Ćwiczenie 2.1

Przedstawić funkcję

$$f(t) = 10 + 20\sin(\omega t) + 16\cos(5\omega t) + 8\cos(7\omega t)$$

w postaci wykładniczej szeregu Fouriera.

Rozwiązanie

Z definicji funkcji sinus i cosinus wynika następująca zależność

$$f(t) = 10 + 20\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + 16\frac{e^{j5\omega t} + e^{-j5\omega t}}{2} + 8\frac{e^{j7\omega t} + e^{-j7\omega t}}{2}$$

Stąd postać wykładnicza szeregu Fouriera dana jest zależnością

$$f(t) = 4e^{-j7\omega t} + 8e^{-j5\omega t} + 10e^{j90^o}e^{-j\omega t} + 10 + 10e^{-j90^o}e^{j\omega t} + 8e^{j5\omega t} + 4e^{j7\omega t}$$

Ćwiczenie 2.2

Zapisać twierdzenie Parsevala dla dwu przebiegów czasowych danych w następującej postaci

$$f(t) = 5 + 10\sin(\omega t) + 16\cos(2\omega t) + 12\cos(3\omega t)$$

$$g(t) = 2 + 8\sin(\omega t) + 10\cos(2\omega t) + 12\cos(5\omega t)$$

Rozwiązanie

Z definicji funkcji sinus i cosinus otrzymuje się następujące postaci wykładnicze szeregu Fouriera dla obu funkcji

$$f(t) = 5 + 10\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + 16\frac{e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t}}{2} + 12\frac{e^{j3\omega t} + e^{-j3\omega t}}{2}$$

$$f(t) = 6e^{-j3\omega t} + 8e^{-j2\omega t} + 5e^{j90^o}e^{-j\omega t} + 5 + 5e^{-j90^o}e^{j\omega t} + 8e^{j2\omega t} + 6e^{j3\omega t}$$

$$g(t) = 2 + 8\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + 10\frac{e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t}}{2} + 12\frac{e^{j5\omega t} + e^{-j5\omega t}}{2}$$

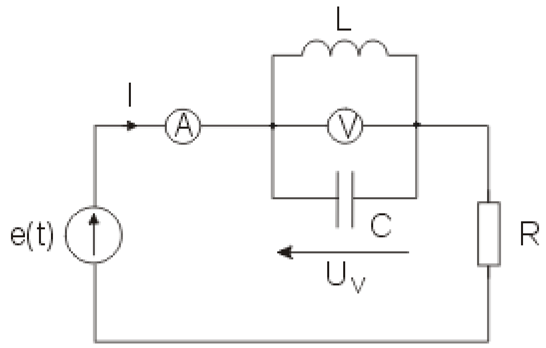
$$g(t) = 6e^{-j5\omega t} + 5e^{-j2\omega t} + 4e^{j90^o}e^{-j\omega t} + 2 + 4e^{-j90^o}e^{j\omega t} + 5e^{j2\omega t} + 6e^{j5\omega t}$$

Działania określone twierdzeniem Parsevala przyjmą więc postać

$$\overline{f(t)g(t)} = 5\cdot 2 + 5e^{j90^o}\cdot 4e^{-j90^o} + 8\cdot 5 + 6\cdot 0 + 0\cdot 6 + 5e^{-j90^o}\cdot 4e^{j90^o} + 8\cdot 5 + 6\cdot 0 + 0\cdot 6 = 130$$

Ćwiczenie 2.3

Wyznaczyć wskazania przyrządów pomiarowych w obwodzie z rys. 2.9.



Rys. 2.9 Schemat obwodu do zadania 2.3

Przyjąć następującą postać wymuszenia $e(t) = 10 + 20\sqrt{2}\sin(t) + 15\sqrt{2}\sin(2t)$. Wartości parametrów obwodu są następujące: R=2Ω, L=0,5H, C=0,5F.

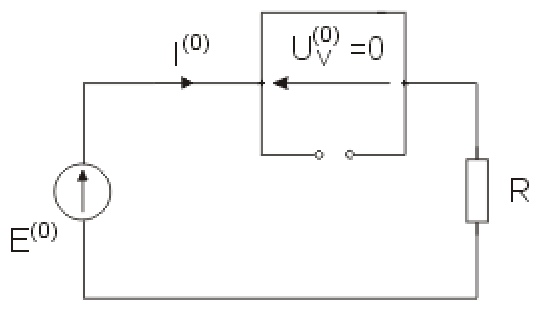
Uwaga: Woltomierze i amperomierze włączone w obwodzie mierzą moduły wartości skutecznych zespolonych odpowiednio napięcia i prądu.

Rozwiązanie

Ponieważ wymuszenie zawiera trzy harmoniczne, należy rozwiązać obwód trzy razy dla każdego wymuszenia oddzielnie.

Harmoniczna zerowa (składowa stała)

Obwód dla składowej stałej $E^{(0)} = 10$ przedstawiony jest na rys. 2.10 (cewka zwarta, kondensator przerwą)



Rys. 2.10. Obwód dla harmonicznej zerowej

$$I^{(0)} = \frac{E^{(0)}}{R} = 5$$

$$U_V^{(0)} = 0$$

Harmonicza podstawowa ($\omega = 1$)

Kolejność obliczeń jest następująca:

$$E^{(1)} = 20$$

$$Z_L^{(1)} = j\omega L = j0{,}5$$

$$Z_C^{(1)} = -j / \omega C = -j2$$

$$Z_{LC}^{(1)} = \frac{j0{,}5(-j2)}{-j1{,}5} = j0{,}667$$

$$I^{(1)} = \frac{E^{(1)}}{Z_{LC}^{(1)} + R} = 9 - j3$$

$$U_V^{(1)} = Z_{LC}^{(1)} I^{(1)} = 2 + j6$$

Harmoniczna druga ($\omega = 2$)

Kolejność obliczeń jest następująca:

$$E^{(2)} = 15$$

$$Z_L^{(2)} = j\omega L = j1$$

$$Z_C^{(2)} = -j / \omega C = -j1$$

$$Z_{LC}^{(2)} = \infty$$

$$I^{(2)} = 0$$

$$U_V^{(2)} = 15$$

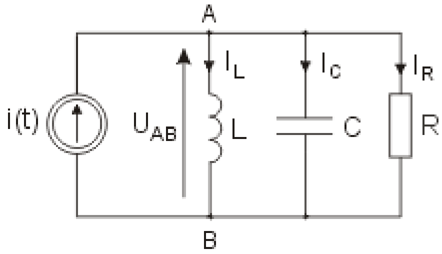
Wskazania amperomierza i woltomierza (moduły odpowiednich wielkości) sa równe:

$$|I| = \sqrt{|I^{(0)}|^2 + |I^{(1)}|^2 + |I^{(2)}|^2} = 10.72\,\mathrm{A}$$

$$|U_V| = \sqrt{|U_V^{(0)}|^2 + |U_V^{(1)}|^2 + |U_V^{(2)}|^2} = 16{,}28\,\mathrm{V}$$

Ćwiczenie 2.4

Wyznaczyć prądy oraz moce: czynną, bierną, pozorną i odkształcenia źródła prądowego w obwodzie przedstawionym na rys. 2.11.



Rys. 2.11 Schemat obwodu do zadania 2.4

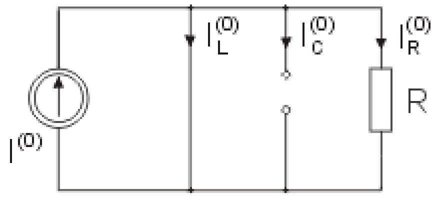
W obwodzie występuje wymuszenie prądowe $i(t)$ dane w następującej postaci $i(t) = 5 + 2\sqrt{2}\sin(t) + \sqrt{2}\sin(3t)$. Przyjąć wartości parametrów: R=5Ω, L=1H, C=1/9F.

Rozwiązanie

Ze względu na występowanie w wymuszeniu trzech harmonicznych należy zastosować superpozycję źródeł. Zgodnie z tą metodą obliczamy kolejno.

Harmoniczna zerowa (składowa stała)

Obwód dla harmonicznej zerowej przedstawiony jest na rysunku 2.12 (cewka zwarta, kondensator przerwą).



Rys. 2.12 Schemat obwodu dla harmonicznej zerowej

$I^{(0)} = 5$

$I_L^{(0)} = I^{(0)} = 5$

$I_R^{(0)} = I_C^{(0)} = 0$

$U_{AB}^{(0)} = 0$

$S^{(0)} = U_{AB}^{(0)} I^{(0)} = 0$

Harmoniczna podstawowa ($\omega = 1$)

Kolejność obliczeń jest następująca:

$I^{(1)} = 2$

$Z_L^{(1)} = j\omega L = j1$

$Z_C^{(1)} = -j / \omega C = -j9$

$$Y_{RLC}^{(1)} = \frac{1}{5} + \frac{1}{j1} + \frac{1}{-j9} = 0{,}2 - j0{,}89$$

$$U_{AB}^{(1)} = \frac{I^{(1)}}{Y_{RLC}^{(1)}} = 0{,}48 + j2{,}14$$

$$I_L^{(1)} = \frac{U_{AB}^{(1)}}{Z_L^{(1)}} = 2{,}14 - j0{,}48$$

$$I_C^{(1)} = \frac{U_{AB}^{(1)}}{Z_C^{(1)}} = -0{,}24 + j0{,}053$$

$$I_R^{(1)} = \frac{U_{AB}^{(1)}}{R} = 0{,}096 + j0{,}43$$

$S^{(1)} = U_{AB}^{(1)} I^{(1)*} = 0{,}96 + j4{,}28$

Harmoniczna trzecia ($\omega = 3$)

Kolejność obliczeń jest następująca:

$I^{(3)} = 1$

$Z_L^{(3)} = j\omega L = j3$

$Z_C^{(3)} = -j/\omega C = -j3$

$Z_{RLC}^{(3)} = R = 5$ (rezonans prądów)

$U_{AB}^{(3)} = RI^{(3)} = 5$

$$I_L^{(3)} = \frac{U_{AB}^{(3)}}{Z_L^{(3)}} = -j5/3$$

$$I_C^{(3)} = \frac{U_{AB}^{(3)}}{Z_C^{(3)}} = j5/3$$

$$I_R^{(3)} = \frac{U_{AB}^{(3)}}{R} = 1$$

$S^{(3)} = U_{AB}^{(3)} I^{(3)^*} = 5 + j0$

Wartości skuteczne prądów i napięć są następujące:

$$|I| = \sqrt{\left|I^{(0)}\right|^2 + \left|I^{(1)}\right|^2 + \left|I^{(3)}\right|^2} = 5{,}48\ \mathrm{A}$$

$$|I_R| = \sqrt{\left|I_R^{(0)}\right|^2 + \left|I_R^{(1)}\right|^2 + \left|I_R^{(3)}\right|^2} = 1{,}09\ \mathrm{A}$$

$$|I_L| = \sqrt{\left|I_L^{(0)}\right|^2 + \left|I_L^{(1)}\right|^2 + \left|I_L^{(3)}\right|^2} = 5{,}70\ \mathrm{A}$$

$$|I_C| = \sqrt{\left|I_C^{(0)}\right|^2 + \left|I_C^{(1)}\right|^2 + \left|I_C^{(3)}\right|^2} = 1{,}68\ \mathrm{A}$$

$$|U_{AB}| = \sqrt{\left|U_{AB}^{(0)}\right|^2 + \left|U_{AB}^{(1)}\right|^2 + \left|U_{AB}^{(3)}\right|^2} = 5{,}46\ \mathrm{V}$$

Moce w wydzielone przez źródło w obwodzie:

$|S| = |U_{AB}||I| = 29{,}90\ \mathrm{VA}$

$P = P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(3)} = 5{,}96\ \mathrm{W}$

$Q = Q^{(0)} + Q^{(1)} + Q^{(3)} = 4{,}28\ \mathrm{var}$

$D = \sqrt{|S|^2 - P^2 - Q^2} = 28{,}99\ \mathrm{VA}$