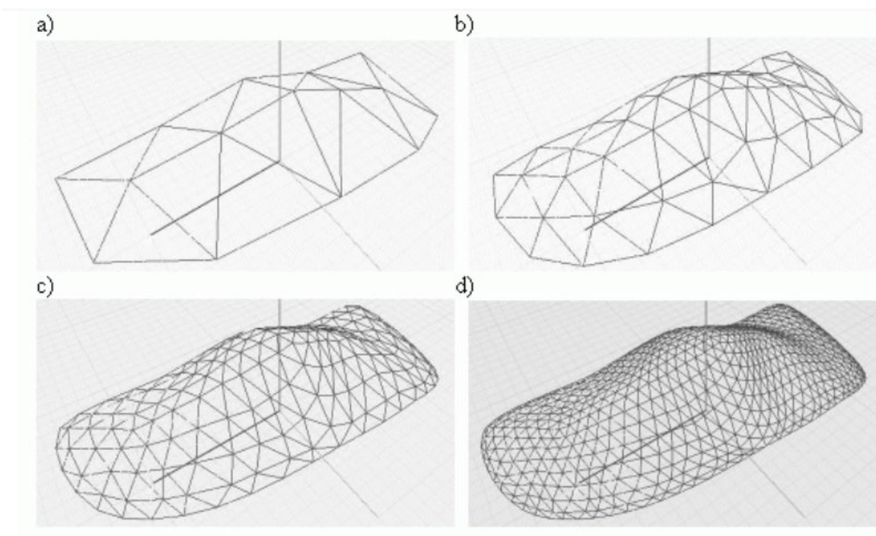
- itd., aż wrócimy na półkrawędź pierwotną.

Przejście z jakiejś półkrawędzi na przeciwną lub następną to tylko użycie jednego wskaźnika - błyskawiczna zmiana adresu. Cały obieg krawędzi w wierzchołku zapisuje się więc bardzo zwięźle i wykonuje niezwykle szybko. A spróbujmy to samo wykonać posługując się reprezentacją prostszą, jedną z tych, co na początku rozdziału. To będzie nieporównanie bardziej złożone!

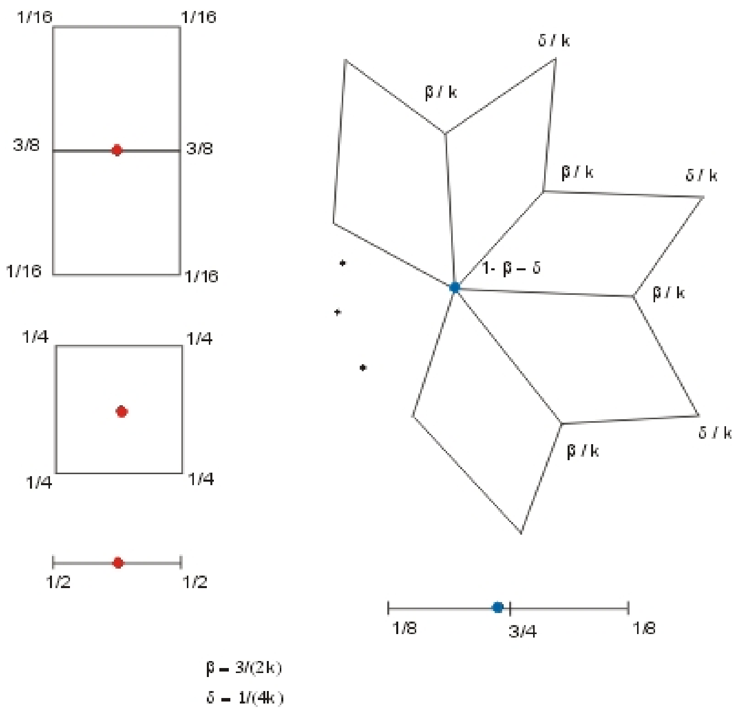
11 Powierzchnie typu subdivision

Tworzenie powierzchni metodami typu subdivision ma najkrótszą historię w dziedzinie obrazowania, jakkolwiek zasady podpodziałów wywodzą się z zaprezentowanego w rozdziale 8 algorytmu de Casteljau. Dopiero jednak lata 90-te ub. stulecia stworzyły podstawy do użycia nowych matematycznych teorii w dziedzinie produkcji pełnometrażowych filmów animowanych, z których pierwszym był film Toy Story zrealizowany w studiu Pixar. Metody typu subdivision pozwoliły bowiem na znacznie większą elastyczność podczas modelowania, niż powierzchnie NURBS, które zdefiniowane są siatką regularną i wszelkie modyfikacje siatki wierzchołków kontrolnych (np. zwiększanie liczby wierzchołków) muszą się odbywać w odniesieniu do całych wierszy bądź kolumn siatki (co łatwo sprawdzić na aplecie z poprzedniego segmentu, obrazującym modelowanie powierzchni NURBS). Powierzchnie typu subdivision również definiowane są siatką wierzchołków (ale nie są to wierzchołki kontrolne), która może być o dowolnej, nieregularnej strukturze i którą można w dowolny sposób iteracyjnie zagęszczać, i to zagęszczać lokalnie, zmierzając do pożądanego kształtu.

Zasadę definiowania powierzchni metodą podpodziałów znakomicie obrazują animowane gif-y zamieszczone na stronach:
https://pixelandpoly.com/graphics/referenceimages/bay_natash_build_2.gif
https://pixelandpoly.com/graphics/referenceimages/bay_natash_build_3.gif .
oraz następujący rysunek:



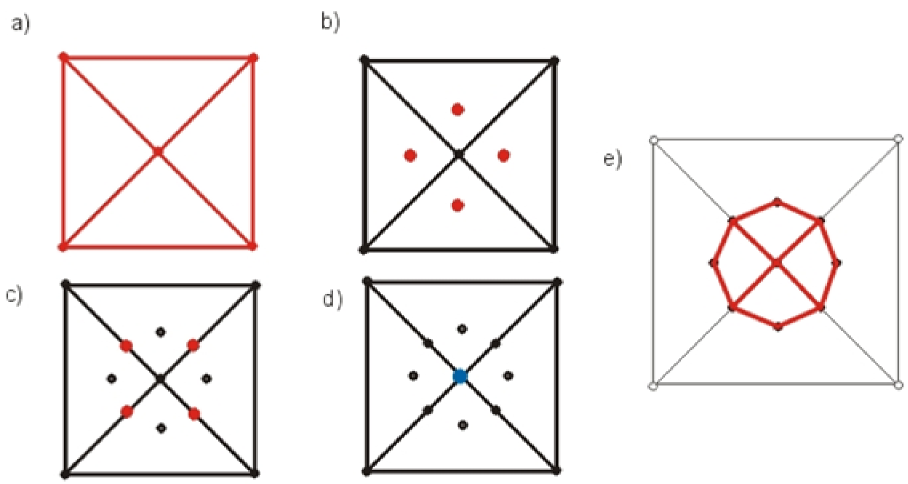
Spośród szeregu algorytmów opracowanych podpodziałów na Rys. 88 przedstawiono jeden z najbardziej typowych:



Rysunek 89. Metoda Catmulla-Clarka.

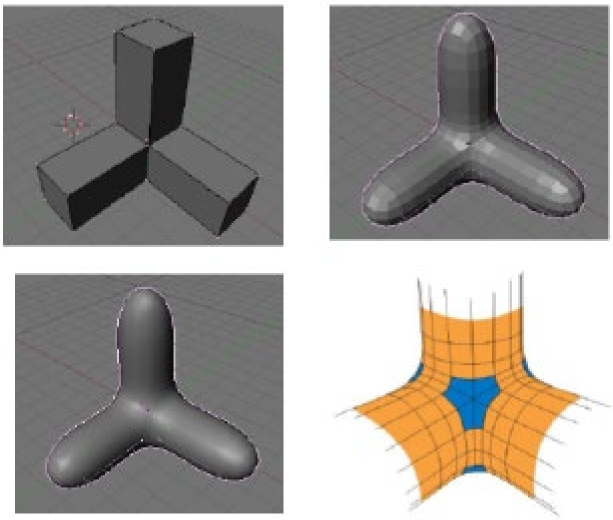
Zasada ta odnosi się do wszelkich siatek przestrzennych. W odniesieniu do prostej siatki 2D można ją opisać następująco:

- nowy wierzchołek, oznaczony kolorem czerwonym, powstaje ze "starych" wierzchołków siatki, którym przypisuje się wagi, jak podano liczbowo.
- następnie, w zależności od nowych i starych wierzchołków, modyfikuje się stare wierzchołki, oznaczone kolorem niebieskim. Wartość *k* jest liczbą krawędzi siatki zbiegających się w danym wierzchołku.



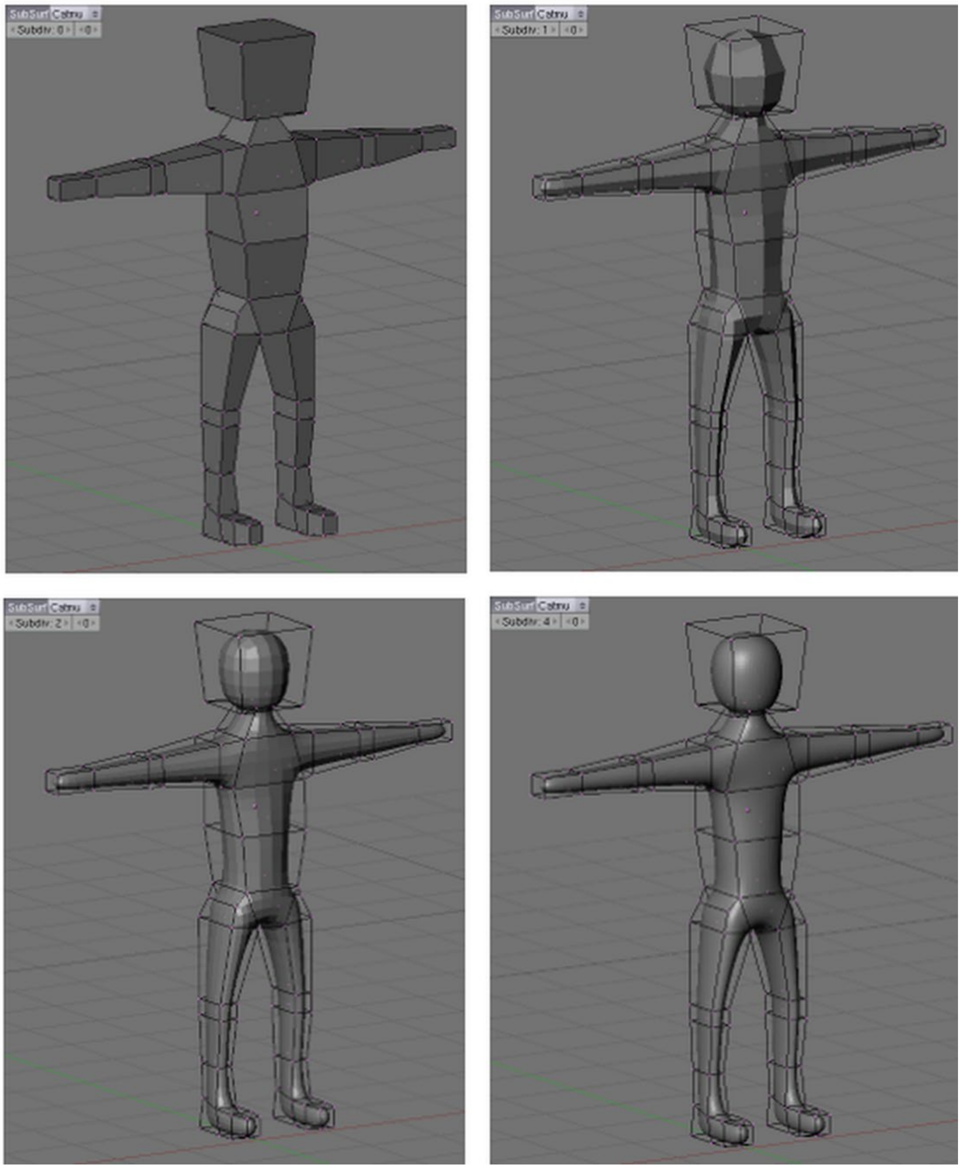
Rysunek 90. Zasada podpodziałów powierzchni w metodzie Catmulla-Clarka. Początkowe trójkąty zostają zamienione na czworokąty i cały dalszy proces przebiega tylko na siatkach czworokątów.

Powierzchnie subdivision reprezentowane są jak widać siatką ścian. Algorytm Catmulla-Clarka należy do tych algorytmów, gdzie struktura half-edge ma wyjątkowe uzasadnienie ze względu na to, że dzięki niej cały obieg krawędzi w wierzchołku zapisuje się bardzo zwięźle i wykonuje niezwykle szybko, co daje radykalną poprawę efektywności w stosunku do prostszych struktur danych.



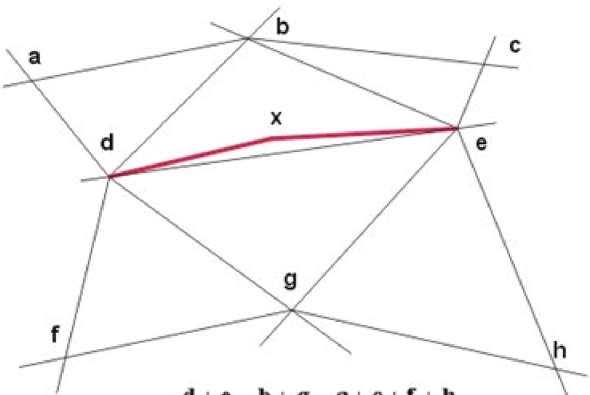
Rysunek 91. Tylko obszary w narożach, zaznaczone na niebiesko, nie pokrywają się z powierzchniami B-sklejanymi i nie mają zachowanej ciągłości G2 z sąsiednimi powierzchniami.

Metoda Catmulla-Clarka we wszystkich regularnych obszarach siatki jest zbieżna do bikubicznych powierzchni B-sklejanych, natomiast daje inne wyniki w tych obszarach, gdzie liczba krawędzi siatki zbiegających się w wierzchołku jest różna od czterech. Na Rys. 92 zamieszczono poglądowy przykład modelowania powierzchni metodą podpodziałów, zrealizowany z użyciem modelera Blender.



Rysunek 92. Metoda Catmulla-Clarka w Blenderze: krok 0, 1 , 2 i 4 algorytmu.

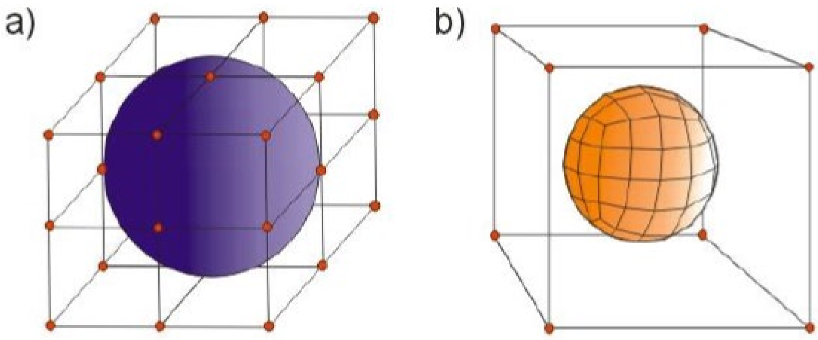
Inne algorytmy zdefiniowane są dla siatek trójkątów. Należy do nich algorytm opracowany przez C. Loopa oraz tzw. algorytm Butterfly:



$$x = \frac{d+e}{2} + \frac{b+g}{8} - \frac{a+c+f+h}{16}$$

Rysunek 93. Zasada podpodziałów w metodzie zwanej Butterfly. Nowy wierzchołek x powstaje ze "starych" wierzchołków siatki zgodnie z podanym wzorem.

Zasadniczym problemem, nad którym pracują obecnie matematycy, jest opracowanie zasad dokładnego wykonywania na nich operacji takich jak wyznaczanie wektorów normalnych, przecięć powierzchni itp. - mimo że nie mają one skończonej postaci opisu matematycznego, jak powierzchnie NURBS, a tylko są definiowane jako granica nieskończonej ilości podpodziałów. Wówczas powierzchnie typu "subdivision" nie tylko znajdą swoje miejsce również w systemach CAD/CAM obok powierzchni NURBS, jak to się już właśnie stopniowo dokonuje, ale być może je po prostu zastąpią jako ich uogólnienie.



Rysunek 94. Porównanie powierzchni NURBS i powierzchni „subdivision” zdefiniowanych sześcienną siatką wierzchołków

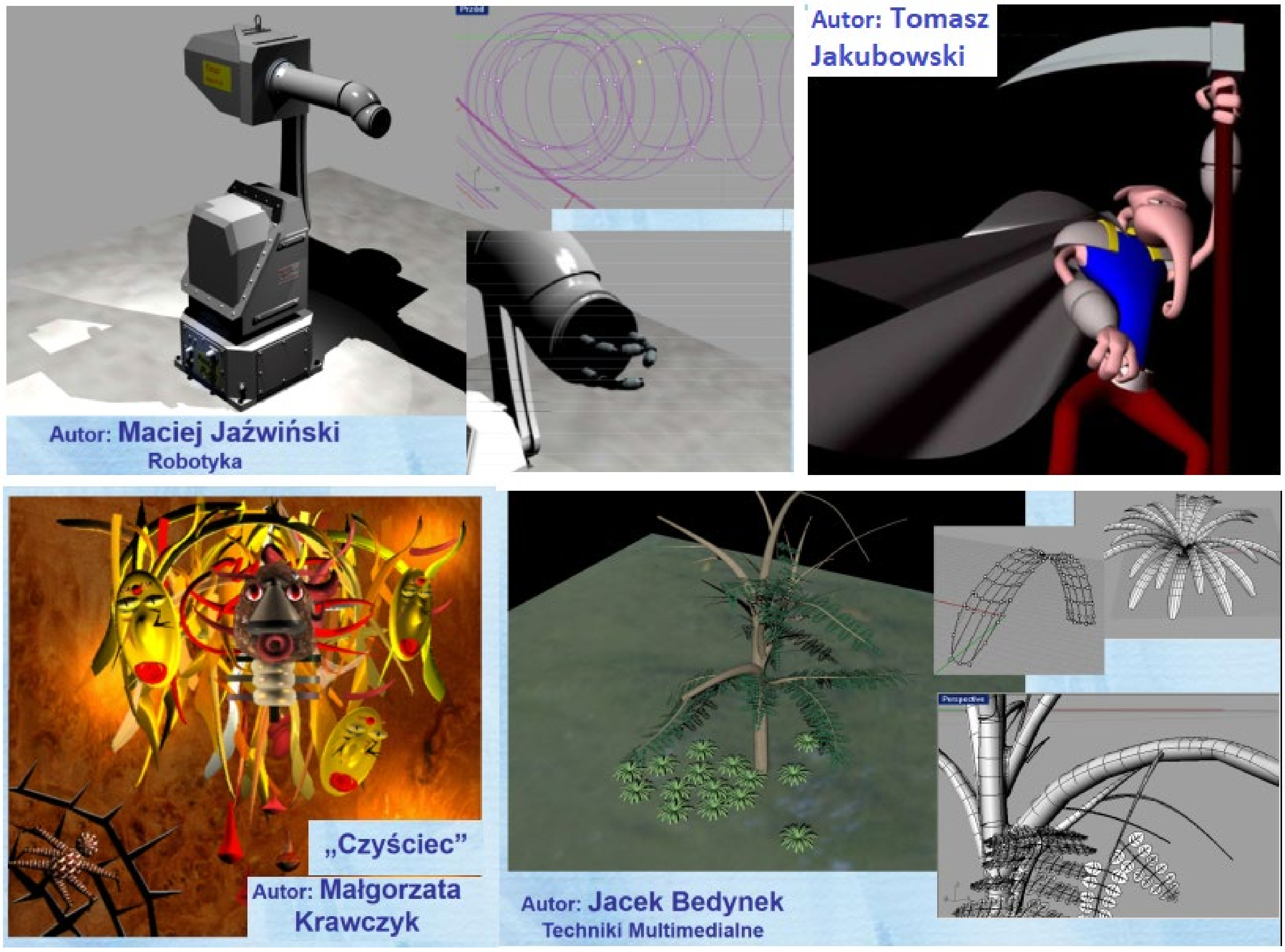
12 Przykłady modeli wykonanych z użyciem reprezentacji NURBS w modelerze Rhinoceros

Historię rozwoju Rhino możemy prześledzić tutaj: https://wiki.mcneel.com/rhino/rhinohistory. Jak widać, kolejne wersje wydawane są średnio co 5 lat.

Prace studentów Wydziału Mechatroniki wykonane w Rhino 3.0 (rok 2003-2004) przedstawia Rysunek 94.
Inne wczesne prace z tego samego okresu można znaleźć w galerii „student work” na stronie prac studentów Warsaw University of Technology: https://www.rhino3d.com/gallery/73 (była to jedna z pierwszych galerii prac studenckich z różnych uczelni na świecie zamieszczona na stronie producenta Rhino).

PRZYKŁADY z rozwiązaniami

*Ostatnie prace studentów Mechatroniki, wykonane w Rhino 5.0 w roku ak. 2017/2018, przedstawia Rysunek 95, a zwięzłe raporty z ich wykonania, prezentujące najważniejsze kroki wraz ze zrzutami ekranów, znajdują się **w osobnym katalogu**. Celem przewodnim wykonanych prac było zaprezentowanie podstawowych, różnorodnych form modelowania powierzchni krzywoliniowych.*



Rysunek 95. Przykłady prac wykonanych w Rhino 4 na Wydziale Mechatroniki.

Rysunek 96. Modele 3D wykonane w Rhino 5