

TEORIA OBWODÓW - STANY NIEUSTALONE W OBWODACH

MODUŁ 3

STANISŁAW OSOWSKI, KRZYSZTOF SIWEK

TEORIA OBWODÓW, STANY NIEUSTALONE, METODA ZMIENNYCH STANU, METODA OPERATOROWA, STANY NIEUSTALONE W OBWODZIE RLC.

Moduł ten poświęcony jest w całości stanom nieustalonym w obwodach elektrycznych.

Wprowadzono pojęcie praw komutacji i opisu obwodu w stanie przejściowym przy wykorzystaniu zmiennych stanu oraz opisu operatorowego Laplace'a. Zaproponowano modele operatorowe elementów obwodu pozwalające w prosty sposób uzyskać rozwiązanie stanu nieustalonego. Rozważono przypadki szczególne stanów nieustalonych w obwodzie RL, RC i RLC.

Spis treści

1. Metoda równań różniczkowych w analizie stanów nieustalonych w obwodach	3
1.1 Podstawowe pojęcia stanów nieustalonych	3
1.2 Prawa komutacji	4
1.2.1 Prawo komutacji dotyczące kondensatorów	4
1.2.2 Prawo komutacji dotyczące cewek	4
1.3 Opis stanowy obwodu RLC	5
1.4. Rozwiązanie stanów nieustalonych w obwodach metodą zmiennych stanu	7
1.4.1 Rozwiązanie ogólne	7
1.4.2 Wartości własne i wektory własne macierzy kwadratowej	9
1.4.3 Wyznaczanie macierzy e^{At}	12
1.4.4 Obliczanie stanu nieustalonego w obwodzie metodą zmiennych stanu	15
1.5 Metoda klasyczna rozwiązania równań różniczkowych	18
1.6 Ćwiczenia	20
1.7 Zadania sprawdzające	23
1.8 Testy samooceny	27
1.9 Odpowiedzi do testów	29
2. Stany nieustalone w obwodach RL i RC	30
2.1 Stan nieustalony w szeregowym obwodzie RL przy załączeniu napięcia stałego	30
2.2 Stan nieustalony w gałęzi szeregowej RC przy załączeniu napięcia stałego	34
2.3 Ćwiczenia	38
2.4 Zadania sprawdzające	42
2.5 Testy samooceny	45
2.6 Odpowiedzi do testów	47
3. Metoda operatorowa Laplace'a	48
3.1 Wiadomości podstawowe dotyczące rachunku operatorowego Laplace'a	48
3.2 Podstawowe własności przekształcenia Laplace'a	50
3.2.1 Liniowość przekształcenia	50
3.2.2 Transformata pochodnej funkcji czasu	50
3.2.3 Transformata całki funkcji czasu	51
3.2.4 Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości	51
3.2.5 Przesunięcie w dziedzinie czasu	52
3.2.6 Transformata splotu	53
3.3 Przykłady transformat Laplace'a	54
3.4 Wyznaczanie odwrotnej transformaty Laplace'a	55
3.4.1 Metoda residuów	56
3.4.2 Metoda wykorzystująca tablice transformat	58
3.5 Ćwiczenia	60
3.6 Zadania sprawdzające	62
3.7 Testy samooceny	64

3.8	Odpowiedzi do testów	66
4.	Metoda operatorowa analizy stanów nieustalonych w obwodach elektrycznych	67
4.1	Modele operatorowe elementów obwodu	67
4.1.1	Rezystor	67
4.1.2	Cewka	68
4.1.3	Kondensator	68
4.2	Prawa Kirchhoffa dla transformat	69
4.3	Obliczenia prądów i napięć w stanie nieustalonym metodą operatorową	70
4.4	Ćwiczenia	75
4.5	Zadania sprawdzające	79
4.6	Testy samooceny	81
4.7	Odpowiedzi do testów	83
5.	Stan nieustalony w obwodzie RLC przy załączeniu napięcia stałego	84
5.1	Równanie operatorowe obwodu	84
5.2	Przypadek aperiodyczny	86
5.3	Przypadek aperiodyczny krytyczny	89
5.4	Przypadek oscylacyjny	90
5.5	Obwód bezstratny LC w stanie nieustalonym	93
5.6	Ćwiczenia	95
5.7	Zadania sprawdzające	96
5.8	Testy samooceny	98
5.9	Odpowiedzi do testów	100
	Słownik opanowanych pojęć	101
	Wykład 1	101
	Wykład 2	102
	Wykład 3	102
	Wykład 4	103
	Wykład 5	103

1. Metoda równań różniczkowych w analizie stanów nieustalonych w obwodach

W wyniku przełączeń lub zmiany wartości parametrów obwodu RLC powstaje w nim stan nieustalony, charakteryzujący się tym, że kształt odpowiedzi obwodu jest inny niż wymuszenia. Na przykład przy stałym wymuszeniu odpowiedź jest zmienna wykładniczo, bądź sinusoidalnie. Z upływem czasu odpowiedzi tego typu zanikają i ich charakter znów odpowiada charakterowi wymuszenia. Z czasem powstaje więc nowy stan ustalony w obwodzie o zmienionej strukturze na skutek przełączenia. W stanie nieustalonym obwodu można zaobserwować interesujące zjawiska, które odgrywają ogromną rolę w praktyce. Analiza tych zjawisk pozwala z jednej strony uniknąć pewnych niebezpieczeństw związanych z przepięciami, które mogą wystąpić w obwodzie a z drugiej strony wykorzystać te zjawiska do generacji przebiegów zmiennych w czasie (np. generatory napięć harmoniczych).

W tym rozdziale zaprezentowane zostaną podstawowe metody opisu obwodów RLC w stanie nieustalonym przy zastosowaniu równań różniczkowych. Wprowadzona zostanie metoda równań stanu oraz tak zwana metoda klasyczna. Równania stanu są zbiorem wielu równań różniczkowych pierwszego rzędu zapisanych w postaci jednego równania macierzowego $\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$. Zmiennymi stanu tworzącymi wektor \mathbf{x} są napięcia kondensatorów i prądy cewek, dla których obowiązują tak zwane prawa komutacji, pozwalające na wyznaczenie warunków początkowych w obwodzie.

W metodzie klasycznej zbiór równań różniczkowych pierwszego rzędu zostaje zastąpiony jednym równaniem różniczkowym wyższego rzędu względem jednej zmiennej stanu. Wprowadzone zostanie pojęcie równania charakterystycznego oraz biegunów układu, decydujących o charakterze rozwiązania obwodu w stanie nieustalonym.

1.1 Podstawowe pojęcia stanów nieustalonych

Analizując przebiegi czasowe procesów zachodzących w obwodach elektrycznych należy wyróżnić dwa stany:

- **stan ustalony** charakteryzujący się tym, że postać odpowiedzi jest identyczna z postacią wymuszenia (na przykład w odpowiedzi na wymuszenie sinusoidalne odpowiedź ustalona jest również sinusoidalna o tej samej częstotliwości choć innej fazie początkowej i innej amplitudzie)
- **stan nieustalony**, w którym przebiegi czasowe odpowiedzi mają inny charakter niż wymuszenie (na przykład w odpowiedzi na wymuszenie stałe odpowiedź obwodu jest wykładniczo malejąca czy oscylacyjna).

Stan nieustalony w obwodzie RLC powstaje jako nałożenie się stanu przejściowego (zwykle zanikającego) i stanu ustalonego przy zmianie stanu obwodu spowodowanego przełączeniem. Może on wystąpić w wyniku przełączeń w samym obwodzie pasywnym (zmiana wartości elementów, zwarcie elementu, wyłączenie elementu) lub w wyniku zmiany sygnałów wymuszających (parametrów źródeł napięciowych i prądowych, w tym także załączeniem lub wyłączeniem źródła). Dowolną zmianę w obwodzie nazywać będziemy **komutacją**. Zakładać będziemy, że czas trwania komutacji jest równy zero, co znaczy że wszystkie przełączenia odbywają się bezzwłocznie.

W obwodach elektrycznych proces komutacji modeluje się zwykle przy pomocy wyłączników i przełączników wskazujących na rodzaj przełączenia. Chwilę czasową poprzedzającą bezpośrednio komutację oznaczać będziemy w

ogólności przez t_0^- (w szczególności przez 0^-), natomiast chwilę bezpośrednio następującą po komutacji przez t_0^+ (w szczególności przez 0^+), gdzie t_0 jest chwilą przełączenia (komutacji).

1.2 Prawa komutacji

Z podstawowych praw rządzących obwodami elektrycznymi wynika, że w rezultacie przełączenia zachowana zostaje ciągłość sumy ładunków kondensatorów dołączonych do węzła. Oznacza to, że suma ładunków kondensatorów dołączonych do takiego węzła przed przełączeniem jest równa sumie ładunków kondensatorów dołączonych do tych węzłów po przełączeniu. Zasada ta wynika stąd, że do danego węzła nie może dopłynąć skończony ładunek w zerowym czasie.

Podobnie ciągłość zachowuje suma strumieni skojarzonych cewek należących do danego oczka. Suma strumieni skojarzonych cewek należących do oczka przed przełączeniem jest równa sumie strumieni skojarzonych cewek należących do tego oczka po przełączeniu.

1.2.1 Prawo komutacji dotyczące kondensatorów

Suma ładunków kondensatorów dołączonych do danego węzła nie może zmienić się w sposób skokowy na skutek komutacji, co można zapisać w postaci (w równaniu przyjęto, że komutacja zachodzi w chwili $t_0=0$)

$$\sum_i q_i(0^-) = \sum_i q_i(0^+) \quad (1.1)$$

Jeśli w wyniku przełączenia nie powstają oczka złożone z samych kondensatorów oraz idealnych źródeł napięcia to biorąc pod uwagę zależność $q_c=Cu_c$ prawo komutacji dla kondensatorów można zapisać w uproszczonej postaci uzależnionej od napięć tych kondensatorów

$$u_c(0^-) = u_c(0^+) \quad (1.2)$$

Ostatnia postać prawa komutacji dotycząca napięcia na kondensatorze jest najczęściej używana w praktyce.

1.2.2 Prawo komutacji dotyczące cewek

Suma strumieni skojarzonych cewek należących do danego oczka nie może ulec skokowej zmianie na skutek przełączenia w obwodzie, co można zapisać w postaci (w równaniu przyjęto, że komutacja zachodzi w chwili $t_0=0$)

$$\sum_i \Psi_i(0^-) = \sum_i \Psi_i(0^+) \quad (1.3)$$

Jeśli w wyniku przełączenia nie powstają węzły (dokładniej rozcięcia [5]) do których dołączone są wyłącznie same cewki i źródła prądowe to biorąc pod uwagę, że $\Psi = Li_L$ prawo ciągłości strumieni może być uproszczone do ciągłości prądu cewek, co zapiszemy w postaci

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) \quad (1.4)$$

Jest to najczęściej w praktyce używana postać pierwszego prawa komutacji w odniesieniu do cewki.

Należy zaznaczyć, że prawa komutacji dotyczą wyłącznie prądu (strumienia) cewki i napięcia (ładunku) kondensatora. Inne wielkości związane z tymi elementami (prąd kondensatora, napięcie cewki) jak również prąd i napięcie na rezystorze nie są związane bezpośrednio zależnościami energetycznymi i mogą zmieniać się w sposób skokowy podczas komutacji. Wartości jakie przybierają tuż po komutacji wynikają bądź z praw Kirchhoffa bądź z prawa Ohma.

Przy założeniu, że chwilę komutacji uważać będziemy za chwilę początkową analizy obwodu w stanie nieustalonym ($t_0 = 0$) istotnym problemem w analizie obwodu jest wyznaczenie warunków początkowych procesu, czyli wartości napięć na kondensatorach i prądów cewek w chwili przełączenia (u nas $i_L(0^-)$ oraz $u_C(0^-)$). Zwykle przyjmuje się, że przełączenie następuje ze stanu ustalonego obwodu. Warunki początkowe wynikają wówczas z wartości ustalonych tych wielkości w chwili tuż przed przełączeniem $t_0 = 0^-$. Warunki początkowe mogą być przy tym zerowe, jeśli prądy wszystkich cewek i napięcia wszystkich kondensatorów w chwili przełączenia miały wartości zerowe. Znajomość warunków początkowych w obwodzie jest niezbędna przy wyznaczaniu rozwiązania obwodu w stanie nieustalonym.

Wyznaczenie stanu początkowego napięcia kondensatora i prądu cewki w obwodzie sprowadza się do

- rozwiązania stanu ustalonego obwodu przed przełączeniem (przy wymuszeniach sinusoidalnych metodą symboliczną),
- określenia postaci czasowej tego rozwiązania dla prądu cewki $i_L(t)$ i napięcia kondensatora $u_C(t)$
- wyznaczenia wartości tego rozwiązania odpowiadającego chwili czasowej przełączenia (u nas $i_L(0^-)$ oraz $u_C(0^-)$).

1.3 Opis stanowy obwodu RLC

Wykorzystując opis ogólny elementów RLC oraz prawa Kirchhoffa łatwo pokazać, że liniowe obwody elektryczne RLC w stanach nieustalonych mogą być opisane przez równania różniczkowe i całkowe. Porządkując te równania i eliminując zmienne nie będące prądami cewek i napięciami kondensatorów można uzyskać tak zwaną postać kanoniczną opisu w postaci układu równań różniczkowych, który można przedstawić następująco

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\
&\dots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t)
\end{aligned}
\tag{1.5}$$

Zmienne x_1, x_2, \dots, x_n występujące w równaniach oznaczają prądy cewek lub napięcia kondensatorów (tzw. **zmienne stanu**). W opisie obwodu operuje się zwykle minimalnym zbiorem zmiennych stanu, które są niezbędne dla wyznaczenia pozostałych wielkości w obwodzie. Liczba zmiennych stanu n zależy od liczby cewek L i kondensatorów C w obwodzie i nigdy nie jest większa niż suma kondensatorów i cewek włączonych w obwodzie. W szczególnym przypadku, gdy obwód nie zawiera cykli CE (oczko złożone wyłącznie z kondensatorów i idealnych źródeł napięcia) lub rozcięć LJ (węzły obwodu lub przecięcie zawierające jedynie idealne źródła prądu i cewki) wymiar macierzy stanu jest równy liczbie kondensatorów i cewek w obwodzie $n=n_C+n_L$. W przypadku wystąpienia cykli CE lub rozcięć LJ wymiar stanu n jest pomniejszany o ich liczbę.

Stałe współczynniki a_{ij} występujące w równaniu (1.5) stanowią kombinacje wartości parametrów R, L, C, M elementów pasywnych obwodu oraz parametrów źródeł sterowanych. Funkcje czasu $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ związane są z wymuszeniami napięciowymi i prądowymi w obwodzie. Przedstawiony powyżej układ równań można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{bmatrix}
\tag{1.6}$$

W przypadku obwodów liniowych funkcje $f_i(t)$ występujące po prawej stronie wzoru są liniowymi funkcjami wymuszeń prądowych i napięciowych. Oznaczając wymuszenia prądowe bądź napięciowe w ogólności przez u_i można te funkcje zapisać przy pomocy zależności macierzowej

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}
\tag{1.7}$$

Jeśli macierz zawierającą elementy a_{ij} oznaczymy jako \mathbf{A} , macierz o elementach b_{ij} jako macierz \mathbf{B} , wektory zawierające zmienne stanu przez \mathbf{x} a wektor wymuszeń przez \mathbf{u} , to równanie stanu opisujące obwód elektryczny można przedstawić w postaci

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1.8)$$

Jest to ogólna postać opisu stanowego obwodu liniowego RLC. Reprezentuje ona układ n równań różniczkowych liniowych rzędu pierwszego. Elementy macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} zależą wyłącznie od wartości parametrów obwodu. Elementy wektora \mathbf{u} stanowią źródła niezależne prądu i napięcia w obwodzie. Zmienne stanu to niezależne napięcia na kondensatorach i prądy cewek.

1.4. Rozwiązanie stanów nieustalonych w obwodach metodą zmiennych stanu

1.4.1 Rozwiązanie ogólne

Jak zostało pokazane w punkcie poprzednim układ równań różniczkowych opisujących obwód elektryczny może być przedstawiony w postaci macierzowego równania stanu (1.8). Jeśli założymy, że wektor stanu $\mathbf{x}(t)$ jest n -wymiarowy a wektor wymuszeń $\mathbf{u}(t)$ m -wymiarowy, to macierz stanu \mathbf{A} ma wymiar $n \times n$, a macierz \mathbf{B} $n \times m$. Równanie (1.8) nazywane jest macierzowym równaniem stanu obwodu elektrycznego. Rozwiązanie tego równania pozwala wyznaczyć przebiegi czasowe zmiennych stanu tworzących wektor $\mathbf{x}(t)$. Jeśli dodatkowo interesują nas inne zmienne w obwodzie, na przykład prądy i napięcia rezystorów, prądy kondensatorów czy napięcia na cewkach to należy sformułować drugie równanie, tzw. równanie odpowiedzi $\mathbf{y}(t)$, które uzależnia poszukiwane wielkości od zmiennych stanu i wymuszeń. Równanie to zapiszemy w postaci

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1.9)$$

Równania (1.8) i (1.9) tworzą parę równań stanu

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (1.10)$$

która w pełni opisuje stan obwodu przy założeniu, że znane są warunki początkowe $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$, gdzie t_0 oznacza chwilę przełączenia. W przypadku ogólnym rozwiązanie równania stanu przyjmuje postać

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (1.11)$$

Zależność powyższa stanowi rozwiązanie ogólne, które dla konkretnych wartości funkcji wymuszających zadanych wektorem \mathbf{u} wyznacza rozwiązanie czasowe dla zmiennych stanu. We współczesnych metodach numerycznych równania stanu stanowią punkt wyjścia w określaniu dokładnego rozwiązania równań liniowych lub przybliżonego dla zlinearyzowanych równań stanu. Są one również bardzo wygodne w zastosowaniach przybliżonych metod całkowania

równań różniczkowych ze względu na to, że wszystkie równania stanu są rzędu pierwszego, dla których istnieją wyspecjalizowane metody całkowania przybliżonego.

W rozwiązaniu (1.11) równania stanu występują dwa człony, z których pierwszy jest zależny tylko od warunków początkowych niezerowych (energii zgromadzonej w cewkach i kondensatorach), a drugi stanowi odpowiedź obwodu na wymuszenia tworzące wektor $\mathbf{u}(t)$. Pierwszą część utożsamiać będziemy wyłącznie ze składową przejściową pochodzącą od niezerowych warunków początkowych, a drugą – z odpowiedzią obwodu na wymuszenie. Zależność (1.11) może więc być zinterpretowana w postaci

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{x}_u(t) \quad (1.12)$$

W praktyce obliczenie składowej ustalonej według zależności (1.11), zwłaszcza przy wymuszeniu sinusoidalnym, jest niezwykle uciążliwe, gdyż wymaga całkowania złożonych funkcji macierzowych. W zamian można wykorzystać fakt, że stan nieustalony jest superpozycją stanu ustalonego i przejściowego, i w rozwiązaniu stanu ustalonego zastosować metodę symboliczną analizy obwodów, która pozwala wyznaczyć rozwiązanie w stanie ustalonym bez operacji całkowania (patrz rozdział 2 w module 1). W ten sposób stan nieustalony rozbity zostaje na dwa niezależne od siebie stany: stan ustalony (składowa $\mathbf{x}_u(t)$), pochodzący od niezależnych wymuszeń, wyznaczany metodą symboliczną oraz stan przejściowy (składowa $\mathbf{x}_p(t)$) jako odpowiedź na niezerowe warunki początkowe dla tej składowej przy źródłach napięciowych zwartych a prądowych rozwartych. Zauważmy, że przy braku wymuszenia ($\mathbf{u}=0$) obwód dla składowej przejściowej opisuje się prostszym równaniem stanu

$$\frac{d\mathbf{x}_p(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_p(t) \quad (1.13)$$

którego rozwiązanie nie wymaga całkowania funkcji i dane jest w postaci

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_p(t_0^+) \quad (1.14)$$

Jeśli dodatkowo przyjmiemy, że chwila przełączenia t_0 oznacza początek liczenia czasu ($t_0=0$)

to w naszym podejściu $\mathbf{x}_p(t_0^+) = \mathbf{x}_p(0^+)$. Zauważmy, że wartości początkowe w obwodzie dotyczą chwili tuż po przełączeniu, oznaczanej zwykle symbolem 0^+ . Przy rozbiciu stanu nieustalonego na dwie składowe wymagane jest więc wyznaczenie wartości $\mathbf{x}_p(0^+)$ dla składowej przejściowej. Można tego dokonać korzystając z praw komutacji, które tutaj przepiszemy w postaci

$$\mathbf{x}(0^-) = \mathbf{x}(0^+) = \mathbf{x}_u(0^+) + \mathbf{x}_p(0^+) \quad (1.15)$$

Przy znanych wartościach $\mathbf{x}(0^-)$ oraz $\mathbf{x}_u(0^+)$ z zależności (1.15) można wyznaczyć wartość $\mathbf{x}_p(0^+)$, jako

$$\mathbf{x}_p(0^+) = \mathbf{x}(0^-) - \mathbf{x}_u(0^+) \quad (1.16)$$

W tej sytuacji rozwiązanie równania stanu (10.13) można przedstawić w postaci

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_p(0^+) \quad (1.17)$$

w której wartość $\mathbf{x}_p(0^+)$ jest określona zależnością (10.16). Do określenia rozwiązania w stanie przejściowym należy wyznaczyć jeszcze macierz $e^{\mathbf{A}t}$, w której wykładnik jest macierzą a nie skalarem. Dla obliczenia $e^{\mathbf{A}t}$ należy w pierwszej kolejności obliczyć wartości własne macierzy stanu \mathbf{A} .

1.4.2 Wartości własne i wektory własne macierzy kwadratowej

Założmy, że \mathbf{A} jest macierzą kwadratową stopnia n . Macierz $(s\mathbf{1}-\mathbf{A})$ nazywana jest macierzą charakterystyczną \mathbf{A} , przy czym $\mathbf{1}$ oznacza macierz jednostkową stopnia n , to jest macierz diagonalną $\mathbf{1}=\text{diag}(1, 1, \dots, 1)$. Wyznacznik macierzy charakterystycznej $\det(s\mathbf{1}-\mathbf{A})$ nazywamy **wielomianem charakterystycznym** macierzy, a równanie

$$\det(s\mathbf{1}-\mathbf{A})=0 \quad (1.18)$$

nazywamy **równaniem charakterystycznym** macierzy \mathbf{A} . Równanie to po rozwinięciu wyrażenia wyznacznika przyjmuje postać wielomianu n -tego stopnia

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0 \quad (1.19)$$

Pierwiastki tego równania s_1, s_2, \dots, s_n nazywamy **wartościami własnymi** macierzy \mathbf{A} . Mogą one przyjmować wartości rzeczywiste lub zespolone, pojedyncze lub wielokrotne. Z każdą wartością własną s_i skojarzony jest **wektor własny** \mathbf{x}_i o niezerowej wartości i wymiarze n , spełniający równanie

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = s_i\mathbf{x}_i \quad (1.20)$$

Jeśli wszystkie wartości własne są różne to na podstawie równania (1.20) można napisać n równań liniowych o postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 &= s_1\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_2 &= s_2\mathbf{x}_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_n &= s_n\mathbf{x}_n \end{aligned} \quad (1.21)$$

z rozwiązania których można wyznaczyć wszystkie wektory własne \mathbf{x}_i . W Matlabie wartości i wektory własne są wyznaczane przy użyciu funkcji *eig*.

Przykład 1.1

Dla macierzy stanu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

wyznaczyć wartości i wektory własne

Rozwiązanie

Równanie charakterystyczne

$$\det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}) = \det\left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\right) = s^2 + 5s + 4 = 0$$

Pierwiastki tego równania będące wartościami własnymi \mathbf{A} są równe $s_1 = -4$ oraz $s_2 = -1$. Wektory własne spełniają relację (1.25), która w naszym przypadku przyjmie postać

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$$

Powyższym równaniom odpowiadają cztery równania skalarne o postaci

$$\begin{aligned} -2x_{11} - 2x_{21} &= -4x_{11} \\ -x_{11} - 3x_{21} &= -4x_{21} \\ -2x_{12} - 2x_{22} &= -x_{12} \\ -x_{12} - 3x_{22} &= -x_{22} \end{aligned}$$

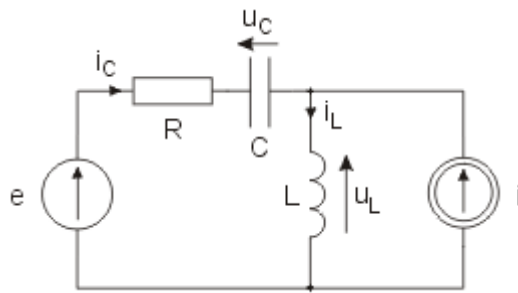
Biorąc pod uwagę, że dwa spośród nich są zależne, dwie zmienne można przyjąć dowolnie, na przykład $x_{11} = 1$ oraz $x_{22} = -1$.

Z rozwiązania pozostałych 2 równań otrzymuje się wektory własne o postaci

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Przykład 1.2

Napisać układ równań stanu dla obwodu elektrycznego przedstawionego na rys. 1.1



Rys. 1.1. Schemat obwodu do przykładu 1.2

Rozwiązanie

Z praw Kirchhoffa napisanych dla obwodu z rys. 1.1 wynikają następujące równania

$$e = Ri_C + u_C + u_L$$

$$i = i_L - i_C$$

Biorąc pod uwagę, że

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

oraz

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

równania Kirchhoffa można przekształcić do równoważnej postaci równań różniczkowych

$$e = R(i_L - i) + L \frac{di_L}{dt} + u_C$$

$$C \frac{du_C}{dt} = i_L - i$$

które przyjmują uporządkowaną formę odpowiadającą postaci (1.5)

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L}i_L - \frac{1}{L}u_C + \frac{1}{L}e + \frac{R}{L}i$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}i_L - \frac{1}{C}i$$

Równania powyższe można zapisać w postaci zależności macierzowej równania stanu, w której zmiennymi stanu są prąd cewki i napięcie kondensatora.

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R & -1 \\ L & L \\ 1 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & R \\ L & L \\ 0 & -1 \\ C & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ i \end{bmatrix}$$

Wektor stanu \mathbf{x} jest równy

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}$$

a wektor wymuszeń

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} e \\ i \end{bmatrix}.$$

Obwód liniowy zawierający dwa elementy reaktancyjne (cewka i kondensator) opisuje się więc macierzowym równaniem stanu drugiego rzędu. Macierz stanu \mathbf{A} jest macierzą również drugiego rzędu o współczynnikach uzależnionych od wartości rezystancji, pojemności oraz indukcyjności. Macierz \mathbf{B} zawiera dwa wiersze (liczba zmiennych stanu) oraz dwie kolumny (liczba wymuszeń w obwodzie). Przyjmując w analizie wartości liczbowe obwodu: $R=2\Omega$, $L=1\text{H}$, $C=1\text{F}$ otrzymuje się macierz stanu \mathbf{A} o postaci

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Równanie charakterystyczne tej macierzy jest równe

$$\det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}) = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = s^2 + 2s + 1 = 0$$

Wartości własne (pierwiastki równania charakterystycznego) są w tym przypadku sobie równe i wynoszą $s_1 = s_2 = -1$. Dla rozważanego obwodu RLC są one położone w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s na ujemnej osi rzeczywistej.

1.4.3 Wyznaczanie macierzy $e^{\mathbf{A}t}$

Kluczem do wyznaczenia rozwiązania obwodu w stanie przejściowym metodą zmiennych stanu jest określenie macierzy $e^{\mathbf{A}t}$. Istnieje wiele metod rozwiązania tego zadania. Tutaj przedstawimy trzy z nich: metodę Lagrange'a-Sylvestera, diagonalizacji macierzy oraz Cayleya-Hamiltona. W każdej z nich wymagane jest wyznaczenie wartości własnych s_i macierzy \mathbf{A} .

Metoda Lagrange'a-Sylvestera

W metodzie tej macierz $e^{\mathbf{A}t}$ wyznacza się z prostej zależności podanej w postaci jawnej

$$e^{At} = \sum_{r=1}^n e^{s_r t} \frac{\prod_{l \neq r}^n (s_l \mathbf{1} - \mathbf{A})}{\prod_{l \neq r}^n (s_l - s_r)} \quad (1.22)$$

Z analizy powyższego wzoru widoczne jest, że metoda Lagrange'a-Sylwestera obowiązuje jedynie dla przypadku wartości własnych pojedynczych (przy wartościach wielokrotnych mianownik zależności staje się zerowy).

Metoda diagonalizacji macierzy

W metodzie diagonalizacji macierzy zastępuje się obliczenie macierzy e^{At} poprzez transformację macierzy \mathbf{A} do postaci diagonalnej \mathbf{D} o tych samych wartościach własnych. Diagonalna macierz \mathbf{D} posiada prostą formę macierzową e^{Dt} , będącą również macierzą diagonalną o postaci

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{s_2 t} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & e^{s_n t} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Mnożąc obustronnie równanie stanu $dx/dt = \mathbf{A}x$ przez nieosobliwą macierz \mathbf{U} przekształca się je do postaci $d(\mathbf{U}x)/dt = \mathbf{U}Ax$. Wprowadźmy nowy wektor $\mathbf{v} = \mathbf{U}x$. Wówczas oryginalne równanie stanu przekształca się do postaci określonej względem \mathbf{v} , przy czym

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{D}\mathbf{v} \quad (1.24)$$

gdzie \mathbf{D} jest macierzą diagonalną określoną wzorem $\mathbf{D}=\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}$ o wartościach diagonalnych równych wartościom własnym macierzy \mathbf{A} . Macierz przekształcenia \mathbf{U} należy tak dobrać, aby spełniona była równość $\mathbf{U}\mathbf{A}=\mathbf{D}\mathbf{U}$. Zależność ta reprezentuje sobą układ równań liniowych. Rozwiązanie równania stanu (1.24) dane jest w prostej formie

$$\mathbf{v}(t) = e^{Dt} \mathbf{v}(0^+) \quad (1.25)$$

Biorąc pod uwagę, że $\mathbf{v}=\mathbf{U}x$, po wstawieniu tej zależności do równania (1.25) otrzymuje się $\mathbf{U}x(t) = e^{Dt} \mathbf{U}x(0^+)$, co pozwala napisać wyrażenie na $x(t)$ w postaci

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}^{-1} e^{Dt} \mathbf{U}x(0^+) \quad (1.26)$$

Oznacza to, że macierz e^{At} została określona wzorem

$$e^{At} = \mathbf{U}^{-1} e^{\mathbf{D}t} \mathbf{U} \quad (1.27)$$

Zauważmy, że powyższa metoda prowadzi do wyniku wyłącznie dla pojedynczych wartości własnych macierzy \mathbf{A} , podobnie jak metoda Lagrange’a-Sylwestera.

Metoda Cayleya-Hamiltona

Zgodnie z tą metodą macierz e^{At} rozwija się w szereg skończony o n składnikach (n – stopień macierzy \mathbf{A})

$$e^{At} = a_0 \mathbf{1} + a_1 \mathbf{A} + \dots + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} \quad (1.28)$$

Dla pełnego określenia rozwiązania należy wyznaczyć wszystkie współczynniki a_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) rozwinięcia (1.28). Współczynniki te są wówczas funkcjami czasu $a_i = a_i(t)$.

W przypadku pojedynczych wartości własnych nieznanne współczynniki wyznacza się z rozwiązania układu n równań skalarnych, wynikających z twierdzenia Cayleya-Hamiltona. Zgodnie z tym twierdzeniem każda macierz kwadratowa spełnia swoje równanie charakterystyczne. Oznacza to w praktyce, że równanie (1.28) musi być spełnione również przez wartości własne macierzy \mathbf{A} (macierz \mathbf{A} jest zastąpiona w tym równaniu przez kolejne wartości własne skalarne). W przypadku pojedynczych wartości własnych prowadzi to do układu n równań z n niewiadomymi o postaci

$$\begin{aligned} e^{s_1 t} &= a_0 + a_1 s_1 + \dots + a_{n-1} s_1^{n-1} \\ e^{s_2 t} &= a_0 + a_1 s_2 + \dots + a_{n-1} s_2^{n-1} \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ e^{s_n t} &= a_0 + a_1 s_n + \dots + a_{n-1} s_n^{n-1} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Rozwiązanie powyższego układu równań względem współczynników a_i pozwala określić pełną postać macierzy e^{At} według wzoru (1.28).

Wzór Cayleya-Hamiltona obowiązuje również dla wielokrotnych wartości własnych, przy czym ubytek równań w zbiorze (1.29) wynikający z wielokrotności wartości własnych uzupełnia się analogicznymi równaniami obowiązującymi dla pochodnych względem wartości własnej wielokrotnej. Przykładowo, jeśli k -ta wartość własna s_k występuje podwójnie, wówczas obowiązują dla niej dwie równości Cayleya-Hamiltona o postaci

$$\begin{aligned} e^{s_k t} &= a_0 + a_1 s_k + \dots + a_{n-1} s_k^{n-1} \\ \frac{de^{s_k t}}{ds_k} &= t e^{s_k t} = a_1 + 2a_2 s_k + \dots + (n-1)a_{n-1} s_k^{n-2} \end{aligned} \quad (1.30)$$

W ten sposób brakujące równanie w układzie (1.29) zostaje zastąpione równaniem dla pochodnej i układ równań pozostaje rozwiązywalny.

Przykład 1.3

Obliczanie macierzy e^{At} zilustrujemy na przykładzie macierzy stanu \mathbf{A} o podwójnej wartości własnej. Macierz stanu dana jest w postaci

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie

Równanie charakterystyczne macierzy \mathbf{A}

$$\det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}) = s^2 + 4s + 4 = 0$$

Wartości własne są pierwiastkami równania charakterystycznego i równają się $s_1=s_2=-2$ (pierwiastek podwójny). Wobec podwójnej wartości własnej macierz e^{At} wyznaczymy stosując metodę Cayleya-Hamiltona. Zgodnie z tą metodą dla macierzy stopnia $n=2$ mamy

$$e^{At} = a_0 \mathbf{1} + a_1 \mathbf{A}$$

Wartości współczynników a_i wyznaczymy rozwiązując układ równań

$$e^{s_1 t} = a_0 + a_1 s_1$$

$$\frac{de^{s_1 t}}{ds_1} = te^{s_1 t} = a_1$$

Po wstawieniu wartości liczbowych otrzymuje się

$$e^{-2t} = a_0 - 2a_1$$

$$te^{-2t} = a_1$$

Rozwiązanie względem współczynników a_0 i a_1 pozwala uzyskać

$$a_0 = e^{-2t} + 2te^{-2t}$$

$$a_1 = te^{-2t}$$

Po wstawieniu tych wartości do wzoru na e^{At} otrzymuje się

$$e^{At} = (e^{-2t} + 2te^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{-2t} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e^{-2t} - 2te^{-2t}) & -2te^{-2t} \\ 2te^{-2t} & (e^{-2t} + 2te^{-2t}) \end{bmatrix}$$

1.4.4 Obliczanie stanu nieustalonego w obwodzie metodą zmiennych stanu

Jak zostało przedstawione na wstępie najwygodniejszą metodą obliczenia przebiegów czasowych w stanie nieustalonym metodą zmiennych stanu jest rozdzielenie stanu nieustalonego po przełączeniu w obwodzie na stan

ustalony i przejściowy. Stan ustalony określany jest metodą symboliczną, a stan przejściowy metodą zmiennych stanu. W ten sposób unika się trudnego problemu całkowania złożonych zależności matematycznych. W efekcie rozwiązanie stanu nieustalonego w obwodzie składa się z następujących etapów.

- Określenie warunków początkowych w obwodzie przed przełączeniem. W praktyce oznacza to wyznaczenie prądów cewek i napięć kondensatorów w obwodzie w stanie ustalonym (np. metodą symboliczną), przejście na postać czasową tych rozwiązań i określenie wszystkich wartości prądów cewek i napięć kondensatorów w chwili przełączenia. Wartości początkowe $i_L(0^-)$ oraz $u_C(0^-)$ utworzą wektor stanu \mathbf{x} w chwili początkowej 0^- .
- Określenie stanu ustalonego w obwodzie po przełączeniu (np. metodą symboliczną). W wyniku otrzymuje się wartości ustalone prądów cewek $i_{Lu}(t)$ i napięć kondensatorów $u_{Cu}(t)$. Wartości te tworzą wektor $\mathbf{x}_u(t)$ w stanie ustalonym.
- Określenie stanu przejściowego w obwodzie po przełączeniu. Obwód dla stanu przejściowego powstaje po odrzuceniu wszystkich źródeł wymuszających niezależnych (zwarciu źródeł napięcia $e(t)$ oraz rozwarciu źródeł prądowych $i(t)$), od których odpowiedź w stanie ustalonym została już obliczona. Obwód taki opisuje się równaniem stanu o postaci $d\mathbf{x}_p/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}_p$ którego rozwiązanie określone jest zależnością (1.17) przy warunkach początkowych określonych dla składowej przejściowej zmiennych stanu. Oznacza to konieczność określenia dla każdej cewki i kondensatora wielkości $i_{Lp}(0^+)$ oraz $u_{Cp}(0^+)$. Korzystając z równania (1.16) otrzymuje się

$$\begin{aligned} u_{Cp}(0^+) &= u_C(0^-) - u_{Cu}(0^+) \\ i_{Lp}(0^+) &= i_L(0^-) - i_{Lu}(0^+) \end{aligned} \quad (1.31)$$

Po określeniu warunków początkowych dla składowej przejściowej można z zależności (1.17) wyznaczyć pełne rozwiązanie obwodu w stanie przejściowym.

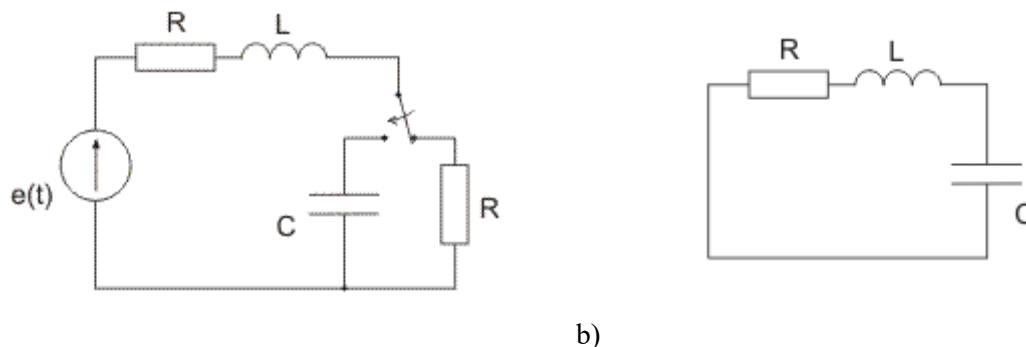
- Rozwiązanie całkowite obwodu składa się z części ustalonej i przejściowej. Można je zapisać w postaci

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t) \\ i_L(t) &= i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) \end{aligned} \quad (1.32)$$

co odpowiada zapisowi macierzowemu dla zmiennych stanu $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_u(t) + \mathbf{x}_p(t)$.

Przykład 1.4

Rozpatrzmy stan nieustalony w obwodzie RLC przedstawionym na rys. 1.2a po przełączeniu. Dane elementów: $R=5\Omega$, $L=2\text{H}$, $C=0,5\text{F}$, $e(t)=6\text{V}$ (napięcie stałe), $u_C(0)=0$. Zakładamy, że wyłącznik przełączany jest w sposób bezprzerwowy, spełniając zasadę ciągłości prądu cewki.



Rys. 1.2 Obwód RLC do przykładu 1.4: a) obwód wyjściowy, b) postać obwodu do wyznaczenia stanu przejściowego

Rozwiązanie

Warunki początkowe w postaci prądu cewki i napięcia na kondensatorze oblicza się na podstawie stanu ustalonego przed przełączeniem. Przy stałym wymuszeniu w obwodzie ($\omega=0$) cewka stanowi zwarcie a kondensator przerwę. Oznacza to, że prąd płynący w obwodzie jest równy $i_L(t)=6/10=0,6A$. Stąd $i_L(0^-)=0,6$. Napięcie na kondensatorze (przed przełączeniem pozostaje poza obwodem) jest zerowe, stąd $u_C(0^-)=0$.

Po przełączeniu powstaje obwód złożony z szeregowego połączenia elementów R , L i C . W stanie ustalonym wobec $\omega=0$ kondensator stanowi przerwę i prąd ustalony w takim obwodzie nie płynie, $i_{Lu}(t)=0$ a napięcie kondensatora $u_{Cu}(t)=6$. Oznacza to, że warunki początkowe dla składowej ustalonej dane są w postaci: $i_{Lu}(0^+)=0$ oraz $u_{Cu}(0^+)=6$.

Wyznaczenie stanu przejściowego rozpoczniemy od warunków początkowych dla tego stanu. Warunki początkowe dla stanu przejściowego określone są w postaci (patrz równanie (1.31))

$$i_{Lp}(0^+) = i_L(0^-) - i_{Lu}(0^+) = 0,6 - 0 = 0,6$$

$$u_{Cp}(0^+) = u_C(0^-) - u_{Cu}(0^+) = 0 - 6 = -6$$

Stąd warunki początkowe dla stanu przejściowego można zapisać w postaci wektorowej

$$\mathbf{x}_p(0^+) = \begin{bmatrix} i_{Lp}(0^+) \\ u_{Cp}(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Równania stanu przejściowego dotyczą obwodu bez wymuszeń zewnętrznych (źródło napięciowe zwarte) przedstawionego na rys. 1.2b. Z prawa napięciowego Kirchhoffa po uwzględnieniu równań elementów obwodu otrzymuje się następujące równania różniczkowe

$$L \frac{di_{Lp}}{dt} + Ri_{Lp} + u_{Cp} = 0$$

$$i_{Lp} = C \frac{du_{Cp}}{dt}$$

Po uporządkowaniu tych równań otrzymuje się równanie macierzowe stanu w postaci

$$\begin{bmatrix} \frac{di_{Lp}}{dt} \\ \frac{du_{Cp}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{Lp} \\ u_{Cp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,5 & -0,5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{Lp} \\ u_{Cp} \end{bmatrix}$$

z którego wynika, że macierz stanu \mathbf{A} jest równa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2,5 & -0,5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Równanie charakterystyczne dla macierzy \mathbf{A} dane jest w postaci

$$\det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}) = s^2 + 2,5s + 1 = 0$$

Wartości własne są pierwiastkami równania charakterystycznego i równają się $s_1 = -2$, $s_2 = -0,5$.

Macierz $e^{\mathbf{A}t}$ wyznaczmy stosując metodę Sylwestera. Zgodnie z tą metodą

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{s_1 t} \frac{(s_2 \mathbf{1} - \mathbf{A})}{(s_2 - s_1)} + e^{s_2 t} \frac{(s_1 \mathbf{1} - \mathbf{A})}{(s_1 - s_2)} = e^{-2t} \frac{\begin{bmatrix} 2 & 0,5 \\ -2 & -0,5 \end{bmatrix}}{3/2} + e^{-0,5t} \frac{\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}}{-3/2}$$

Po wykonaniu odpowiednich operacji matematycznych otrzymuje się

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} (1,33e^{-2t} - 0,33e^{-0,5t}) & (0,33e^{-2t} - 0,33e^{-0,5t}) \\ (-1,33e^{-2t} + 1,33e^{-0,5t}) & (-0,33e^{-2t} + 1,33e^{-0,5t}) \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie określające wektor stanu w stanie przejściowym oblicza się z zależności

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_p(0^+) = \begin{bmatrix} -1,2e^{-2t} + 1,8e^{-0,5t} \\ 1,2e^{-2t} - 7,2e^{-0,5t} \end{bmatrix}$$

Całkowite rozwiązanie obwodu w stanie nieustalonym można więc przedstawić w postaci

$$i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) = -1,2e^{-2t} + 1,8e^{-0,5t}$$

$$u_C(t) = u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t) = 6 + 1,2e^{-2t} - 7,2e^{-0,5t}$$

1.5 Metoda klasyczna rozwiązania równań różniczkowych

W przypadku, gdy interesuje nas tylko jedna wybrana zmienna (jeden prąd bądź jedno napięcie w obwodzie) układ równań stanu pierwszego rzędu można sprowadzić do jednego równania różniczkowego n -tego rzędu względem tej zmiennej

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \quad (1.33)$$

Rozwiązanie powyższego równania różniczkowego, podobnie jak w metodzie zmiennych stanu, można przedstawić w postaci sumy dwu składowych: ustalonej $x_u(t)$ wymuszonej przez źródło oraz składowej przejściowej $x_p(t)$, zwanej również składową swobodną, pochodzącą od niezerowych warunków początkowych dla tej składowej

$$x(t) = x_u(t) + x_p(t) \quad (1.34)$$

Składowa wymuszona stanowi rozwiązanie ustalone obwodu po komutacji i może być wyznaczona metodą symboliczną. **Składowa przejściowa** charakteryzuje fizycznie procesy zachodzące w obwodzie elektrycznym na skutek niezerowych warunków początkowych przy braku wymuszeń zewnętrznych. Odpowiada ona obwodowi, w którym wyeliminowano wszystkie zewnętrzne źródła wymuszające (źródła napięciowe zwarte a prądowe rozwarne).

Składowa przejściowa zależy jedynie od warunków początkowych odniesionych do tej składowej (napięć początkowych kondensatorów i prądów początkowych cewek), struktury obwodu i wartości parametrów tego obwodu. Dla obwodów elektrycznych zawierających elementy rozpraszające energię (rezystancje) składowa przejściowa, jak zostanie pokazane później, zanika z biegiem czasu do zera. Równanie składowej przejściowej otrzymuje się zakładając wymuszenie $f(t)$ we wzorze (1.29) równe zero i zastępując zmienną $x(t)$ poprzez jej składową przejściową $x_p(t)$.

Otrzymuje się wówczas **równanie różniczkowe jednorodne** o postaci

$$a_n \frac{d^n x_p}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_p}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} x_p}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dx_p}{dt} + a_0 x_p = 0 \quad (1.35)$$

Rozwiązanie powyższego równania jednorodnego uzyskuje się za pośrednictwem równania charakterystycznego, stosującego opis operatorowy z użyciem operatora s

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (1.36)$$

Jest to wielomian n -tego rzędu względem operatora s o współczynnikach rzeczywistych a_i . Jest on identyczny z równaniem charakterystycznym otrzymanym dla zmiennych stanu. Pierwiastki s_i ($i=1, 2, \dots, n$) tego wielomianu stanowią **bieguny układu**, identyczne z wartościami własnymi macierzy stanu \mathbf{A} . W tym punkcie ograniczymy się jedynie do przypadku biegunów pojedynczych. Przy takim założeniu rozwiązanie równania (1.35) dla składowej przejściowej zapiszemy w postaci

$$x_p(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t} \quad (1.37)$$

W rozwiązaniu tym współczynniki A_i są stałymi całkowania, które należy wyznaczyć wykorzystując znajomość warunków początkowych w obwodzie (napięć kondensatorów i prądów cewek w chwili komutacji $t=0$). W tym celu należy wyznaczyć rozwiązanie równania (1.35) dla każdej składowej przejściowej zmiennej stanu $x_{pk}(t)$ oddzielnie, a następnie rozwiązanie całkowite $x_k(t) = x_{uk}(t) + x_{pk}(t)$ dla $k=1, 2, \dots, n$. Każda ze zmiennych $x_k(t)$ posiada znaną wartość rozwiązania $x_k(0^-)$ w chwili $t=0$ (warunki początkowe). Z ciągłości prądów cewek i napięć kondensatorów wynika następująca zależność

$$x_k(0^-) = x_{uk}(0^+) + x_{pk}(0^+) \quad (1.38)$$

Pisząc tę równość dla wszystkich n zmiennych stanu otrzymuje się n równań algebraicznych z n nieznanymi współczynnikami A_i . Z rozwiązania tego układu wyznacza się wszystkie współczynniki A_i i podstawia do wzoru ogólnego (1.37). Po wyznaczeniu rozwiązania obwodu dla składowej ustalonej i przejściowej rozwiązanie całkowite równania (1.34) jest sumą obu rozwiązań cząstkowych, to znaczy

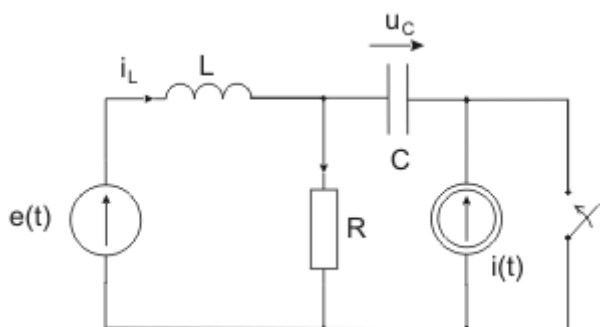
$$x(t) = x_u(t) + x_p(t) \quad (1.39)$$

Powyższa procedura rozwiązania stanu nieustalonego w obwodzie poprzez rozwiązanie układu równań różniczkowych wyższego rzędu nosi nazwę **metody klasycznej**. Przy większej liczbie zmiennych jest ona dość uciążliwa w obliczeniach, gdyż wymaga pracochłonnego wyznaczania rozwiązań dla każdej składowej przejściowej zmiennych stanu. Dlatego w praktyce stosuje się zwykle tylko do równań pierwszego rzędu. W tej pracy zastosujemy ją do rozwiązania stanu nieustalonego w obwodzie RL oraz RC przy załączeniu napięcia stałego.

1.6 Ćwiczenia

Ćwiczenie 1.1

Wyznaczyć warunki początkowe w obwodzie przedstawionym na rys. 1.3. Parametry elementów obwodu są następujące: $L=1\text{H}$, $C=0,5\text{F}$, $R=1\Omega$, $e(t) = 10\sqrt{2} \sin(t + 45^\circ) \text{V}$, $i(t) = 2 \sin(t - 45^\circ) \text{A}$.



Rys. 1.3. Schemat obwodu do zadania 1.1

Rozwiązanie

Warunki początkowe dotyczą stanu ustalonego przed przełączeniem, w którym w obwodzie działają oba źródła wymuszające. Stosując metodę symboliczną analizy obwodu otrzymujemy

$$E = 10e^{j45^\circ}$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{-j45^\circ}$$

$$\omega = 1$$

$$Z_L = j\omega L = j1$$

$$Z_C = -j/\omega C = -j2$$

Równania obwodu:

$$E = Z_L I_L + R(I + I_L)$$

$$I_L = \frac{E - RI}{R + Z_L} = 7,21e^{j11,31^\circ}$$

$$U_C = Z_C I = \frac{4}{\sqrt{2}}e^{-j135^\circ}$$

$$i_L(t) = 7,21\sqrt{2} \sin(t + 11,31^\circ)$$

$$u_C(t) = 4 \sin(t - 135^\circ)$$

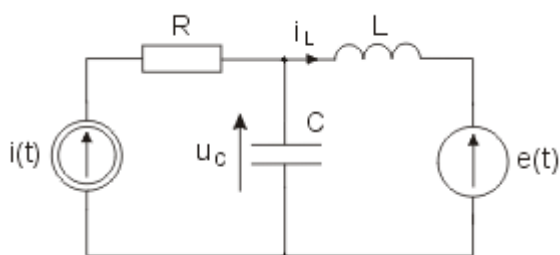
Warunki początkowe:

$$i_L(0^-) = 2$$

$$u_C(0^-) = -2\sqrt{2}$$

Ćwiczenie 1.2

Napisać równanie stanu dla obwodu o strukturze przedstawionej na rys. 1.4.



Rys. 1.4. Schemat obwodu do zadania 1.2

Rozwiązanie

Z praw Kirchhoffa napisanych dla obwodu z rysunku wynika

$$i(t) = i_L + C \frac{du_C}{dt}$$

$$e(t) = u_C - L \frac{di_L}{dt}$$

Po przekształceniach tych równań otrzymujemy

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} [i(t) - i_L]$$

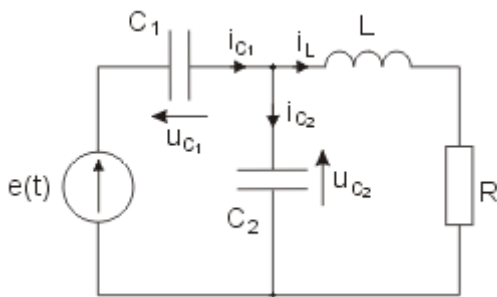
$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} [u_C - e(t)]$$

Równanie stanu:

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

Ćwiczenie 1.3

Napisać równanie stanu obwodu o strukturze przedstawionej na rys. 1.5.



Rys. 1.5 Schemat obwodu do zadania 1.3

Rozwiązanie

Z równań Kirchhoffa napisanych dla obwodu z rys. 1.5 otrzymuje się

$$e(t) = u_{C_1} + u_{C_2}$$

$$u_{C_2} = L \frac{di_L}{dt} + Ri_L$$

$$C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} = i_L + C_2 \frac{du_{C_2}}{dt}$$

Po wyznaczeniu u_{C_1} z równania pierwszego i przekształceniu powstałych równań otrzymujemy

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} [u_{C_2} - Ri_L]$$

$$\frac{du_{C_2}}{dt} = \frac{1}{C_1 + C_2} \left[-i_L + C_1 \frac{de(t)}{dt} \right]$$

Postać macierzowa równań stanu:

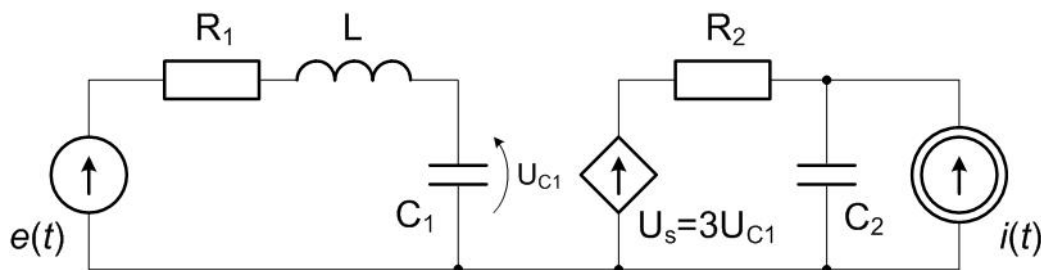
$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_{C_2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C_1+C_2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{C_1}{C_1+C_2} \end{bmatrix} \frac{de(t)}{dt}$$

Jak widać pomimo trzech elementów reaktancyjnych w obwodzie, równanie stanu jest drugiego rzędu. Wynika to z faktu, że obwód zawiera oczko złożone z samych kondensatorów i idealnego źródła napięcia, stąd napięcie jednego kondensatora jest liniowo zależne od napięcia źródła i napięcia na drugim kondensatorze. W wyniku redukcji liczby zmiennych stanu równania stanu są zależne również od pochodnej funkcji wymuszenia.

1.7 Zadania sprawdzające

Zadanie 1.1

Napisać równania stanu dla obwodu przedstawionego na rys. 1.6. Przyjąć $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} u_{C_1} \\ i_{C_2} \end{bmatrix}$



Rys. 1.6 Schemat obwodu do zadania 1.1

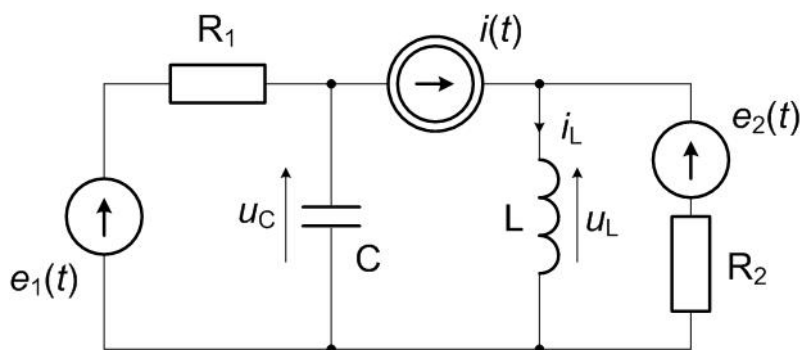
Rozwiązanie

$$\begin{bmatrix} \frac{du_{C_1}}{dt} \\ \frac{du_{C_2}}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ \frac{3}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{C_1} \\ u_{C_2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e \\ i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{C_1} \\ i_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{3}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{C_1} \\ u_{C_2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e \\ i \end{bmatrix}$$

Zadanie 1.2

Określić macierze stanu A, B, C i D dla obwodu przedstawionego na rys. 1.7. Przyjąć $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} u_L \\ u_C \end{bmatrix}$



Rys. 1.7 Schemat obwodu do zadania 1.2

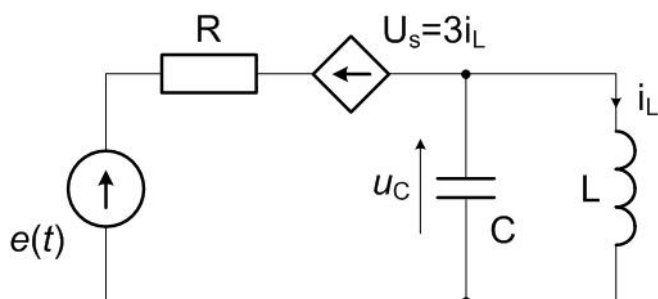
Rozwiązanie

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_1 C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{L} & 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \frac{1}{R_1 C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_L \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 1.3

Napisać równania stanu dla obwodu przedstawionego na rys. 1.8. Przyjąć $y = \begin{bmatrix} i_C \\ i_L \end{bmatrix}$, $L=1\text{H}$, $C=1\text{F}$, $R=2\Omega$.



Rys. 1.8 Schemat obwodu do zadania 1.3

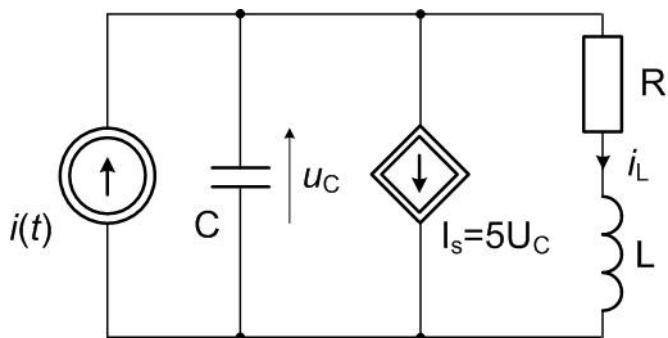
Rozwiązanie

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2,5 & -0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} \cdot [e]$$

$$\begin{bmatrix} i_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,5 & -0,5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [e]$$

Zadanie 1.4

Napisać równania stanu dla obwodu przedstawionego na rys. 1.9. Przyjąć $y = \begin{bmatrix} i_C \\ i_L \end{bmatrix}$, $L=1\text{H}$, $C=1\text{F}$, $R=1\Omega$.



Rys. 1.9 Schemat obwodu do zadania 1.4

Rozwiązanie

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [i]$$

$$\begin{bmatrix} i_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [i]$$

Zadanie 1.5

Wyznaczyć prądy $i_L(t)$ oraz napięcia $u_C(t)$ w układach metodą zmiennych stanu. Dane liczbowe elementów:

$$e_1(t) = 10\sqrt{2} \sin t \text{ V}$$

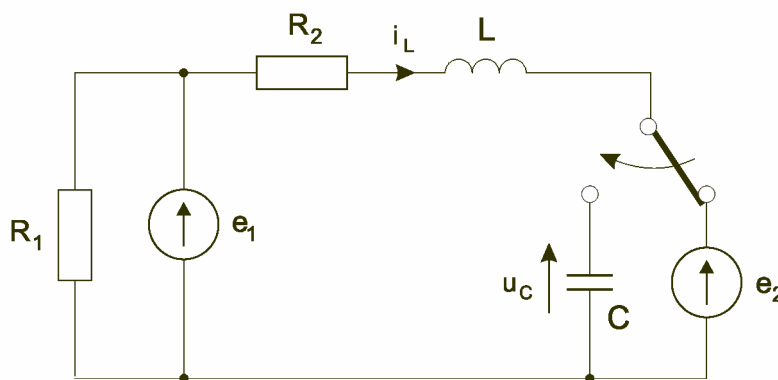
$$e_2(t) = 5 \text{ V}$$

$$R_1 = 1 \Omega$$

$$R_2 = 5 \Omega$$

$$L = 2 \text{ H}$$

$$C = 0,5 \text{ F}$$



Rys. 1.10 Schemat obwodu do zadanie 1.5

Rozwiązanie

$$i_L(t) = 2\sqrt{2} \sin t - 0,75e^{-2t} - 1,22e^{-0,5t}$$

$$u_C(t) = 4\sqrt{2} \sin(t - 90^\circ) - 0,75e^{-2t} - 4,88e^{-0,5t}$$

Zadanie 1.6

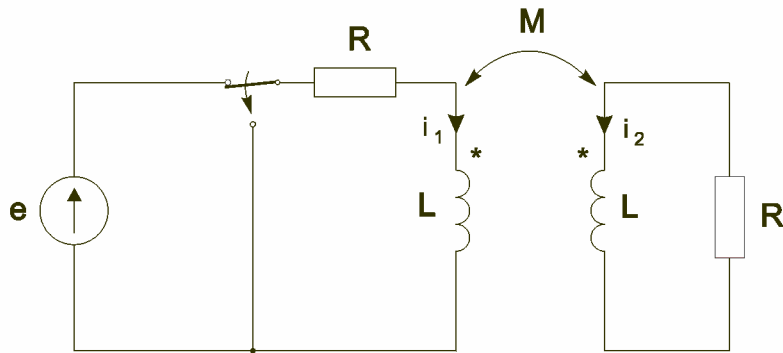
Określić prądy cewek sprzężonych w stanie nieustalonym po przełączeniu w obwodzie metoda zmiennych stanu. Dane liczbowe elementów:

$$e(t) = 6 \text{ V}$$

$$R = 3 \Omega$$

$$L = 2 \text{ H}$$

$$M = 1 \text{ H}$$



Rys. 1.11 Schemat obwodu do zadania 1.6

Rozwiązanie

$$i_1(t) = e^{-3t} + e^{-t}$$

$$i_2(t) = -e^{-3t} + e^{-t}$$

1.8 Testy samooceny

- 1) Na warunki początkowe w obwodzie RLC składają się
 - a) napięcia kondensatorów, cewek i rezystancji
 - b) napięcia kondensatorów i prądy cewek
 - c) prądy kondensatorów i napięcia cewek
 - d) prądy kondensatorów, cewek i rezystorów

- 2) Zmienne stanu w obwodzie tworzą
 - a) napięcia kondensatorów, cewek i rezystancji
 - b) napięcia kondensatorów i prądy cewek
 - c) prądy kondensatorów i napięcia cewek
 - d) ładunki kondensatorów, strumienie cewek

- 3) Z rozwiązania stanu ustalonego przed przełączeniem w obwodzie o wymuszeniu sinusoidalnym uzyskano rozwiązanie w następującej postaci zespolonej : $I_L = 10e^{j45^\circ}$, $U_C = -20$. Określić warunki początkowe w obwodzie (wynik prądowy w amperach, napięcia w woltach)
 - a) $i_L(0) = 10e^{j45^\circ}$, $u_C(0) = -20$
 - b) $i_L(0) = 10$, $u_C(0) = 20$
 - c) $i_L(0) = 10$, $u_C(0) = 0$
 - d) $i_L(0) = 10$, $u_C(0) = -20$

- 4) Obwód RC zawiera 3 kondensatory nie tworzące cyklu CE i cztery niezależne źródła prądowe. Jaki jest wymiar n wektora stanu \mathbf{x} i wymiar m wektora wymuszeń \mathbf{u} ?
 - a) $n=3$, $m=1$
 - b) $n=3$, $m=4$
 - c) $n=2$, $m=4$
 - d) $n=7$, $m=0$

- 5) Obwód RLC zawiera 2 kondensatory nie tworzące cyklu CE, dwa niezależne źródła prądowe oraz jedną cewkę tworzącą ze źródłami prądowymi rozcięcie LJ. Jaki jest wymiar n wektora stanu \mathbf{x} i wymiar m wektora wymuszeń \mathbf{u} ?
 - a) $n=3$, $m=1$
 - b) $n=2$, $m=3$
 - c) $n=2$, $m=2$
 - d) $n=3$, $m=2$

- 6) Równanie charakterystyczne obwodu ma postać: $M(s)=s^2+3s+2=0$. Bieguny obwodu równają się:
 - a) $s_1=-2$ $s_2=-1$
 - b) $s_1=2$ $s_2=-1$
 - c) $s_1=-2$ $s_2=1$
 - d) $s_1=2$ $s_2=1$

6)Macierz stanu \mathbf{A} ma postać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Wartości własne macierzy \mathbf{A} są równe:

- a) -0.162, 6.162
- b) 1, 5
- c) 3, 8
- d) 4, 7

- 7) Wymiar macierzy stanu A jest równy 4. Ile składników rozwinięcia wielomianowego wystąpi w metodzie Cayleya-Hamiltona?
- a) 3
 - b) 4
 - c) zależy od krotności wartości własnych
 - d) zależy od tego czy wartości własne są rzeczywiste czy zespolone
- 8) Jak jest relacja między wartościami własnymi macierzy stanu i biegunami układu
- a) nie ma żadnej relacji
 - b) są to te same wartości
 - c) nazwę wartości własnych stosuje się w opisie stanowym a biegunów w opisie operatorowym
- 9) Jeśli wartości własne macierzy A w obwodzie są zespolone to
- a) charakter stanu nieustalonego w obwodzie jest oscylacyjny
 - b) charakter stanu nieustalonego w obwodzie jest aperiodyczny
 - c) wartości własne nie mają związku z charakterem stanu nieustalonego
 - d) charakter odpowiedzi zależy od warunków początkowych
- 10) Warunki początkowe na kondensatorze są równe $u_C(0^-)=20V$ a stan ustalony opisany jest funkcją $u_{Ci}(t)=20\sin(\omega t-90^\circ)$. Ile wynosi napięcia na kondensatorze dla stanu przejściowego $u_{Cp}(0^+)$?
- a) 0
 - b) 20V
 - c) -20V
 - d) 40V

1.9 Odpowiedzi do testów

1b

2b,d

3c

4b

5c

6a

7b

8b,c

9a

10d

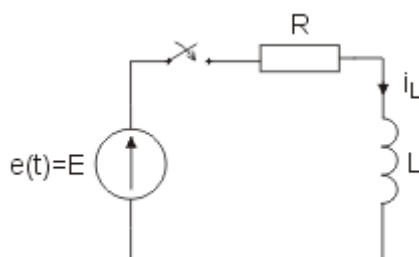
2. Stany nieustalone w obwodach RL i RC

Dla zrozumienia istoty stanu nieustalonego rozpatrzmy zjawiska jakie towarzyszą procesowi komutacji w najprostszych obwodach zawierających cewkę bądź kondensator. Oba wymienione elementy reaktancyjne gromadzą energię. Prawo zachowania energii wymusza pewien stan przejściowy zachodzący pomiędzy stanami ustalonymi przed i po przełączeniu. Musi upłynąć pewien czas trwania stanu przejściowego, w którym stan nieustalony przejdzie w ustalony.

W tej lekcji analizę stanu nieustalonego przeprowadzimy przy zastosowaniu metody klasycznej. Podamy opisy różniczkowe obwodów RL i RC oraz ich rozwiązania w dziedzinie czasu. Przebiegi prądów i napięć w obwodach zawierających jeden element reaktancyjny są typu wykładniczego, scharakteryzowanego przez stałą czasową, decydującą o czasie trwania stanu nieustalonego. Pokażemy wpływ stałej czasowej na przebiegi czasowe w obu obwodach.

2.1 Stan nieustalony w szeregowym obwodzie RL przy załączeniu napięcia stałego

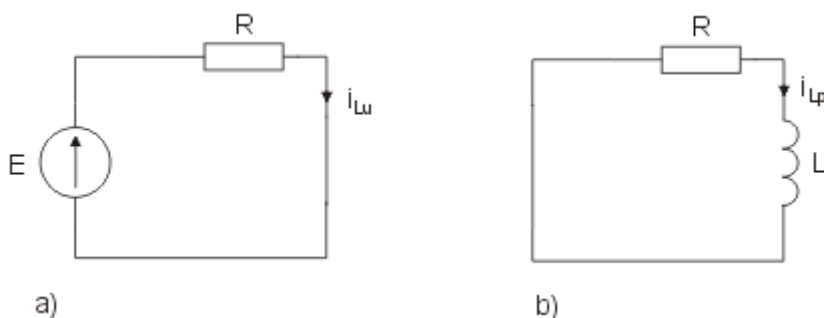
Jako pierwszy przykład zastosowania metody klasycznej rozpatrzmy stan nieustalony w obwodzie szeregowym RL przy zerowych warunkach początkowych i załączeniu napięcia stałego jak to zostało w symboliczny sposób przedstawione na rys. 2.1. Zerowe warunki początkowe obwodu oznaczają, że $i_L(0^-) = 0$.



Rys. 2.1. Obwód szeregowy RL przy załączeniu napięcia stałego

Po przełączeniu w obwodzie RL powstaje stan nieustalony, który po określonym czasie prowadzi do powstania nowego stanu ustalonego wynikającego z nowego układu połączeń elementów. Stan nieustalony jest superpozycją stanu ustalonego i przejściowego.

Stan ustalony w obwodzie RL przy wymuszeniu stałym oznacza, że cewka stanowi zwarcie (rys. 2.2a).



Rys. 2.2. Postać obwodu RL do obliczenia składowej a) ustalonej i b) przejściowej

Na podstawie napięciowego prawa Kirchhoffa prąd ustalony tej cewki jest równy

$$i_{Lu}(t) = \frac{E}{R} \quad (2.1)$$

Przechodząc do obliczenia stanu przejściowego należy wyeliminować zewnętrzne źródło zasilające. Ponieważ jest to źródło napięciowe, należy go zewrzeć. Schemat obwodu dla stanu przejściowego po zwarcie źródła zasilającego, dla którego odpowiedź została właśnie obliczona, ma postać przedstawioną na rys. 2.2b. Stosując prawo napięciowe Kirchhoffa dla tego obwodu przy uwzględnieniu

$$u_{Lp} = L \frac{di_{Lp}}{dt} \quad (2.2)$$

otrzymuje się równanie różniczkowe jednorodne (brak wymuszenia) dla składowej przejściowej o postaci

$$L \frac{di_{Lp}}{dt} + Ri_{Lp} = 0 \quad (2.3)$$

Równanie charakterystyczne odpowiadające powyższemu równaniu różniczkowemu przyjmuje postać

$$Ls + R = 0 \quad (2.4)$$

Równanie to posiada tylko jeden pierwiastek

$$s_1 = -\frac{R}{L} \quad (2.5)$$

Wykorzystując wzór (10.41) rozwiązanie stanu przejściowego dla prądu w obwodzie RL zapiszemy w postaci

$$i_{Lp} = A_1 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (2.6)$$

w której współczynnik A_1 jest nieznaną stałą całkowania. Rozwiązanie całkowite obwodu jest sumą składowej ustalonej i przejściowej. W związku z powyższym prąd cewki określony jest następującym wzorem

$$i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) = \frac{E}{R} + A_1 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (2.7)$$

Z prawa komutacji dla cewki wynika, że $i_L(0^-) = i_L(0^+)$, stąd wobec $i_L(0^-) = 0$ otrzymuje się

$$0 = \frac{E}{R} + A_1 \quad (2.8)$$

oraz

$$A_1 = -E / R \quad (2.9)$$

Stąd rozwiązanie określające przebieg prądu cewki w stanie nieustalonym przyjmuje postać

$$i_L(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}} \right) \quad (2.10)$$

Wprowadzając pojęcie **stałej czasowej** τ obwodu RL

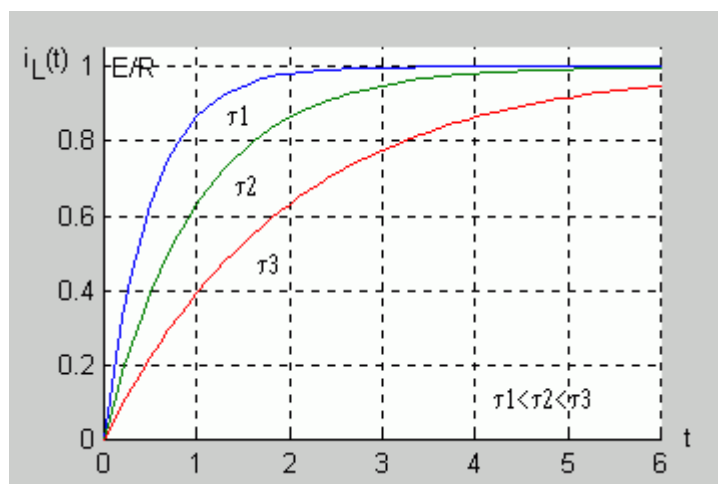
$$\tau = \frac{L}{R} \quad (2.11)$$

rozwiązanie na prąd cewki w stanie nieustalonym można zapisać w postaci

$$i_L(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (2.12)$$

Jednostką stałej czasowej jest sekunda (jednostką indukcyjności jest $1\text{H} = 1\Omega\text{s}$ a jednostką rezystancji 1Ω). Łatwo wykazać, że po upływie trzech stałych czasowych ($t = 3\tau$) prąd cewki uzyskuje prawie 95% swojej wartości ustalonej a po 5 stałych czasowych aż 99,3%. Oznacza to, że praktycznie po 5 stałych czasowych stan nieustalony w obwodzie zanika przechodząc w stan ustalony.

Na rys. 2.3 przedstawiono przebiegi prądu cewki dla różnych wartości stałej czasowej.



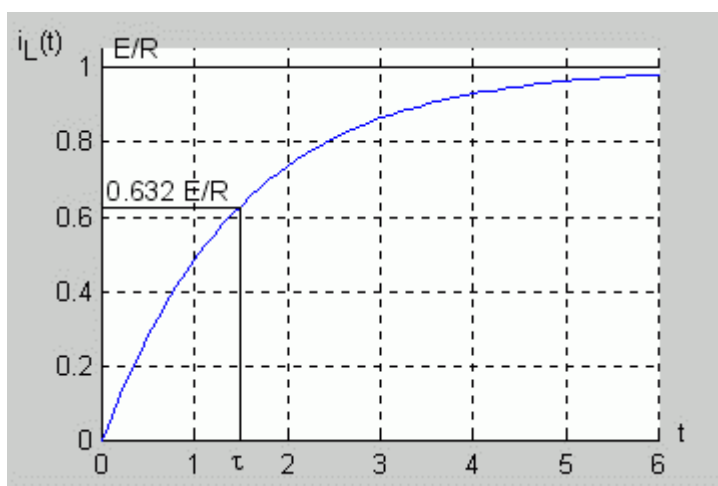
Rys. 2.3. Przebieg prądu cewki w stanie nieustalonym

Jest to przebieg typu wykładniczego, w którym stan przejściowy trwa tym dłużej im dłuższa jest stała czasowa. Praktycznie po 5 stałych czasowych stan przejściowy w obwodzie zanika przechodząc w stan ustalony.

Stałą czasową obwodu RL można wyznaczyć na podstawie zarejestrowanego przebiegu nieustalonego bez znajomości wartości rezystancji i indukcyjności. Zauważmy, że dla $t = \tau$ prąd cewki przyjmuje wartość

$$i_L(\tau) = \frac{E}{R}(1 - e^{-1}) = 0,632 \frac{E}{R} \quad (2.13)$$

Oznacza to, że wartość prądu $i_L(t)|_{t=\tau} = 0,632 \frac{E}{R}$ wyznacza na osi odciętych wartość stałej czasowej. Sposób wyznaczania stałej czasowej zilustrowany jest na rys. 2.4.

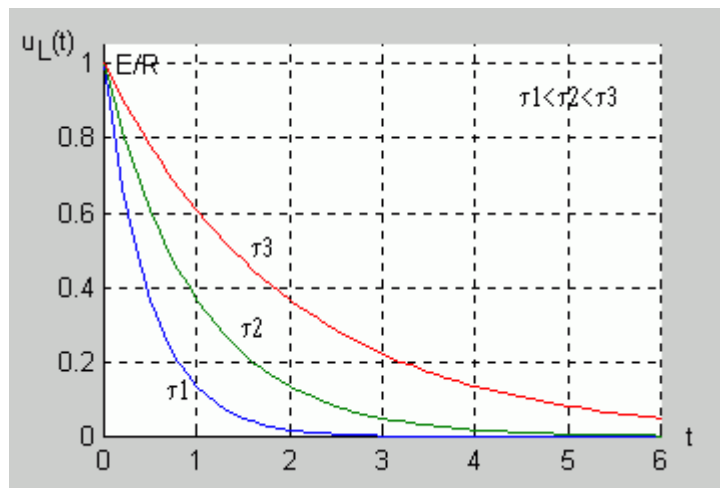


Rys. 2.4. Ilustracja sposobu wyznaczania stałej czasowej na podstawie zarejestrowanego przebiegu prądu cewki

Wyznaczenie rozwiązania na prąd w stanie nieustalonym w obwodzie RL pozwala na określenie przebiegu czasowego pozostałych wielkości w obwodzie. Korzystając z zależności definicyjnej cewki $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ otrzymuje się

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = E e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (2.14)$$

Przebieg napięcia na cewce w stanie nieustalonym w obwodzie szeregowym RL przedstawiono na rys. 2.5.



Rys. 2.5. Przebieg napięcia na cewce w stanie nieustalonym w obwodzie szeregowym RL

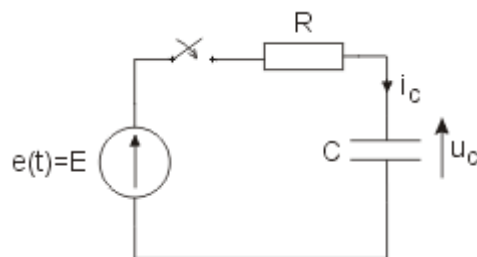
Napięcie na rezystorze R , jak wynika z prawa Ohma, jest proporcjonalne do prądu

$$u_R(t) = Ri_L(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}} \right) \quad (2.15)$$

i ma kształt identyczny z przebiegiem prądu w obwodzie przedstawionym na rys. 2.3.

2.2 Stan nieustalony w gałęzi szeregowej RC przy załączeniu napięcia stałego

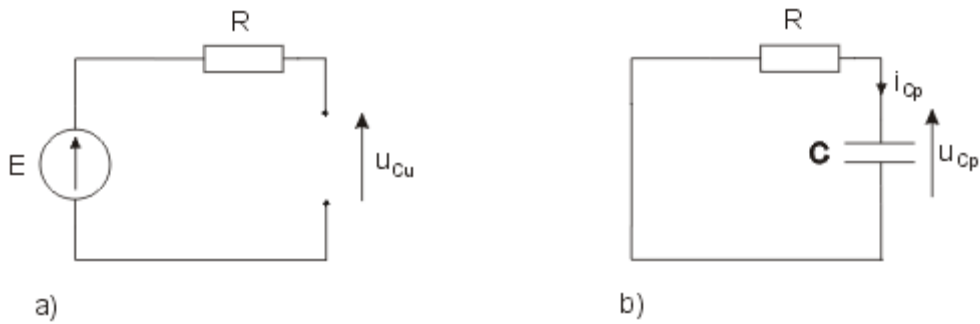
Rozpatrzmy stan nieustalony w obwodzie szeregowym RC przy zerowych warunkach początkowych i załączeniu napięcia stałego (rys. 2.6).



Rys. 2.6. Załączenie napięcia stałego do obwodu szeregowego RC

Wobec braku zasilania w obwodzie przed przełączeniem w warunki początkowe obwodu są zerowe, co oznacza, że $u_C(0^-) = 0$.

Po przełączeniu powstaje w obwodzie stan nieustalony, który po pewnym czasie prowadzi do powstania nowego stanu ustalonego. Stan nieustalony obwodu jest superpozycją stanu ustalonego i przejściowego. Stan ustalony w obwodzie RC przy wymuszeniu stałym ($\omega=0$) oznacza, że kondensator stanowi przerwę (rys. 2.7a).



Rys. 2.7 Schemat obwodu RC dla składowej a) ustalonej, b) przejściowej

Zgodnie z prawem napięciowym Kirchhoffa napięcie ustalone kondensatora jest równe

$$u_{Cu}(t) = E \quad (2.16)$$

Schemat obwodu dla stanu przejściowego (po zwarceniu źródła zasilającego, dla którego odpowiedź została właśnie obliczona) ma postać przedstawioną na rys. 2.7b. Stosując prawo napięciowe Kirchhoffa dla tego obwodu i uwzględniając, że $i_{Cp} = C \frac{du_{Cp}}{dt}$, otrzymuje się równanie różniczkowe jednorodne o postaci

$$RC \frac{du_{Cp}}{dt} + u_{Cp} = 0 \quad (2.17)$$

Równanie charakterystyczne odpowiadające mu przyjmuje więc postać

$$RCs + 1 = 0 \quad (2.18)$$

Równanie to posiada jeden pierwiastek $s_1 = -1/(RC)$. W związku z powyższym jego rozwiązanie wynikające ze wzoru (10.41) przyjmie uproszczoną postać

$$u_{Cp} = A_1 e^{s_1 t} = A_1 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.19)$$

W rozwiązaniu tym współczynnik A_1 jest stałą całkowania, którą należy wyznaczyć korzystając z prawa komutacji. Rozwiązanie całkowite będące sumą składowej ustalonej i przejściowej przybiera więc postać

$$u_C(t) = u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t) = E + A_1 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.20)$$

Z prawa komutacji dla kondensatora wynika, że $u_C(0^-) = u_C(0^+)$, stąd wobec $u_C(0^-) = 0$ otrzymuje się

$$0 = E + A_1 \quad (2.21)$$

oraz

$$A_1 = -E$$

Rozwiązanie czasowe określające przebieg napięcia na kondensatorze przyjmuje więc postać

$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (2.22)$$

Wprowadzając pojęcie stałej czasowej τ obwodu RC jako iloczynu rezystancji R i pojemności C

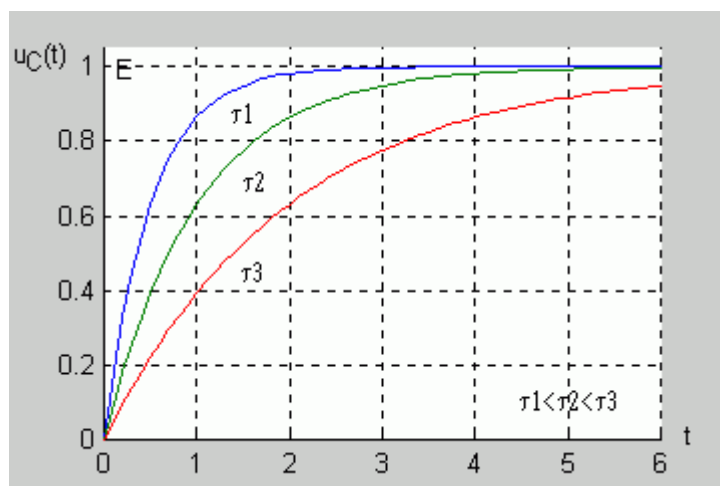
$$\tau = RC \quad (2.23)$$

rozwiązanie na napięcie kondensatora w stanie nieustalonym można zapisać w postaci

$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (2.24)$$

Jak łatwo sprawdzić podstawową jednostką stałej czasowej w obwodzie RC jest również sekunda (jednostką rezystancji jest $1\Omega = 1V/A$, a jednostką pojemności jest $1F = 1As/V$). Na rys. 2.8 przedstawiono przebiegi napięcia na kondensatorze

w stanie nieustalonym $u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ dla różnych wartości stałej czasowej.



Rys. 2.8. Przebiegi napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym przy różnych stałych czasowych

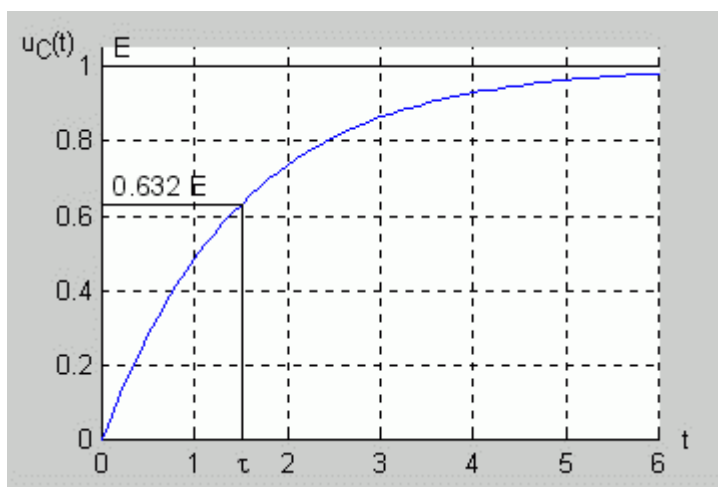
Im dłuższa stała czasowa tym dłużej trwa stan przejściowy w obwodzie (zanikanie zmian napięcia do zera).

Łatwo wykazać, że po upływie 3 stałych czasowych ($t = 3\tau$) napięcie uzyskuje prawie 95% swojej wartości ustalonej a po 5 stałych czasowych aż 99,3%. Oznacza to, że praktycznie po 5 stałych czasowych stan nieustalony w obwodzie zanika przechodząc w stan ustalony.

Stałą czasową można wyznaczyć bezpośrednio na podstawie zarejestrowanego przebiegu nieustalonego bez znajomości wartości rezystancji i pojemności, podobnie jak to miało miejsce w przypadku obwodu RL. Zauważmy, że dla $t = \tau$ napięcie na kondensatorze przyjmuje wartość

$$u_C(\tau) = E(1 - e^{-1}) = 0,632E \quad (2.25)$$

Oznacza to, że napięcie $u_C(t)|_{t=\tau} = 0,632E$ wyznacza na osi odciętych wartość stałej czasowej. Ilustruje to rys. 2.9.



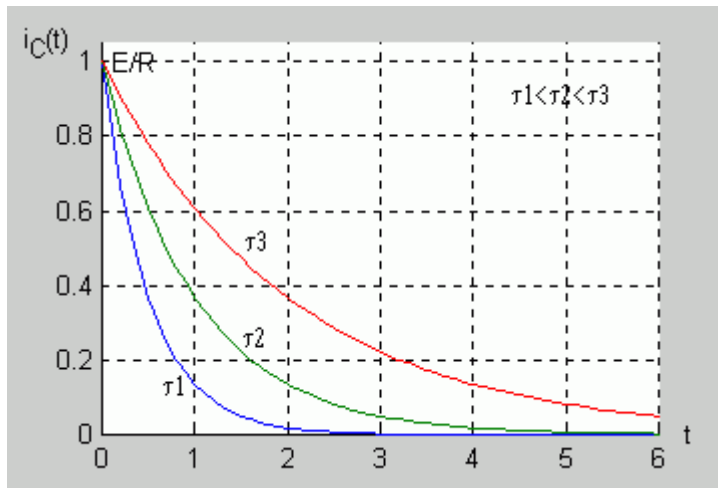
Rys. 2.9. Wyznaczanie stałej czasowej obwodu RC na podstawie przebiegu czasowego napięcia kondensatora

Po określeniu funkcji opisującej przebieg napięcia na kondensatorze można określić przebieg czasowy prądu w obwodzie.

Korzysta się przy tym z zależności definicyjnej kondensatora $i_C = C \frac{du_C}{dt}$, zgodnie z którą

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.26)$$

Przebieg prądu ładowania kondensatora w stanie nieustalonym w obwodzie RC dla różnych stałych czasowych przedstawia rys. 2.10.



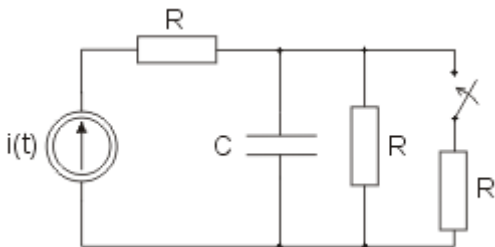
Rys. 2.10. Przebieg prądu ładowania kondensatora w obwodzie RC

W chwili komutacji występuje skokowa zmiana wartości prądu (prąd kondensatora nie jest objęty komutacyjnym prawem ciągłości). Przebieg prądu kondensatora dąży do wartości ustalonej zerowej (w stanie ustalonym kondensator stanowi przerwę dla prądu). Stała czasowa zmian tego prądu jest identyczna jak napięcia i równa $\tau = RC$.

2.3 Ćwiczenia

Ćwiczenie 2.1

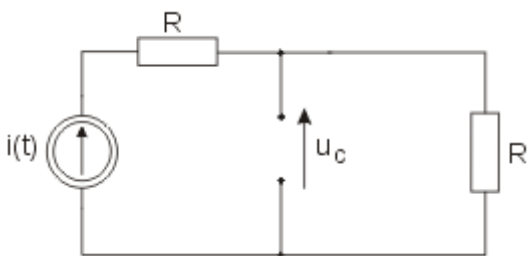
Określić przebieg czasowy napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym w obwodzie przedstawionym na rys. 2.2. Zastosować metodę klasyczną. Przyjąć następujące wartości parametrów: $R=10\text{k}\Omega$, $C=10\mu\text{F}$, $i(t) = I = 2\text{mA}$.



Rys. 2.2. Schemat obwodu do zadania 2.1

Rozwiązanie

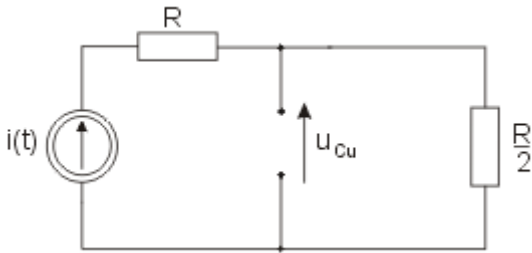
Warunki początkowe w obwodzie wynikają ze stanu ustalonego obwodu przed przełączeniem, który wobec wymuszenia stałego ma postać uproszczoną przedstawioną na rys. 2.12.



Rys. 2.12. Schemat obwodu w stanie ustalonym przed przełączeniem dla wymuszenia stałego

$$u_C(t) = u_C(0^-) = IR = 20V$$

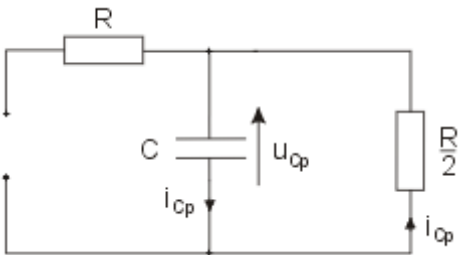
Stan ustalony w obwodzie po przełączeniu dotyczy obwodu przedstawionego na rys. 2.13.



Rys. 2.13. Schemat obwodu w stanie ustalonym po przełączeniu

$$u_{Cu}(t) = u_{Cu}(0^+) = IR/2 = 10V$$

Stan przejściowy dotyczy obwodu po przełączeniu przedstawionego na rys. 2.14



Rys. 2.14 Schemat obwodu w stanie przejściowym po przełączeniu

Równania różniczkowe obwodu:

$$u_{Cp} + C \frac{R}{2} \frac{du_{Cp}}{dt} = 0$$

$$u_{Cp} + 0,05 \frac{du_{Cp}}{dt} = 0$$

Równanie charakterystyczne:

$$1 + 0,05s = 0 \rightarrow s_1 = -20$$

Rozwiązanie równania różniczkowego:

$$u_{Cp}(t) = Ae^{-20t}$$

Rozwiązanie całkowane obwodu

$$u_C(t) = u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t) = 10 + Ae^{-20t}$$

Z prawa komutacji dla kondensatora wynika równość

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) \rightarrow 20 = 10 + A \rightarrow A = 10$$

Postać rozwiązania ostatecznego:

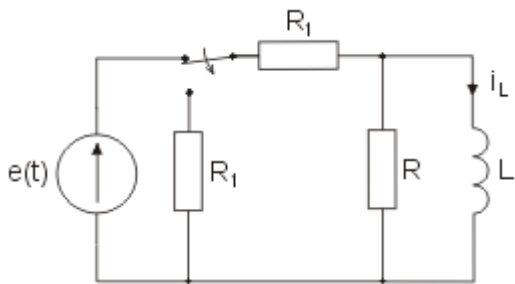
$$u_C(t) = 10(1 + e^{-20t})$$

Stała czasowa obwodu jest więc równa $\tau = 1/20 = 0,05s$

Ćwiczenie 2.2

Określić przebieg czasowy prądu cewki w stanie nieustalonym w obwodzie przedstawionym na rys. 2.15. Zastosować metodę klasyczną. Przyjąć następujące wartości parametrów: $R=2\Omega$, $R_1=5\Omega$, $L=2H$,

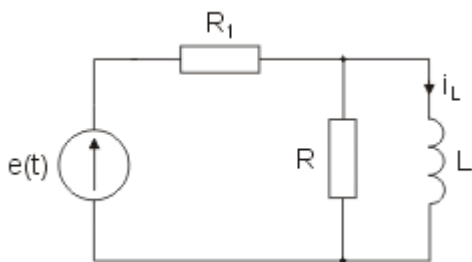
$$e(t) = 20\sqrt{2} \sin(t)$$



Rys. 2.15. Schemat obwodu do zadania 2.2

Rozwiązanie

Warunki początkowe dotyczą obwodu przedstawionego na rys. 2.16.



Rys. 2.16. Schemat obwodu do wyznaczania warunków początkowych

Stosując do tego obwodu metodę symboliczną otrzymuje się kolejno

$$\omega = 1$$

$$Z_L = j\omega L = j2$$

$$Z_{RL} = \frac{2 \cdot j2}{2 + j2} = 1 + j1$$

$$I_L = E \frac{Z_{RL}}{(R_1 + Z_{RL})Z_L} = 2,32e^{-j54,5^\circ}$$

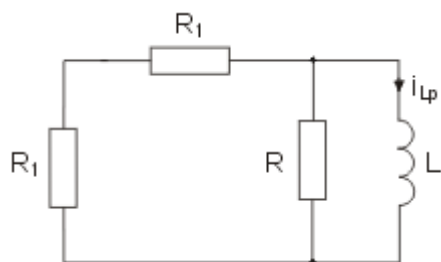
$$i_L(t) = 2,32\sqrt{2} \sin(t - 54,5^\circ)$$

$$i_L(0^-) = -2,67$$

Wobec odłączenia źródła podczas przełączenia stan ustalony w obwodzie po przełączeniu jest zerowy, stąd

$$i_{Lu}(t) = 0 \rightarrow i_{Lu}(0^+) = 0$$

Stan przejściowy dotyczy obwodu z rys. 2.17



Rys. 2.17 Schemat obwodu do wyznaczenia składowej przejściowej

Równanie różniczkowe obwodu:

$$L \frac{di_{Lp}}{dt} + \frac{2R_1 R}{2R_1 + R} i_{Lp} = 0$$

Po wstawieniu wartości liczbowych otrzymuje się

$$\frac{di_{Lp}}{dt} + \frac{5}{6} i_{Lp} = 0$$

Równanie charakterystyczne

$$s + \frac{5}{6} = 0 \rightarrow s_1 = -\frac{5}{6}$$

Rozwiązanie równania różniczkowego

$$i_{Lp}(t) = Ae^{-(5/6)t}$$

Wobec braku składowej ustalonej rozwiązanie to jest jednocześnie rozwiązaniem pełnym. Stąd

$$i_L(t) = i_{Lp}(t) = Ae^{-(5/6)t}$$

Z praw komutacji wynika

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) \rightarrow A = -2,67$$

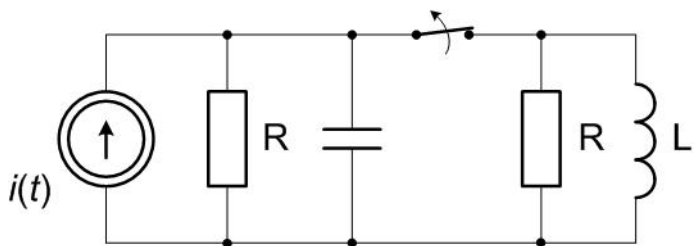
Rozwiązanie pełne obwodu przyjmuje więc postać

$$i_L(t) = -2,67e^{-(5/6)t}$$

2.4 Zadania sprawdzające

Zadanie 2.1

Określić przebieg czasowy napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym w obwodzie przedstawionym na rys. 2.18. Przyjąć następujące wartości parametrów: $R=1\Omega$, $C=1F$, $L=1H$, $i(t) = 5\sqrt{2}\sin(t - 45^\circ)A$.



Rys. 2.19. Schemat obwodu do zadania 2.1

Rozwiązanie

$$u_C(t) = 5\sin(t - 90^\circ) + 2.5e^{-t}[V]$$

Zadanie 2.2

Określić przebieg czasowy prądu cewki w stanie nieustalonym w obwodzie przedstawionym na rys. 2.20. Przyjąć następujące wartości parametrów

$$e_1(t) = 10\sqrt{2}\sin(t - 90^\circ) V$$

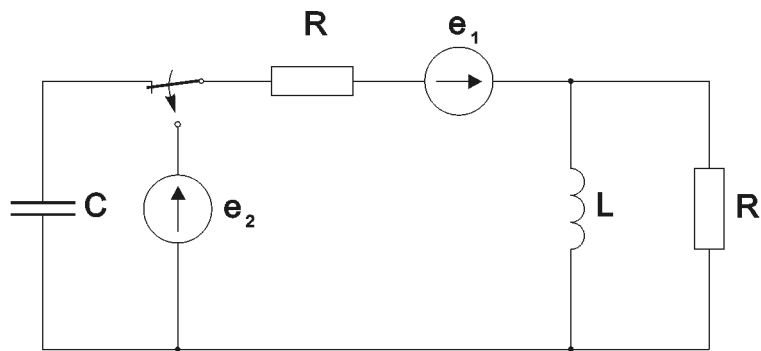
$$e_2(t) = 5 V$$

$$R = 5 \Omega$$

$$L = 1 H$$

$$C = 0,5 F$$

Wyznaczyć i narysować przebieg $i_L(t)$ po przełączeniu w obwodzie.



Rys. 2.20. Schemat obwodu do zadania 2.2

Rozwiązanie

$$i_L(t) = 1 + 1,86\sqrt{2} \sin(t - 111,8^\circ) - 1,17e^{-2,5t}$$

Zadanie 2.3

Wyznaczyć przebieg napięcia na kondensatorze po przełączeniu w obwodzie. Dane elementów:

$$i(t) = 2 \sin(t + 45^\circ) \text{ A}$$

$$e(t) = 10 \text{ V}$$

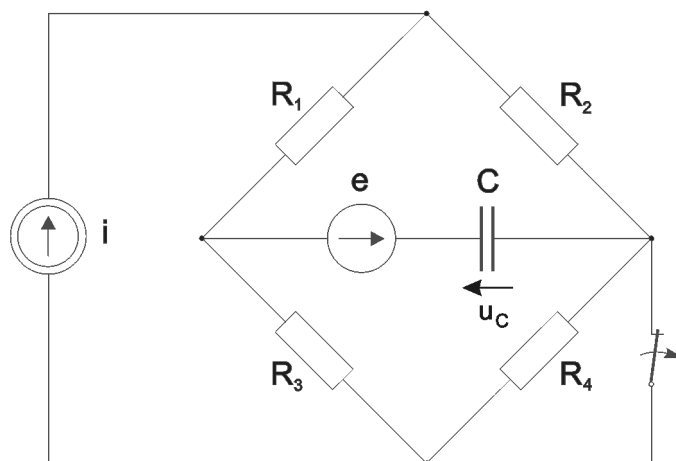
$$C = 1 \text{ F}$$

$$R_1 = 2 \ \Omega$$

$$R_2 = 5 \ \Omega$$

$$R_3 = 4 \ \Omega$$

$$R_4 = 10 \ \Omega$$



Rys. 2.21. Schemat obwodu do zadania 2.3

Rozwiązanie

$$u_C(t) = 10 - 0,53e^{-0,214t}$$

Zadanie 2.4

Określić napięcia na kondensatorach po komutacji w obwodzie przedstawionym na rysunku. Dane elementów obwodu:

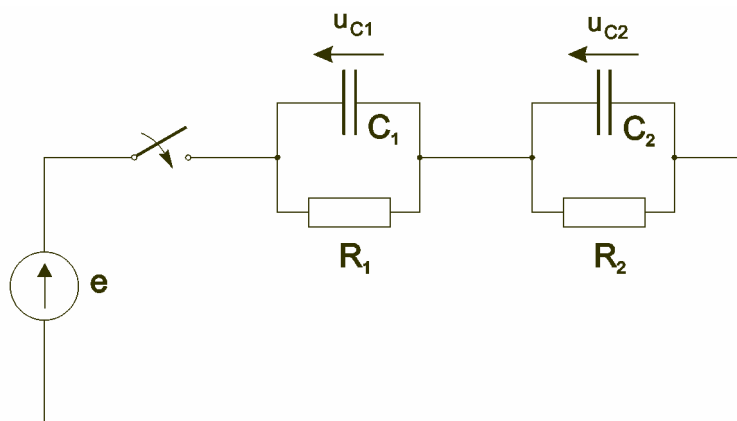
$$e = 200 \text{ V}$$

$$R_1 = 400 \ \Omega$$

$$R_2 = 100 \Omega$$

$$C_1 = 4 \mu\text{F}$$

$$C_2 = 1 \mu\text{F}$$



Rys. 2.22. Schemat obwodu do zadania 2.4

Rozwiązanie

$$u_{C_1}(t) = 160 - 120e^{-2500t}$$

$$u_{C_2}(t) = 40 + 120e^{-2500t}$$

2.5 Testy samooceny

- 1) Stała czasowa obwodu szeregowego RL o parametrach $R=2\Omega$, $L=3H$ wynosi:
 - a) $\tau=2/3s$
 - b) $\tau=3/2s$
 - c) $\tau=2s$
 - d) $\tau=3s$

- 2) Czas trwania stanu nieustalonego w obwodzie RL zależy od stałej czasowej. Wraz ze wzrostem tej stałej czas ten :
 - a) skraca się
 - b) wydłuża
 - c) nie zależy od stałej czasowej
 - d) pozostaje niezmienną

- 3) Przebieg napięcia na kondensatorze w obwodzie RC przy wymuszeniu stałym w stanie nieustalonym ma charakter
 - a) aperiodyczny
 - b) oscylacyjny
 - c) taki sam jak wymuszenie
 - d) wartości stałej

- 4) Wzrost wartości pojemności w obwodzie szeregowym RC powoduje
 - a) wydłużenie stanu nieustalonego
 - b) skrócenie stanu nieustalonego
 - c) nie ma wpływu na czas trwania stanu nieustalonego
 - d) zwiększenie energii zgromadzonej w kondensatorze

- 5) Wzrost wartości rezystancji w połączeniu równoległym obwodu RL zasilanym ze źródła prądowego stałego powoduje w stanie nieustalonym
 - a) zmniejszenie stałej czasowej
 - b) zwiększenie stałej czasowej
 - c) nie ma wpływu na stałą czasową

- 6) W obwodzie szeregowym RL zasilanym ze źródła napięcia stałego w stanie nieustalonym
 - a) mogą powstać oscylacje
 - b) nie mogą powstać oscylacje
 - c) powstanie oscylacji zależy od wartości elementów R i L
 - d) powstanie oscylacji zależy od stosunku wartości elementów R do L

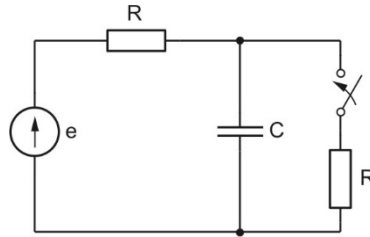
- 7) W stanie nieustalonym w obwodzie RC zasilanym ze źródła napięcia stałego napięcie na kondensatorze
 - a) może przewyższyć wartość napięcia zasilania
 - b) nie może przewyższyć wartości napięcia zasilania
 - c) zawsze jest niższe (co najwyżej równe) napięciu zasilania
 - d) nie ma związku z wartością napięcia zasilania

- 8) W obwodzie zasilanym ze źródła napięciowego kondensator $C=0,1F$ podłączony jest równolegle do rezystora R_2 dzielnika napięciowego R_1-R_2 . Wartości rezystorów wynoszą: $R_1=80\Omega$, $R_2=120\Omega$. Ile wynosi stała czasowa takiego obwodu?
 - a) $\tau=12s$
 - b) $\tau=8s$

- c) $\tau=4,8s$
- d) $\tau=20s$

- 9) Cewka $L=0,24H$ połączona jest równolegle do rezystora $R_1=60\Omega$. Układ tych dwu elementów połączony jest szeregowo z rezystorem $R_2=40\Omega$ i zasilany ze źródła napięciowego. Ile wynosi stała czasowa takiego obwodu?
- a) $\tau=40ms$
 - b) $\tau=10ms$
 - c) $\tau=60ms$
 - d) $\tau=2,4ms$

- 10) Napięcie na kondensatorze C w stanie nieustalonym po przełączeniu w obwodzie z rys. 8.24 przy $R=50\Omega$, $C=1000\mu F$, $E=100V$ określone jest wzorem:



Rys. 8.24. Schemat obwodu do analizy

- a) $u_C(t) = 50 + 50e^{-40t}$
- b) $u_C(t) = 50 - 50e^{-40t}$
- c) $u_C(t) = 50e^{-40t}$
- d) $u_C(t) = 50 + 50e^{40t}$

2.6 Odpowiedzi do testów

1b

2b

3a

4a,d

5a

6b

7b,c

8c

9b

10a

3. Metoda operatorowa Laplace'a

Opis obwodów elektrycznych w stanie nieustalonym poprzez układ równań różniczkowych jest wygodną formą analizy przy zastosowaniu metod numerycznych. W przypadku analizowania zjawisk zachodzących w tych obwodach z zastosowaniem metod analitycznych metoda ta jest żmudna przy dużej liczbie elementów indukcyjnych i pojemnościowych i stąd jej zastosowanie ograniczone jest praktycznie do rzędu $n=2$. W takich przypadkach znacznie wygodniejsze jest zastosowanie metod operatorowych, z których najważniejsza to metoda operatorowa Laplace'a. Rachunek operatorowy jako alternatywa do metody klasycznej polega na algebraizacji równań różniczkowych opisujących dany obwód. W ten sposób układ równań różniczkowych zostaje zastąpiony układem równań algebraicznych typu funkcyjnego.

Zastosowanie przekształcenia Laplace'a upraszcza operację rozwiązywania równań różniczkowych zastępując ją rozwiązaniem układu równań algebraicznych. Istota przekształcenia Laplace'a polega na tym, że każdej funkcji czasu $f(t)$ określonej dla $t > 0$ odpowiada pewna funkcja $F(s)$ określona w dziedzinie liczb zespolonych i odwrotnie, każdej funkcji $F(s)$ odpowiada określona funkcja czasu $f(t)$.

W tym rozdziale omówimy podstawy rachunku operatorowego Laplace'a. Przedstawione zostaną definicje przekształcenia prostego i odwrotnego oraz podstawowe własności przekształcenia. Podamy przykłady obliczania transformat prostej i odwrotnej, ilustrujące istotę transformacji Laplace'a.

3.1 Wiadomości podstawowe dotyczące rachunku operatorowego Laplace'a

Zastosowanie przekształcenia Laplace'a upraszcza operację rozwiązywania równań różniczkowych zastępując ją rozwiązaniem układu równań algebraicznych. Istota przekształcenia Laplace'a polega na tym, że każdej funkcji czasu $f(t)$ określonej dla $t > 0$ odpowiada pewna funkcja $F(s)$ określona w dziedzinie liczb zespolonych i odwrotnie, każdej funkcji $F(s)$ odpowiada określona funkcja czasu $f(t)$. Funkcję $f(t)$ nazywamy **oryginałem** i oznaczamy małą literą. Funkcję $F(s)$ nazywamy **transformatą** funkcji określoną w dziedzinie zmiennej zespolonej s i oznaczamy dużą literą. Zmienna s jest nazywana **częstotliwością zespoloną**, przy czym $s = \sigma + j\omega$, gdzie ω oznacza pulsację.

W elektrotechnice najczęściej używane jest jednostronne przekształcenie Laplace'a, określone parą równań:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (3.1)$$

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi \cdot j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (3.2)$$

w których c jest bliżej nieokreśloną stałą warunkującą położenie granic całkowania w obszarze zbieżności transformaty. Pierwsze z równań definiuje **proste przekształcenie** Laplace'a przyporządkowujące oryginałowi transformatę zmiennej zespolonej s , a drugie **przekształcenie odwrotne** dokonujące transformacji odwrotnej, czyli wyznaczające funkcję oryginału na podstawie $F(s)$. Zakładamy przy tym, że funkcja $f(t)$ jest funkcją czasu, zadaną dla $t > 0$ i równą 0 dla $t < 0$

oraz, że nie rośnie szybciej niż funkcja wykładnicza. Proste przekształcenie Laplace'a określone wzorem (3.1) dokonuje transformacji funkcji czasu $f(t)$ na funkcję $F(s)$ zmiennej zespolonej s . Przekształcenie odwrotne określone wzorem (3.2) dokonuje transformacji funkcji zespolonej $F(s)$ na funkcję czasu $f(t)$. Wzór ten pełni jedynie rolę definicji i w praktyce nie używa się go do wyznaczania transformaty odwrotnej, wykorzystując w zamian własności transformat Laplace'a.

Przykład 3.1

Wyznamy z definicji transformatę Laplace'a funkcji stałej $f(t)=A$. Z definicji (3.1) transformaty otrzymuje się

$$F(s) = L\{A\} = A \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{-A}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{A}{s}$$

Przykład 3.2

Jako drugi przykład wyznaczymy transformatę Laplace'a funkcji wykładniczej $f(t) = e^{at}$, gdzie w ogólności $a = \alpha + j\beta$. Z zastosowania wzoru (3.1) otrzymuje się

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right]_0^{\infty}$$

Po wstawieniu granic całkowania otrzymuje się

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

Należy podkreślić, że jednostronne przekształcenie Laplace'a jest określone w przedziale od zera do nieskończoności, stąd postać funkcji dla czasu ujemnego nie ma żadnego wpływu na transformatę Laplace'a.

Na przykład funkcja stała $f(t)=1$ oraz **funkcja skoku jednostkowego** $f(t)=1(t)$ (funkcja skokowa Heaviside'a) określona wzorem

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t = 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

mają identyczne transformaty Laplace'a, pomimo tego że dla $t < 0$ są inne (pierwsza równa 1 a druga równa 0) gdyż w zakresie czasowym od zera do nieskończoności nie różnią się niczym.

Jakkolwiek definicja przekształcenia Laplace'a umożliwia obliczenie transformaty dla dowolnej funkcji czasu, w obliczeniach inżynierskich posługujemy się najczęściej tablicami transformat Laplace'a zebranych w poradnikach matematycznych, wykorzystując przy tym podstawowe własności tego przekształcenia.

3.2 Podstawowe własności przekształcenia Laplace'a.

Z wielu istniejących własności przekształcenia Laplace'a ograniczymy się tutaj do kilku podstawowych, których znajomość jest konieczna do określenia stanów nieustalonych w obwodach RLC.

3.2.1 Liniowość przekształcenia

Jeśli współczynniki a_1 i a_2 są dowolnymi stałymi to

$$L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \quad (3.4)$$

$$L^{-1}[a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)] = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \quad (3.5)$$

gdzie symbole L i L^{-1} oznaczają odpowiednio transformaty: prostą i odwrotną Laplace'a. Z własności liniowości przekształcenia wynika, że przekształcenie Laplace'a spełnia zasadę superpozycji.

Przykład 3.3

Dla zilustrowania użyteczności twierdzenia o liniowości przekształcenia Laplace'a zastosujemy je do obliczenia transformaty funkcji $\cos(\omega t)$. Korzystając z definicji funkcji cosinusoidalnej otrzymuje się

$$L\{\cos(\omega t)\} = L\left\{\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right\}$$

Skorzystamy tutaj z wyprowadzonego wcześniej wzoru na transformatę funkcji wykładniczej. Podstawiając do odpowiedniego wzoru i stosując zasadę superpozycji otrzymuje się

$$L\{\cos(\omega t)\} = \frac{1}{2}L\{e^{j\omega t}\} + \frac{1}{2}L\{e^{-j\omega t}\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

3.2.2 Transformata pochodnej funkcji czasu

Transformata pochodnej funkcji czasu spełnia relację

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+) \quad (3.6)$$

W której $f(0^+)$ oznacza wartość początkową funkcji $f(t)$. Mnożenie funkcji $F(s)$ przez zmienną zespoloną s odpowiada w dziedzinie czasu różniczkowaniu funkcji. Stąd operator s nazywany jest operatorem różniczkowania.

3.2.3 Transformata całki funkcji czasu

Transformata całki funkcji czasu spełnia relację

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (3.7)$$

Pomnożenie funkcji $F(s)$ przez $1/s$ odpowiada w dziedzinie czasu całkowaniu funkcji. Stąd operator s^{-1} jest nazywany również operatorem całkowania.

3.2.4 Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości

Rozważmy przesunięcie argumentu funkcji operatorowej Laplace'a. Oznacza to, że zamiast transformaty $F(s)$ bierzemy pod uwagę funkcję $F(s-a)$. Twierdzenie o przesunięciu argumentu zmiennej zespolonej s mówi, że spełniona jest wówczas zależność

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) \quad (3.8)$$

Przesunięcie argumentu zespolonego s transformaty o wartość a odpowiada w dziedzinie czasu pomnożeniu funkcji oryginału przez funkcję wykładniczą e^{at} . Korzyści płynące z powyższej własności zademonstrujemy na przykładzie wyznaczania transformaty odwrotnej Laplace'a funkcji o przesuniętym argumencie s .

Przykład 3.4

Należy wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji $F(s)$ zadanej w postaci $F(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$

W rozwiązaniu problemu wykorzystamy ostatnią własność przekształcenia w odniesieniu do funkcji rozważanej w przykładzie 3.3. Zgodnie z wynikami uzyskanymi w tym przykładzie mamy $L\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ przy wartości $\omega = 3$.

Wprowadzając przesunięcie o wartość $a = 2$ w dziedzinie zmiennej zespolonej s uzyskuje się zadaną w tym przykładzie funkcję operatorową Laplace'a. Oznacza to, że jej transformata odwrotna odpowiada funkcji $e^{-at}\cos(\omega t)$. Stąd transformata odwrotna funkcji zadanej w przykładzie wynosi

$$L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right\} = e^{-2t}\cos(3t)$$

Twierdzenie o przesunięciu pozwoliło uzyskać transformatę odwrotną Laplace'a bez konieczności wykonywania operacji całkowania zadanej w definicji przekształcenia odwrotnego.

3.2.5 Przesunięcie w dziedzinie czasu

Transformata Laplace'a funkcji czasu o argumencie przesuniętym względem początku układu współrzędnych spełnia następującą zależność

$$L[f(t-a) \cdot 1(t-a)] = e^{-as} F(s) \quad (3.9)$$

Przesunięcie argumentu funkcji oryginalnej $f(t)$ w dziedzinie czasu $f(t) \rightarrow f(t-a) \cdot 1(t-a)$ odpowiada w dziedzinie częstotliwości pomnożeniu transformaty Laplace'a funkcji oryginalnej $F(s)$ (nieprzesuniętej) przez funkcję wykładniczą e^{-as} .

Własność powyższa jest często wykorzystywana przy obliczaniu transformat nietypowych funkcji jak również przy analizie obwodów o wymuszeniach impulsowych.

Tutaj zilustrujemy jej użyteczność przy obliczaniu transformaty impulsu Diraca, zwanej **funkcją impulsową Diraca**. Impulsem Diraca nazywamy wielkość $\delta(t)$ o następujących własnościach.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0 \\ \infty & \text{dla } t = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

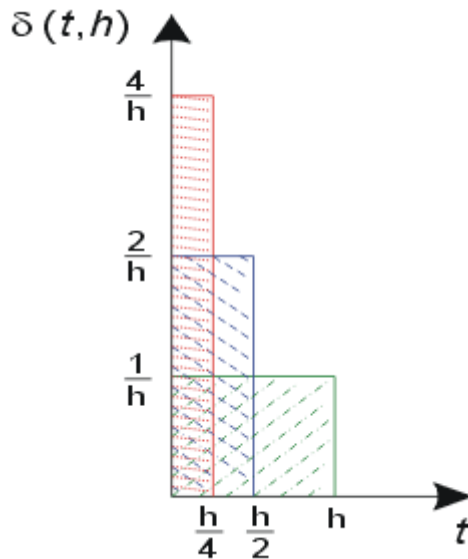
oraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3.11)$$

Impuls Diraca przyjmuje wartość nieskończoną tylko dla jednego punktu $t=0$ a w pozostałym zakresie ma wartość zerową. Wartość nieskończona stwarza pewne trudności obliczeniowe. Aby je przezwyciężyć wprowadza się jej aproksymację w postaci

$$\delta(t, h) = \frac{1}{h} [1(t) - 1(t-h)] \quad (3.12)$$

której wykres dla różnych wartości h przedstawiony jest na rys. 3.1.



Rys. 3.1. Aproxymacja funkcji Diraca przez funkcję impulsową

Im mniejsza wartość h tym bardziej funkcja aproksymująca zbliża się swym wyglądem do funkcji Diraca. W granicy przy $h \rightarrow 0$ funkcja aproksymująca jest zbieżna do rzeczywistej funkcji Diraca. Transformata Laplace'a dla funkcji aproksymującej jest dana w postaci

$$L\{\delta(t, h)\} = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sh} \right] \quad (3.13)$$

Biorąc pod uwagę, że funkcja Diraca jest granicą funkcji aproksymującej otrzymuje się

$$L\{\delta(t)\} = \lim_{h \rightarrow 0} L\{\delta(t, h)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sh} \right] = 1 \quad (3.14)$$

Transformata Laplace'a funkcji delty Diraca jest równa jedności.

3.2.6 Transformata splotu

Splot stanowi ważne pojęcie w teorii obwodów, gdyż za jego pośrednictwem określa się odpowiedzi czasowe obwodów rzeczywistych RLC. Splot dwu funkcji czasu $f_1(t)$ i $f_2(t)$ oznaczony w postaci $f_1(t) * f_2(t)$ jest zdefiniowany w następujący sposób

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \quad (3.15)$$

Transformata Laplace'a splotu jest równa zwykłemu iloczynowi transformat poszczególnych funkcji tworzących splot

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s) \quad (3.16)$$

Powyższa własność nosi w matematyce nazwę twierdzenia Borela. Zauważmy, że mnożenie splotowe dwu funkcji w dziedzinie czasu odpowiada zwykłemu mnożeniu ich transformat w dziedzinie częstotliwości. Własność ta jest szczególnie wygodna w analizie obwodów zarówno w stanie ustalonym jak i nieustalonym. Zamiast żmudnych operacji w dziedzinie czasu wykonuje się transformację Laplace'a funkcji czasowych a następnie wszystkie operacje wykonuje na transformatach.

3.3 Przykłady transformat Laplace'a

Obliczanie transformat Laplace'a polega na zastosowaniu wzoru (3.1) przy zadanej funkcji oryginału i przeprowadzeniu działań w nim określonych (całkowanie funkcji i wyznaczenie wartości na granicach całkowania). Przykłady wyznaczania transformaty Laplace'a dla funkcji impulsowej Diraca, wartości stałej, funkcji wykładniczej i cosinusoidalnej zostały zaprezentowane na początku tej lekcji.

Obliczanie transformat dla większości funkcji, zwłaszcza bardziej złożonych, nie jest procesem łatwym i dlatego w praktyce inżynierskiej najczęściej posługujemy się tablicami gotowych transformat Laplace'a, których źródło znaleźć można w wielu poradnikach matematycznych jak również podręcznikach poświęconych rachunkowi operatorowemu. W tablicy 3.1 zestawiono wybrane przykłady transformat Laplace'a szczególnie często wykorzystywanych przy rozwiązywaniu stanów nieustalonych w obwodach RLC. W dalszej części tej lekcji będą one wykorzystane do wyznaczania transformat odwrotnych Laplace'a (funkcji czasu odpowiadających transformatom).

Tablica 3.1 Tablica wybranych transformat Laplace'a

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
1(t)	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n, \quad n \in N$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$

Zawartość tablicy przedstawiająca zbiór funkcji czasu wraz z odpowiadającymi im transformacjami może służyć zarówno wyznaczaniu transformaty Laplace'a przy zadanej funkcji czasu jak i działaniu odwrotnemu, to jest wyznaczeniu oryginału na podstawie zadanej postaci transformaty. Przykładowo, jeśli transformata dana jest wzorem

$$F(s) = 15 \frac{5}{(s + 2)^2 + 5^2}$$

to odpowiadająca mu funkcja oryginału odczytana z tablicy 3.1 ma postać

$$f(t) = 15e^{-2t} \sin(5t).$$

W dalszej części rozważań podamy rozwinięcie tej metody pozwalające na wyznaczenie transformaty odwrotnej dla dowolnej postaci funkcji wymiernej $F(s)$ korzystając z tablicy 3.1.

3.4 Wyznaczanie odwrotnej transformaty Laplace'a

Aby wyznaczyć funkcję czasu $f(t)$ na podstawie danej transformaty należy dokonać odwrotnego przekształcenia Laplace'a. Zależność definicyjna określona wzorem (3.2) jest raczej bezużyteczna ze względu na konieczność całkowania złożonych zwykle funkcji, jak również na nieokreślone precyzyjnie granice całkowania (stała c w definicji nie jest dokładnie określona). Najczęściej korzysta się z pośrednich metod wyznaczania oryginału wynikających z własności samego przekształcenia. Niezależnie od metody zastosowanej do wyznaczenia oryginału, zakładamy, że transformata Laplace'a zadana jest w postaci wymiernej, czyli ilorazu dwu wielomianów zmiennej zespolonej s o współczynnikach rzeczywistych.

$$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.17)$$

Dodatkowo przyjmujemy, że stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika. Jeśli warunek powyższy byłby niespełniony, należy podzielić licznik przez mianownik tak, aby wymusić spełnienie tego warunku. Sposób postępowania w takim przypadku zilustrujemy na przykładzie.

Przykład 3.5

Dana jest transformata $F(s)$ o postaci

$$F(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 3s + 5}{s^2 + s + 4}$$

Dzieląc licznik przez mianownik według najwyższych potęg otrzymuje się rozwinięcie funkcji na sumę dwu składników potęgowych zmiennej s oraz funkcję wymierną spełniającą warunek, że stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika

$$F(s) = 2s - 1 + \frac{-4s + 9}{s^2 + s + 4}$$

Przy obliczaniu transformaty odwrotnej powyższej zależności tylko ostatni (złożony) składnik wymaga specjalnego postępowania. Składnik stały (-1) odpowiada funkcji impulsowej Diraca a funkcja $2s$ odpowiadać będzie wartości pochodnej funkcji Diraca pomnożonej przez dwa.

Istnieje wiele metod obliczania transformaty odwrotnej Laplace'a, wykorzystujących własności przekształcenia. Do najbardziej popularnych należą metoda residuów, rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste, metoda Heaviside'a oraz metoda bazująca na wykorzystaniu tablic transformat Laplace'a. Tutaj ograniczymy się do dwu najbardziej uniwersalnych metod: metody residuów oraz metody tablicowej wykorzystującej tablice transformat Laplace'a.

3.4.1 Metoda residuów

Załóżmy, że funkcja wymierna $F(s)$ zadana jest w postaci ilorazu dwu wielomianów zmiennej zespolonej s , określona wzorem (3.17)

$$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad (3.18)$$

Pierwiastki licznika funkcji transformaty są nazywane **zerami** a pierwiastki mianownika **biegunami**. Zauważmy, że bieguny są utożsamione z pierwiastkami równania charakterystycznego występującego w metodzie klasycznej lub wartościami własnymi macierzy stanu **A**. W **metodzie residuów** korzysta się z następującego twierdzenia.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $F(s)$ jest ilorazem dwu wielomianów $L(s)$ i $M(s)$, przy czym stopień wielomianu mianownika jest wyższy niż stopień wielomianu licznika ($n > m$) to oryginał funkcji $f(t)$ określony jest następującym wzorem

$$L^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{s=s_i} [F(s)e^{st}] \quad (3.19)$$

Sumowanie odbywa się po wszystkich biegunach funkcji operatorowej $F(s)$ niezależnie od tego, czy bieguny są pojedyncze czy wielokrotne.

Residuum funkcji $res[\circ]$ wyznacza się korzystając ze wzorów wynikających z własności przekształcenia Laplace'a. W przypadku bieguna l -krotnego wzór jest następujący

$$res_{s=s_i} [F(s)e^{st}] = \frac{1}{(l-1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{(l-1)}}{ds^{l-1}} [F(s)(s-s_i)^l e^{st}] \quad (3.20)$$

Szczególnie proste zależności otrzymuje się dla bieguna jednokrotnego s_i . W takim przypadku $l=1$ i wzór na residuum ulega znacznemu uproszczeniu

$$res_{s=s_i} [F(s)e^{st}] = \lim_{s \rightarrow s_i} [F(s)(s-s_i)e^{st}] \quad (3.21)$$

Wzór (3.19) wykorzystujący residuum funkcji jest stosowalny dla dowolnych biegunów funkcji $F(s)$, w tym biegunów rzeczywistych, zespolonych, jednokrotnych i wielokrotnych. Jednakże przy biegunach zespolonych obliczenie residuum jest procesem dość złożonym i metoda nie jest konkurencyjna względem innych.

Przykład 3.6

Jako pierwszy przykład rozpatrzmy wyznaczenie transformaty odwrotnej Laplace'a funkcji $F(s)$ danej wzorem

$$F(s) = \frac{5s}{(s+1)(s+3)}$$

Zadana funkcja ma dwa bieguny: $s_1 = -1$ oraz $s_2 = -3$. Wykorzystując wzór (3.19) otrzymuje się

$$f(t) = res_{s=s_1} [F(s)e^{st}] + res_{s=s_2} [F(s)e^{st}]$$

Na podstawie wzoru (3.21) otrzymuje się

$$f(t) = \lim_{s \rightarrow s_1} [F(s)(s+1)e^{st}] + \lim_{s \rightarrow s_2} [F(s)(s+3)e^{st}] = \frac{5 \cdot (-1)}{(-1+3)} e^{-1t} + \frac{5 \cdot (-3)}{(-3+1)} e^{-3t} = -2,5e^{-t} + 7,5e^{-3t}$$

Przykład 3.7

Funkcja operatorowa $F(s)$ dana jest wzorem

$$F(s) = \frac{10}{(s+3)^2(s+4)}$$

Występują 3 bieguny funkcji, z których jeden jest pojedynczy a dwa pozostałe równe sobie (jeden biegun podwójny): $s_1=s_2=-3$, $s_3=-4$. Wykorzystując wzory (3.20) i (3.21) otrzymuje się następujący schemat obliczeń

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{res}_{s=s_1=s_2} [F(s)e^{st}] + \operatorname{res}_{s=s_3} [F(s)e^{st}] = \\ &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow -3} \frac{d}{ds} [F(s)(s+3)^2 e^{st}] + \lim_{s \rightarrow -4} [F(s)(s+4)e^{st}] = \\ &= \lim_{s \rightarrow -3} \frac{d}{ds} \left[\frac{10}{s+4} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow -4} \left[\frac{10}{(s+3)^2} e^{st} \right] = 10[te^{-3t} - e^{-3t}] + 10e^{-4t} \end{aligned}$$

3.4.2 Metoda wykorzystująca tablice transformat

Metoda residuów jakkolwiek koncepcyjnie bardzo prosta staje się żmudna, jeśli bieguny układu są zespolone. Jest to szczególnie widoczne przy wysokich stopniach mianownika transmitancji operatorowej. W takich przypadkach zwykle korzystniejsze jest zastosowanie metody wykorzystującej tablice transformat Laplace'a.

Przy korzystaniu z tablic transformat należy poprzez elementarne przekształcenia doprowadzić daną transformatę do postaci standardowej znajdującej się w tablicy transformat (u nas tablica 3.1) a następnie odczytać z niej oryginał. Jest ona szczególnie wygodna jeśli bieguny układu są zespolone, gdyż w procesie przekształcania transformaty nie występuje potrzeba wyznaczania tych biegunów a wszystkie obliczenia dokonywane są na wartościach rzeczywistych. W praktyce przy stosowaniu tej metody transmitancję wyższych rzędów ($n > 2$) rozkłada się na składniki rzędu drugiego i wszystkie przekształcenia dokonuje na wielomianach rzędu pierwszego lub drugiego. Idę metody wyjaśnimy na przykładach liczbowych.

Przykład 3.8

Obliczyć transformatę odwrotną Laplace'a dla funkcji $F(s)$ danej w postaci

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Wobec zespolonych pierwiastków mianownika wykorzystamy tablicę transformat 3.1. Porównanie postaci danej transformaty z danymi zawartymi w tablicy wskazuje, że należy ją doprowadzić do postaci transformaty odpowiadającej funkcji sinusoidalnej tłumionej wykładniczo (wiersz 6 w tablicy). Kolejność czynności jest tu następująca

$$F(s) = \sqrt{4/3} \frac{\sqrt{3/4}}{(s+0,5)^2 + (\sqrt{3/4})^2}$$

Porównanie tej postaci z wierszem szóstym tablicy 3.1 pokazuje, że $\alpha = 0,5$ a $\omega = \sqrt{3/4}$. Funkcja oryginału jest więc określona wzorem

$$f(t) = \sqrt{4/3} e^{-0,5t} \sin(\sqrt{3/4}t)$$

Przykład 3.9

Jako przykład drugi rozpatrzmy transformatę trzeciego rzędu o biegunach zespolonych.

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+10)}$$

W tym przypadku przed zastosowaniem metody tablicowej należy najpierw rozłożyć funkcję zadaną na składniki o rzędach nie większych niż drugi. Ogólną postać rozkładu zapiszemy w następującej formie

$$F(s) = \frac{A}{(s+1)} + \frac{Bs+C}{(s^2+2s+10)}$$

Współczynniki A , B i C rozkładu należy wyznaczyć w taki sposób, aby obie strony zależności równały się sobie. Współczynnik A można wyznaczyć stosując metodę residuum, zgodnie z którą

$$A = \operatorname{res}_{s=-1} F(s) = \lim_{s \rightarrow -1} F(s)(s+1) = \frac{2}{9}$$

Wobec zespolonych wartości biegunów drugiego składnika rozkładu współczynniki B i C najlepiej jest wyznaczyć jako różnicę funkcji zadanej $F(s)$ i składnika pierwszego rzędu, to jest

$$\frac{Bs+C}{(s^2+2s+10)} = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+10)} - \frac{2/9}{(s+1)} = \frac{-2}{9} \frac{s+7/2}{s^2+2s+10}$$

Stąd funkcja zadana $F(s)$ może być zapisana w postaci

$$F(s) = \frac{2/9}{(s+1)} - \frac{2}{9} \frac{s+7/2}{s^2+2s+10}$$

Ze względu na liniowość przekształcenia Laplace'a transformata odwrotna sumy jest równa sumie transformat odwrotnych każdego składnika oddzielnie. Pierwszy składnik sumy odpowiada trzeciemu wierszowi tablicy 3.1. Stąd

$$L^{-1}\left\{\frac{2/9}{(s+1)}\right\} = \frac{2}{9}e^{-t}$$

Składnik drugi wymaga wykonania wstępnych przekształceń doprowadzających jego postać do wierszy szóstego i siódmego tablicy 3.1. W efekcie tych przekształceń otrzymuje się

$$-\frac{2}{9} \frac{s+7/2}{s^2+2s+10} = -\frac{2}{9} \frac{(s+1)+3\cdot 5/6}{(s+1)^2+3^2} = -\frac{2}{9} \frac{(s+1)}{(s+1)^2+3^2} - \frac{5}{27} \frac{3}{(s+1)^2+3^2}$$

Transformata odwrotna tego wyrażenia może być zatem zapisana w postaci

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{-\frac{2}{9} \frac{s+7/2}{s^2+2s+10}\right\} &= L^{-1}\left\{-\frac{2}{9} \frac{(s+1)}{(s+1)^2+3^2} - \frac{5}{27} \frac{3}{(s+1)^2+3^2}\right\} = \\ &= -\frac{2}{9}e^{-t} \cos(3t) - \frac{5}{27}e^{-t} \sin(3t) \end{aligned}$$

Stąd na mocy twierdzenia o liniowości transformata odwrotna Laplace'a zadanej funkcji $F(s)$ jest sumą transformat odwrotnych obu składników rozkładu

$$L^{-1}\{F(s)\} = \frac{2}{9}e^{-t} - \frac{2}{9}e^{-t} \cos(3t) - \frac{5}{27}e^{-t} \sin(3t)$$

3.5 Ćwiczenia

Ćwiczenie 3.1

Wyznaczyć transformatę odwrotną Laplace'a dla transmitancji operatorowej $F(s)$

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

Rozwiązanie

W rozważanym przypadku wszystkie bieguny są rzeczywiste i pojedyncze. Ich wartości są równe: $s_1=-1$, $s_2=-2$, $s_3=-5$. Najskuteczniejszą metodą pozostaje w tym przypadku metoda residuów, zgodnie z którą

$$f(t) = \text{res}_{s \rightarrow -1} F(s)e^{st} + \text{res}_{s \rightarrow -2} F(s)e^{st} + \text{res}_{s \rightarrow -5} F(s)e^{st}$$

Wartość funkcji residuum dla poszczególnych biegunów jest równa

$$\text{res}_{s \rightarrow -1} F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow -1} F(s)(s+1)e^{st} = \frac{1}{4}e^{-t}$$

$$\text{res}_{s \rightarrow -2} F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow -2} F(s)(s+2)e^{st} = -\frac{1}{3}e^{-2t}$$

$$\operatorname{res}_{s \rightarrow -5} F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow -5} F(s)(s+5)e^{st} = \frac{1}{12}e^{-5t}$$

Sumując poszczególne składniki otrzymujemy

$$f(t) = \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{12}e^{-5t}$$

Ćwiczenie 3.2

Wyznaczyć transformatę odwrotną Laplace'a dla transmitancji operatorowej $F(s)$

$$F(s) = \frac{s}{(s+2)(s+3)(s+5)^2}$$

Rozwiązanie

W rozważanym przypadku wszystkie bieguny są rzeczywiste, przy czym jeden z nich jest podwójny. Ich wartości są równe: $s_1=-2$, $s_2=-3$, $s_3=s_4=-5$. Najskuteczniejszą metodą pozostaje w tym przypadku metoda residuów, zgodnie z którą

$$f(t) = \operatorname{res}_{s \rightarrow -2} F(s)e^{st} + \operatorname{res}_{s \rightarrow -3} F(s)e^{st} + \operatorname{res}_{s \rightarrow -5} F(s)e^{st}$$

Wartość funkcji residuum dla poszczególnych biegunów jest równa

$$\operatorname{res}_{s \rightarrow -2} F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow -2} F(s)(s+2)e^{st} = -\frac{2}{9}e^{-2t}$$

$$\operatorname{res}_{s \rightarrow -3} F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow -3} F(s)(s+3)e^{st} = \frac{3}{4}e^{-3t}$$

$$\operatorname{res}_{s \rightarrow -5} F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow -5} \frac{d}{ds} (F(s)(s+5)^2 e^{st}) = -\frac{19}{36}e^{-5t} - \frac{5}{6}te^{-5t}$$

Sumując poszczególne składniki otrzymujemy

$$f(t) = -\frac{2}{9}e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{-3t} - \frac{19}{36}e^{-5t} - \frac{5}{6}te^{-5t}$$

Ćwiczenie 3.3

Wyznaczyć transformatę odwrotną Laplace'a dla transmitancji operatorowej

$$F(s) = \frac{s+2}{(s^2+s+10)}$$

Rozwiązanie

W rozważanym przypadku mamy do czynienia z biegunami zespolonymi, stąd przy wyznaczaniu transformaty odwrotnej Laplace'a wygodniejsza jest metoda wykorzystująca tablice transformat. W tym celu przekształcimy wyrażenie transformaty do postaci

$$F(s) = \frac{s+2}{(s^2+s+10)} = \frac{(s+0,5)+1,5 \cdot \sqrt{\frac{4}{39}} \cdot \sqrt{\frac{39}{4}}}{(s+0,5)^2 + \left(\sqrt{\frac{39}{4}}\right)^2}$$

Z porównania szóstego i siódmego wiersza w tablicy 3.1 z wyrażeniem opisującym zadaną transformatę otrzymuje się

$$f(t) = e^{-0,5t} \cos\left(\sqrt{\frac{39}{4}}t\right) + \frac{3}{\sqrt{39}} e^{-0,5t} \sin\left(\sqrt{\frac{39}{4}}t\right)$$

3.6 Zadania sprawdzające

Zadanie 3.1

Wyznaczyć transformatę odwrotną Laplace'a dla funkcji

$$F(s) = \frac{3s^2}{s^2 + 2s + 20}$$

Rozwiązanie

$$f(t) = 3\delta(t) - 6e^{-t}\cos\sqrt{19}t - \frac{54}{\sqrt{19}}e^{-t}\sin\sqrt{19}t$$

Zadanie 3.2

Wyznaczyć transformatę odwrotną Laplace'a dla funkcji

$$F(s) = \frac{2s^2}{(s+2)(s+5)(s+7)}$$

Rozwiązanie

$$f(t) = \frac{8}{15}e^{-2t} - \frac{25}{3}e^{-5t} + \frac{49}{5}e^{-7t}$$

Zadanie 3.3

Określić funkcję splotu $x(t)=x_1(t)*x_2(t)$ dwu sygnałów: $x_1(t)=e^{-2t}$, $x_2(t)=5e^{-t}\sin 3t$ wykorzystując własności transformaty Laplace'a.

Rozwiązanie

Transformata Laplace'a splotu

$$X(s) = X_1(s)X_2(s) = \frac{15}{(s+2)((s+1)^2+9)}$$

Splot w dziedzinie czasu jest równy transformacie odwrotnej Laplace'a funkcji $X(s)$

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-t}\cos 3t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin 3t$$

3.7 Testy samooceny

1) Charakter odpowiedzi czasowej obwodu (oscylacyjny czy periodyczny) zależy od

- a) położenia biegunów i zer transformaty Laplace'a
- b) tylko od położenia biegunów
- c) tylko od położenia zer
- d) od wartości współczynników zarówno licznika jak i mianownika

2) Bieguny funkcji transformaty Laplace'a są równe: $s_1=-2$, $s_2=-3$, $s_3=-5$. Charakter odpowiedzi czasowej (oryginału transformaty) jest

- a) oscylacyjny
- b) aperiodyczny zanikający z czasem
- c) aperiodyczny rosnący z czasem
- d) nie można wnioskować na podstawie położenia biegunów

3) Bieguny funkcji transformaty Laplace'a są równe: $s_1=-2$, $s_2=-3+j3$, $s_3=-3-j3$. Charakter odpowiedzi czasowej (oryginału transformaty) jest

- a) oscylacyjny tłumiony
- b) wyłącznie aperiodyczny zanikający z czasem
- c) wyłącznie aperiodyczny rosnący z czasem
- d) nie można wnioskować na podstawie położenia biegunów

4) Bieguny funkcji transformaty Laplace'a są równe: $s_1=-2j$, $s_2=2j$. Charakter odpowiedzi czasowej (oryginału transformaty) jest

- a) oscylacyjny tłumiony
- b) oscylacyjny niezaniikający z czasem
- c) aperiodyczny
- d) nie można wnioskować na podstawie położenia biegunów

5) Postać transformaty Laplace'a $F(s)=2/(s^2+2s+10)$ odpowiada w dziedzinie czasu funkcji oryginału

- a) $f(t)=2/3e^{-t}\sin 3t$
- b) $f(t)=2e^{-t}\sin 3t$
- c) $f(t)=2/3e^{-t}\cos 3t$
- d) $f(t)=2e^{-t}\cos 3t$

6) Postać transformaty Laplace'a $F(s)=3(s+1)/(s^2+2s+10)$ odpowiada w dziedzinie czasu funkcji oryginału

- a) $f(t)=3e^{-t}\sin 3t$
- b) $f(t)=3/2e^{-t}\sin 3t$
- c) $f(t)=3e^{-t}\cos 3t$
- d) $f(t)=2/3e^{-t}\cos 3t$

7) Funkcja $F(s)$ dana jest w postaci $F(s)=1/(s+5)+3/(s+2)-4/(s+7)$. Postać oryginału odpowiadająca tej transformacie jest równa

- a) $f(t)=e^{-5t}+3 e^{-2t}-4 e^{-7t}$
- b) a) $f(t)=e^{-5t}+2 e^{-2t}-7 e^{-7t}$
- c) a) $f(t)=e^{-5t}+3 e^{-2t}+4 e^{-7t}$
- d) $f(t)=e^{-5t}+2 e^{-3t}-7 e^{-4t}$

8) Funkcja czasu dana jest w postaci $f(t)=3e^{-6t}+4e^{2t}$. Jej transformata Laplace'a jest równa

- a) $-6/(s+3)+2/(s+4)$
- b) $3/(s+6)+4/(s+2)$
- c) $3/(s+6)+4/(s-2)$
- d) $3/(s+6)+4/(s+2)$

9) Funkcja czasu dana jest w postaci $f(t)=3e^{-2t}\cos(5t)$. Jej transformata Laplace'a jest równa

- a) $(6s+3)/(s^2+4s+29)$
- b) $(3s+6)/(s^2+2s+25)$
- c) $(3s+6)/(s^2+2s+29)$
- d) $(3s+6)/(s^2+4s+29)$ x

10) Splot dwu funkcji czasu $x_1(t)=e^{-3t}$ oraz $x_2(t)=5e^{-2t}$ jest równy

- a) $5e^{-3t}+5e^{-2t}$
- b) $-5e^{3t}+5e^{2t}$
- c) $-3e^{-t}+2e^{5t}$
- d) $-5e^{-3t}+5e^{-2t}$

3.8 Odpowiedzi do testów

1b

2b

3a

4b

5a

6c

7a

8c

9d

10d

4. Metoda operatorowa analizy stanów nieustalonych w obwodach elektrycznych

W metodzie operatorowej Laplace'a zastępuje się układ równań różniczkowych poprzez układ równań algebraicznych zmiennej zespolonej s . Jakkolwiek bezpośrednio zastosowanie transformacji Laplace'a do równań różniczkowych opisujących obwód elektryczny pozwala uzyskać opis obwodu w dziedzinie operatorowej, najlepszą metodą analizy obwodów w stanie nieustalonym przy zastosowaniu przekształcenia Laplace'a jest określenie transformat prądów i napięć bezpośrednio na podstawie obwodu bez konieczności układania równań różniczkowo-całkowych.

W tym rozdziale wprowadzimy metodę operatorową Laplace'a do analizy stanu nieustalonego w obwodzie RLC bezpośrednio na podstawie struktury obwodu bez stosowania równań różniczkowych. Podamy modele operatorowe rezystora, cewki i kondensatora. Zostanie wprowadzona metoda superpozycji stanów ustalonego i przejściowego rozdzielająca analizę obwodu w stanie ustalonym po przełączeniu od analizy w stanie przejściowym. Zaletą takiego podejścia jest znaczne uproszczenie obliczeń, zwłaszcza przy wystąpieniu źródeł sinusoidalnych.

4.1 Modele operatorowe elementów obwodu

Aby uzyskać bezpośrednio przetworzenie postaci oryginalnej obwodu na obwód w dziedzinie operatorowej Laplace'a należy każdy element obwodu zastąpić odpowiednim modelem w dziedzinie operatorowej. Tutaj podamy te modele dla trzech podstawowych elementów obwodu RLC.

4.1.1 Rezystor

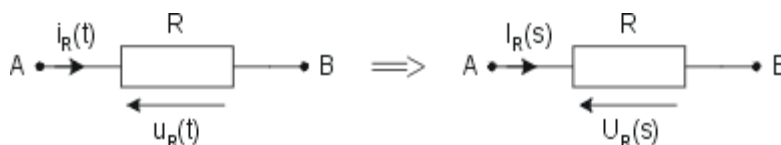
Prawo Ohma dotyczące wartości chwilowych prądu i napięcia dla rezystora można zapisać w postaci

$$u_R(t) = Ri_R(t) \quad (4.1)$$

Jest to równanie algebraiczne wiążące prąd i napięcie na zaciskach elementu. Stosując transformację Laplace'a do obu stron równania otrzymuje się

$$U_R(s) = RI_R(s) \quad (4.2)$$

Jak wynika z powyższej zależności impedancja operatorowa dla rezystora jest równa samej rezystancji $Z_R(s) = R$. Rys. 4.1 przedstawia model operatorowy rezystora, obowiązujący w dziedzinie zmiennej zespolonej s .



4.1.2 Cewka

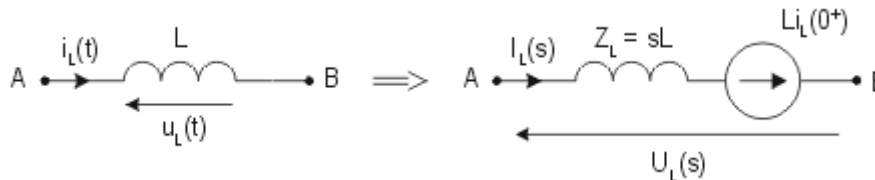
Dla uzyskania modelu operatorowego cewki idealnej zastosujemy przekształcenie Laplace'a bezpośrednio do równania opisującego cewkę w dziedzinie czasu

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (4.3)$$

i wykorzystamy własność dotyczącą transformaty pochodnej. W efekcie otrzymuje się

$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^+) \quad (4.4)$$

Powyższemu równaniu można przyporządkować schemat obwodowy cewki w dziedzinie operatorowej przedstawiony na rys. 4.2



Rys.4.2 Model operatorowy cewki idealnej

Jest to połączenie szeregowe impedancji operatorowej odpowiadającej cewce idealnej i źródła napięciowego. Zaciski A-B modelu odpowiadają zaciskom A-B w oryginalnym symbolu cewki. Impedancja $Z_L(s) = sL$ jest impedancją operatorową cewki a $Li_L(0^+)$ reprezentuje źródło napięcia stanowiące integralną część modelu.

4.1.3 Kondensator

Dla uzyskania modelu operatorowego kondensatora idealnego skorzystamy z jego opisu w dziedzinie czasu

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} \quad (4.5)$$

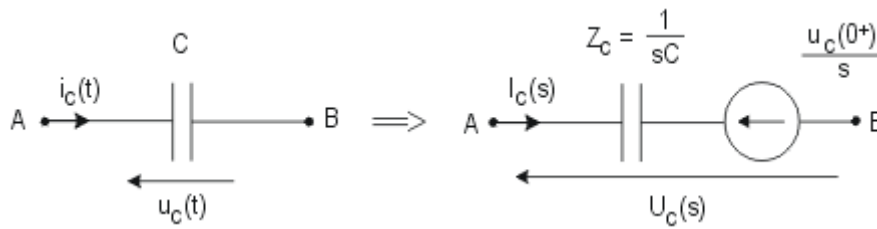
Zastosujemy przekształcenie Laplace'a do obu stron równania kondensatora. W efekcie takiej operacji otrzymuje się

$$I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0^+) \quad (4.6)$$

Przepiszemy tę zależność w postaci

$$U(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{u_C(0^+)}{s} \quad (4.7)$$

Równaniu powyższemu można przyporządkować schemat operatorowy kondensatora przedstawiony na rys. 4.3.



Rys. 4.3 Model operatorowy kondensatora idealnego

W modelu tym funkcja $Z_C = \frac{1}{sC}$ reprezentuje impedancję operatorową kondensatora a $\frac{u_C(0^+)}{s}$ - źródło napięciowe stanowiące integralną część modelu.

Modele operatorowe odpowiadające podstawowym elementom obwodu pozwalają przyporządkować każdemu obwodowi rzeczywistemu jego schemat zastępczy w dziedzinie transformant. W schemacie tym niezerowe warunki początkowe uwzględnione są poprzez dodatkowe źródła napięcia występujące w modelu operatorowym cewki i kondensatora. Taki sposób podejścia do analizy stanu nieustalonego jest wygodny ze względu na to, że umożliwia napisanie równań (algebraicznych, funkcyjnych) w postaci operatorowej bezpośrednio na podstawie schematu zastępczego bez potrzeby tworzenia równań różniczkowych opisujących obwód.

4.2 Prawa Kirchhoffa dla transformant

Dla schematu operatorowego obwodu słuszne są prawa Kirchhoffa, analogiczne do praw obowiązujących w dziedzinie czasu.

Prawo prądowe

Suma transformant prądów w dowolnym węźle obwodu elektrycznego jest równa zero

$$\sum_{k=1}^n I_k(s) = 0 \quad (4.8)$$

Prawo napięciowe

Suma transformant napięć gałęziowych w dowolnym oczku obwodu elektrycznego jest równa zero

$$\sum_{k=1}^n U_k(s) = 0 \quad (4.9)$$

W równaniach tych transformaty prądów i napięć zastąpiły wartości czasowe występujące w podstawowej wersji praw Kirchhoffa. Znaki prądów i napięć występujących w równaniach (4.8) i (4.9) ustalane są w identyczny sposób jak w przypadku podstawowej wersji praw Kirchhoffa podanych dla wielkości rzeczywistych.

4.3 Obliczenia prądów i napięć w stanie nieustalonym metodą operatorową

Obliczenia prądów i napięć w stanie nieustalonym obwodu metodą operatorową sprowadzać się będą do wyznaczenia transformaty odpowiedniej wielkości a następnie obliczenia transformaty odwrotnej Laplace'a dla określenia zmiennej w dziedzinie czasu. Do obliczenia transformat prądów i napięć można stosować wszystkie poznane dotąd metody analizy obwodów, w tym metodę równań Kirchhoffa, oczkową, potencjałów węzłowych, Thevenina i Nortona operujące transformatami Laplace'a zamiast wartościami zespolonymi czy wartościami w dziedzinie czasu (dla obwodu rezystancyjnego).

Podstawowymi zaletami metody operatorowej jest łatwość uwzględnienia niezerowych warunków początkowych (przez wprowadzenie źródeł napięciowych w modelu operatorowym) oraz sprowadzenie operacji różniczkowych do działań algebraicznych.

W ogólności rozwiązując stan nieustalony w obwodzie metodą operatorową należy wyróżnić kilka etapów.

1. Określenie warunków początkowych w obwodzie, poprzez wyznaczenie rozwiązania ustalonego obwodu przed przełączeniem i obliczenie wartości napięć na kondensatorach i prądów cewek w chwili $t = 0^-$, to jest $i_L(0^-)$ oraz $u_C(0^-)$
2. Określenie rozwiązania obwodu w stanie ustalonym po przełączeniu przy zastosowaniu metody symbolicznej z wykorzystaniem dowolnej metody analizy. Wynikiem jest postać czasowa rozwiązania ustalonego prądów cewek $i_{Lu}(t)$ i napięć kondensatorów $u_{Cu}(t)$. Przez założenie $t=0$ otrzymuje się wartości prądów i napięć w chwili początkowej, to jest $i_{Lu}(0^+)$ oraz $u_{Cu}(0^+)$.
3. Określenie rozwiązania obwodu w stanie przejściowym po przełączeniu przy zastosowaniu metody operatorowej. Dla otrzymania takiego rozwiązania należy wykonać następujące etapy:
 - utworzenie schematu obwodu dla składowej przejściowej poprzez wyeliminowanie źródeł zewnętrznych wymuszających (zwarcie źródeł napięcia i rozwarcie źródeł prądu); obwód rzeczywisty dla składowej przejściowej w dziedzinie czasu nie zawiera żadnych źródeł wymuszających
 - określenie warunków początkowych dla składowej przejściowej przy wykorzystaniu praw komutacji, zgodnie z którymi $x(0^-) = x_u(0^+) + x_p(0^+)$; z równania tego wynikają następujące wzory na warunki początkowe dla składowych przejściowych prądu cewki i napięcia kondensatora

$$i_{Lp}(0^+) = i_L(0^-) - i_{Lu}(0^+) \quad (4.10)$$

$$u_{Cp}(0^+) = u_C(0^-) - u_{Cu}(0^+) \quad (4.11)$$

- utworzenie schematu operatorowego obwodu w stanie przejściowym poprzez zastąpienie elementów rzeczywistych obwodu ich modelami operatorowymi dla składowej przejściowej i rozwiązanie obwodu względem poszukiwanych prądów i napięć operatorowych
- wyznaczenie transformaty odwrotnej Laplace'a dla poszukiwanych wielkości przejściowych określonych w punkcie poprzednim; w wyniku otrzymuje się $i_{Lp}(t)$ oraz $u_{Cp}(t)$.

4. Rozwiązanie obwodu w stanie nieustalonym jest sumą składowej ustalonej oraz składowej przejściowej, to jest

$$i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) \quad (4.12)$$

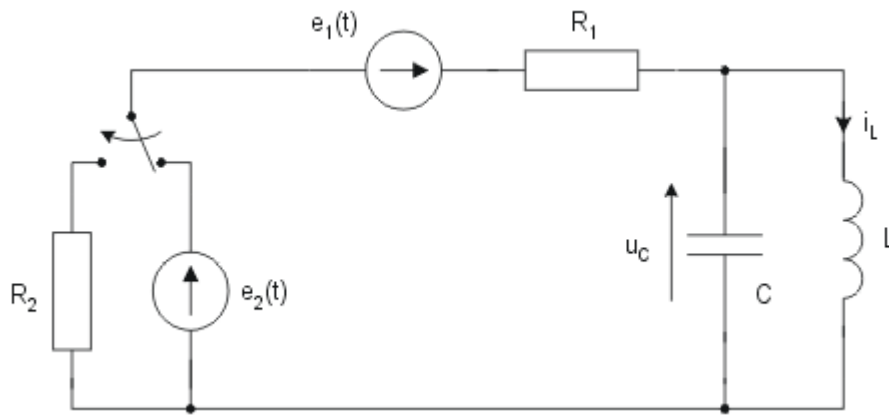
$$u_C(t) = u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t) \quad (4.13)$$

Składowa przejściowa zanika z czasem do zera i pozostaje jedynie składowa ustalona określająca przebieg wielkości w stanie ustalonym. Taka metodyka rozwiązania stanów nieustalonych przy zastosowaniu transformacji Laplace'a nosi nazwę metody **superpozycji stanów**, gdyż rozdziela w sposób jawny stan ustalony od stanu przejściowego. Jest szczególnie zalecana przy wymuszeniach sinusoidalnych, choć obowiązuje również dla obwodów prądu stałego. Zaletą takiego podejścia jest jej uniwersalność i stosowalność do każdego obwodu liniowego RLC niezależnie od rodzaju wymuszenia (wymuszenia stałe lub sinusoidalne mają jedynie wpływ na stan ustalony i są wyeliminowane przy rozwiązywaniu stanu przejściowego).

Należy podkreślić, że rozbitcie stanu nieustalonego na ustalony i przejściowy jest zalecane jedynie przy istnieniu wymuszeń sinusoidalnych w obwodzie po przełączeniu. Jeśli źródła takie nie występują schemat operatorowy może dotyczyć obwodu całkowitego, bez rozbijania go na schemat dla składowej ustalonej i przejściowej. W takim przypadku pozostawia się zewnętrzne źródła wymuszające w obwodzie przyjmując ich model operatorowy, czyli zastępując postać czasową źródła (wartość stała A przy wymuszeniu stałym) przez funkcję $\frac{A}{s}$. Warunki początkowe również nie podlegają modyfikacji, co oznacza, że $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ oraz $u_C(0^+) = u_C(0^-)$.

Przykład 4.1

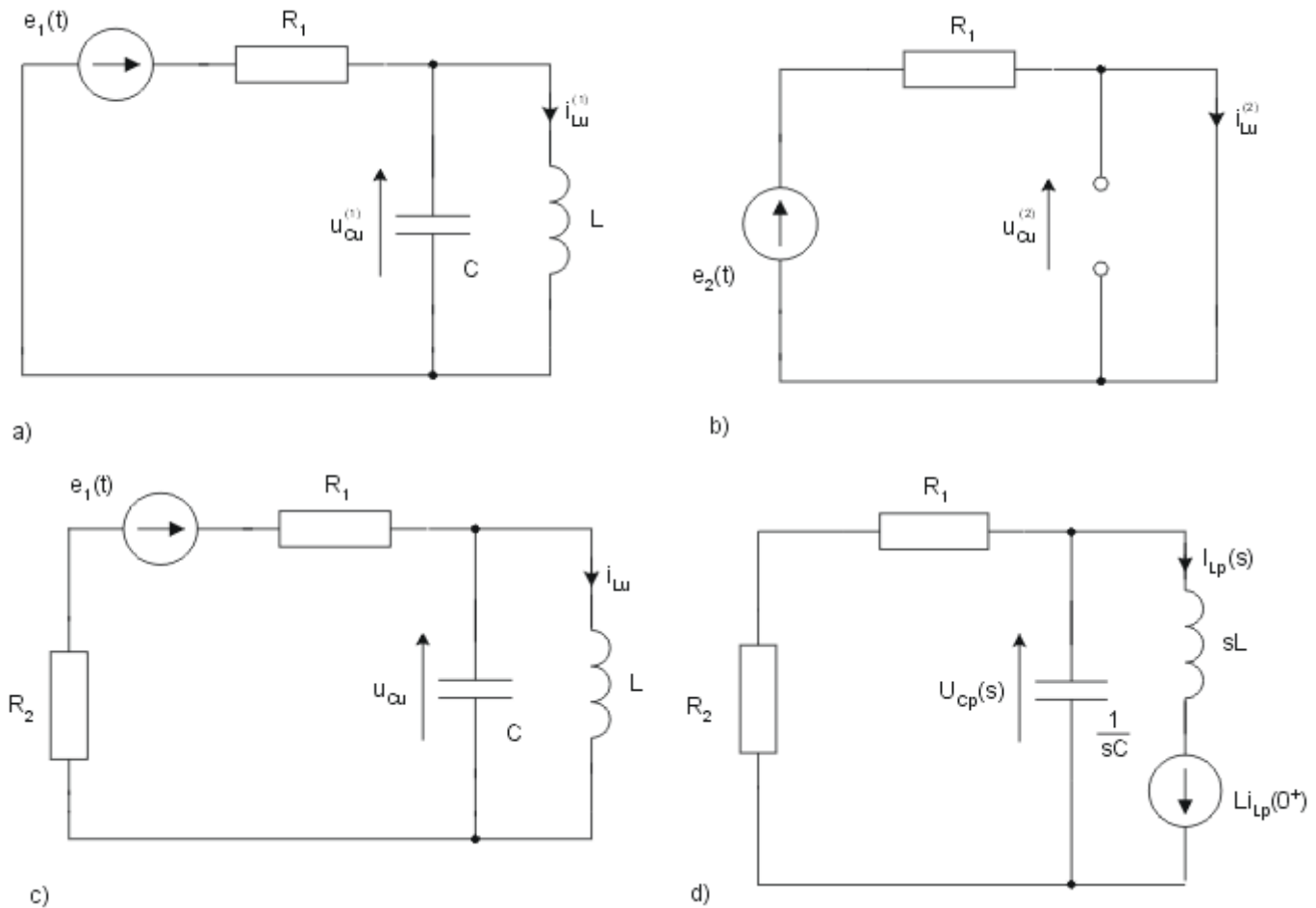
Wyznaczyć przebieg czasowy napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym w obwodzie z rys. 4.4 po przełączeniu. Dane liczbowe parametrów obwodu są następujące: $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $L = 1H$, $C = 1F$, $e_2(t) = 10V$. Źródło wymuszające sinusoidalne dane jest w następującej postaci $e_1(t) = 5\sqrt{2} \sin(t + \pi/4) V$.



Rys. 4.4. Schemat obwodu do przykładu 4.10.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu problemu wyznaczmy najpierw warunki początkowe w obwodzie rozwiązując stan ustalony przed przełączeniem. Ponieważ przed przełączeniem w obwodzie występowały dwa źródła: stałe i sinusoidalne w obliczeniu warunków początkowych (stan ustalony przed przełączeniem) należy zastosować metodę superpozycji źródeł.



Rys. 4.5 Schematy obwodu: a) w stanie ustalonym przed przełączeniem (źródło sinusoidalne), b) w stanie ustalonym przed przełączeniem (źródło stałe), c) w stanie ustalonym po przełączeniu, d) schemat operatorowy dla składowej przejściowej

Schemat obwodu w stanie ustalonym przed przełączeniem przy wymuszeniu sinusoidalnym przedstawiony jest na rys. 4.5a. Wobec rezonansu równoległego w gałęzi LC prąd wydawany przez źródło jest równy zeru a napięcie na tej gałęzi jest równe napięciu źródła. Stąd

$$u_{Cu}^{(1)}(t) = 5\sqrt{2} \sin(t + \pi / 4)$$

Prąd cewki (wartość skuteczna zespolona) dany jest wzorem

$$I_{Lu}^{(1)} = \frac{5e^{j\pi/4}}{j1} = 5e^{-j\pi/4}$$

co odpowiada postaci czasowej

$$i_{Lu}^{(1)}(t) = 5\sqrt{2} \sin(t - \pi / 4)$$

Uwzględniając źródło stałe $e_2(t)$ uzyskuje się znaczne uproszczenie obwodu (cewka dla prądu stałego w stanie ustalonym stanowi zwarcie a kondensator przerwę) jak to przedstawiono na rys. 4.5b. Rozwiązanie na prąd cewki i napięcie kondensatora ma więc postać:

$$u_{Cu}^{(2)}(t) = 0$$

$$i_{Lu}^{(2)}(t) = \frac{10}{1} = 10$$

Dokonyjąc superpozycji obu rozwiązań otrzymuje się

$$i_{Lu}(t) = i_{Lu}^{(1)}(t) + i_{Lu}^{(2)}(t) = 10 + 5\sqrt{2} \sin(t - \pi / 4)$$

$$u_{Cu}(t) = u_{Cu}^{(1)}(t) + u_{Cu}^{(2)}(t) = 5\sqrt{2} \sin(t + \pi / 4)$$

Stąd warunki początkowe są następujące: $u_C(0^-) = 5$, $i_L(0^-) = 5$.

Po przełączeniu w obwodzie pozostaje jedynie źródło sinusoidalne $e_1(t)$. Schemat obwodu dla tego wymuszenia pokazany jest na rys. 4.5c. Z analizy tego obwodu wynika następująca procedura rozwiązania. Wobec rezonansu równoległego w gałęzi LC prąd wydawany przez źródło jest równy zeru a napięcie na tej gałęzi jest równe napięciu źródła. Stąd

$$u_{Cu}(t) = 5\sqrt{2} \sin(t + \pi / 4)$$

Prąd cewki (wartość skuteczna zespolona) dany jest wzorem

$$I_{Lu} = \frac{5e^{j45^\circ}}{j1} = 5e^{-j\pi/4}$$

co odpowiada postaci czasowej

$$i_{Lu}(t) = 5\sqrt{2} \sin(t - \pi/4)$$

Stan początkowy dla składowej ustalonej prądu cewki i napięcia kondensatora przyjmuje więc następujące wartości:

$$u_{Cu}(0^+) = 5$$

oraz

$$i_{Lu}(0^+) = -5$$

Warunki początkowe dla składowej przejściowej prądu i napięcia są zatem równe:

$$u_{Cp}(0^+) = u_C(0^-) - u_{Cu}(0^+) = 0$$

$$i_{Lp}(0^+) = i_L(0^-) - i_{Lu}(0^+) = 10$$

Schemat operatorowy obwodu przedstawiono na rys. 4.5d (źródło wewnętrzne przy kondensatorze nie występuje, bo $u_{Cp}(0^+) = 0$). Zastosowanie metody potencjałów węzłowych do wyznaczenia postaci operatorowej rozwiązania prowadzi do wyniku

$$U_{Cp}(s) = \frac{-\frac{10}{s}}{s + \frac{1}{s} + 0,5} = \frac{-10}{s^2 + 0,5s + 1}$$

Wobec zespolonych wartości własnych (pierwiastków mianownika transformaty napięcia) w wyznaczaniu oryginału zastosujemy metodę wykorzystującą tablice transformat. W związku z powyższym transformatę przedstawimy w postaci przekształconej

$$U_{Cp}(s) = \frac{-10}{s^2 + 0,5s + 1} = -\frac{\left(\sqrt{\frac{15}{16}}\right) \cdot 10 \cdot \sqrt{\frac{16}{15}}}{(s + 0,25)^2 + \left(\sqrt{\frac{15}{16}}\right)^2} = -10,33 \frac{\left(\sqrt{\frac{15}{16}}\right)}{(s + 0,25)^2 + \left(\sqrt{\frac{15}{16}}\right)^2}$$

Powyższej funkcji operatorowej można przyporządkować następującą postać czasową (patrz wiersz szósty tablicy 12.1)

$$u_{Cp}(t) = -10,33e^{-0,25t} \sin\left(\sqrt{\frac{15}{16}}t\right)$$

Rozwiązanie całkowite określające napięcie kondensatora jest sumą składowej ustalonej i przejściowej

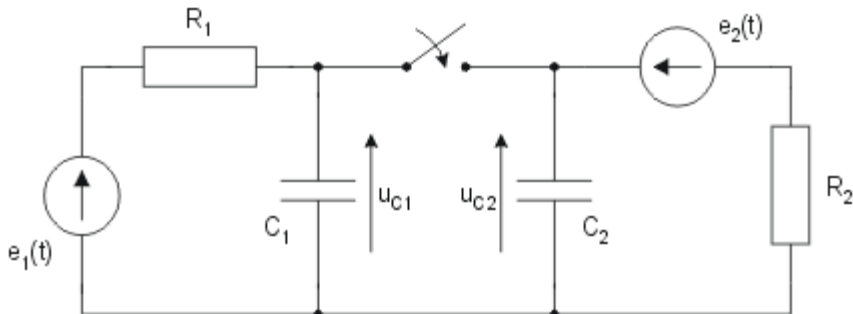
$$u_C(t) = u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t) = 5\sqrt{2} \sin(t + \pi/4) - 10,33e^{-0,25t} \sin\left(\sqrt{\frac{15}{16}}t\right)$$

Składowa przejściowa zanika z biegiem czasu ze stałą czasową $\tau = 4$ i po około 5 stałych czasowych pozostaje jedynie składowa ustalona sinusoidalna.

4.4 Ćwiczenia

Ćwiczenie 4.1

Określić przebieg napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym po przełączeniu metodą operatorową w obwodzie przedstawionym na rys. 4.6. Przyjąć następujące parametry obwodu: $R_1=50\Omega$, $R_2=100\Omega$, $C_1=10\mu\text{F}$, $C_2=20\mu\text{F}$, $e_1(t) = 50\text{V}$, $e_2(t) = 100\text{V}$.



Rys. 4.6 Schemat obwodu do zadania 4.1

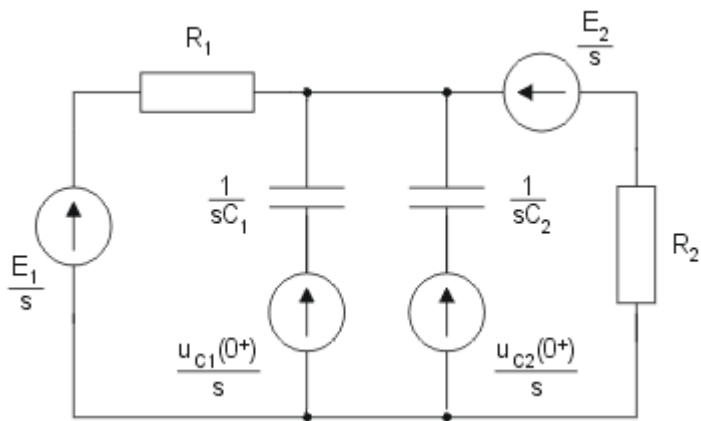
Rozwiązanie

Warunki początkowe:

$$u_{C1}(0^-) = e_1 = 50$$

$$u_{C2}(0^-) = e_2 = 100$$

Ze względu na wymuszenie stałe nie zachodzi potrzeba stosowania metody superpozycji stanu. Schemat operatorowy obwodu w stanie nieustalonym przedstawiony jest na rys. 4.7



Rys. 4.7 Schemat operatorowy obwodu

Z metody potencjałów węzłowych zastosowanych do obwodu z rys. 4.7 wynika

$$U_C(s) = \frac{\frac{50}{50s} + \frac{100}{100s} + 10^{-5}u_{C1}(0^+) + 2 \cdot 10^{-5}u_{C2}(0^+)}{1/50 + 1/100 + s10^{-5} + 2s10^{-5}}$$

$$U_C(s) = \frac{250s + 2,5 \cdot 10^5}{3s(s + 1000)}$$

Bieguny układu:

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = -1000$$

Transformata odwrotna Laplace'a

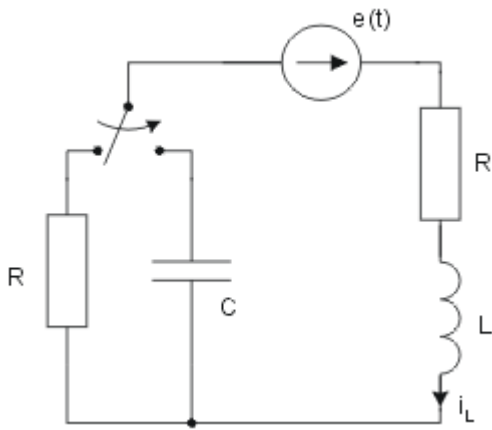
$$u_C(t) = \lim_{s \rightarrow 0} U_C(s)se^{st} + \lim_{s \rightarrow -1000} U_C(s)(s + 1000)e^{st}$$

$$u_C(t) = \frac{250}{3} + \frac{50}{3}e^{-1000t}$$

W stanie ustalonym przy $t \rightarrow \infty$ mamy $u_{Cu}(t) = \frac{250}{3}$ V. Zauważmy, że w wyniku przełączenia napięcia na kondensatorach w chwili $t=0$ uległy skokowej zmianie (w obwodzie powstało oczko złożone z samych kondensatorów).

Ćwiczenie 4.2

Określić prąd cewki w stanie nieustalonym po przełączeniu w obwodzie przedstawionym na rys. 4.8. Przyjąć następujące wartości parametrów obwodu: $R=2\Omega$, $L=1$ H, $C=1/4$ F, $e(t) = 10\sqrt{2} \sin(4t + 45^\circ)$. Zakładamy, że przełączanie zapewnia ciągłość prądu cewki podlegającej przełączeniu.



Rys. 4.8. Schemat obwodu do zadania 4.2

Rozwiązanie

1) Warunki początkowe w obwodzie:

$$\omega = 4$$

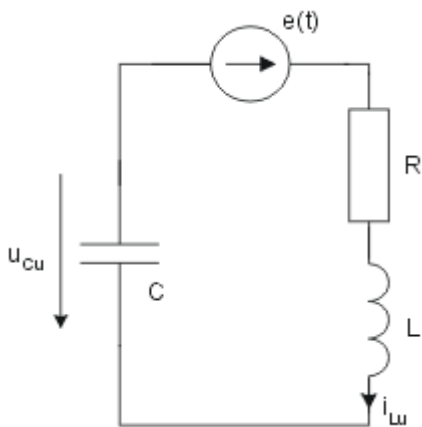
$$I_L = \frac{10e^{j45^\circ}}{4 + j4} = \frac{2,5}{\sqrt{2}}$$

$$i_L(t) = 2,5 \sin(4t)$$

$$i_L(0^-) = 0$$

$$u_C(0^-) = 0$$

2) Stan ustalony po przełączeniu w obwodzie (rys. 4.9)



Rys. 4.9. Schemat obwodu w stanie ustalonym po przełączeniu

$$I_{Lu} = \frac{10e^{j45^\circ}}{2 + j4 - j1} = 2,77e^{-j11,31^\circ}$$

$$U_{Cu} = -j1 \cdot I_{Lu} = 2,77e^{-j101,31^\circ}$$

$$i_{Lu}(t) = 2,77\sqrt{2} \sin(4t - 11,31^\circ)$$

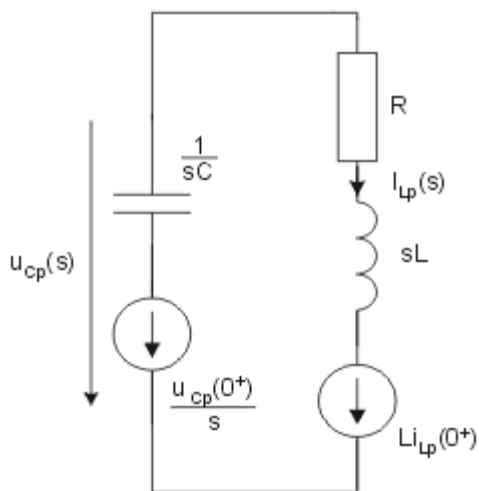
$$u_{Cu}(t) = 2,77\sqrt{2} \sin(4t - 101,31^\circ)$$

$$i_{Lu}(0^+) = -0,76$$

$$u_{Cu}(0^+) = -3,84$$

3) Stan przejściowy po przełączeniu

Schemat operatorowy przedstawiony jest na rys. 4.10.



Rys. 4.10 Schemat operatorowy obwodu po przełączeniu

Warunki początkowe dla stanu przejściowego:

$$i_{Lp}(0^+) = i_L(0^-) - i_{Lu}(0^+) = 0,76$$

$$u_{Cp}(0^+) = u_C(0^-) - u_{Cu}(0^+) = 3,84$$

Postać operatorowa rozwiązania

$$I_{Lp}(s) = \frac{Li_{Lp}(0^+) - \frac{u_{Cp}(0^+)}{s}}{s + 2 + \frac{4}{s}} = \frac{0,76s - 3,84}{s^2 + 2s + 4}$$

Wobec zespolonych biegunów zastosujemy metodę tablicową określenia transformaty odwrotnej. Zgodnie z nią

$$I_{Lp}(s) = \frac{0,76(s+1) - 4,6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3}}{(s+1)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$i_{Lp}(t) = 0,76e^{-t} \cos(\sqrt{3}t) - 2,67e^{-t} \sin(\sqrt{3}t)$$

Rozwiązanie całkowite na prąd cewki w stanie nieustalonym

$$i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) = 2,77\sqrt{2} \sin(4t - 11,31^\circ) + 0,76e^{-t} \cos(\sqrt{3}t) - 2,67e^{-t} \sin(\sqrt{3}t)$$

4.5 Zadania sprawdzające

Zadanie 4.1

Obliczyć prąd $i_L(t)$ i napięcie $u_C(t)$ w stanie nieustalonym po przełączeniu. Dane elementów:

$$u_0 = 15 \text{ V}$$

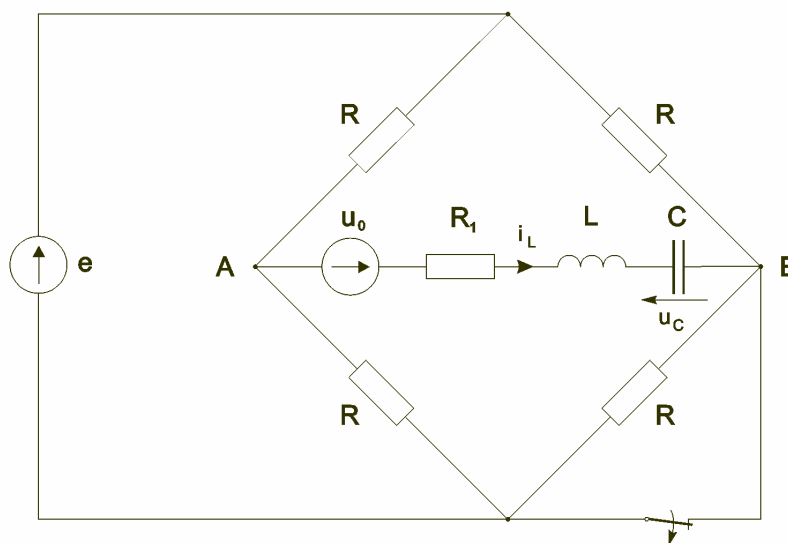
$$e(t) = \frac{50}{3} \sqrt{2} \sin(t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$R = \frac{5}{3} \Omega$$

$$R_1 = \frac{5}{6} \Omega$$

$$C = 1 \text{ F}$$

$$L = 1 \text{ H}$$



Rys. 4.11. Schemat obwodu do zadania 4.1

Rozwiązanie

$$i_L(t) = 5/3 e^{-0,5t} + 10/3 e^{-2t}$$

$$u_C(t) = 15 - 10/3 e^{-0,5t} - 10/6 e^{-2t}$$

Zadanie 4.2

Określić przebieg napięcia na kondensatorze w układzie po przełączeniu. Dane elementów:

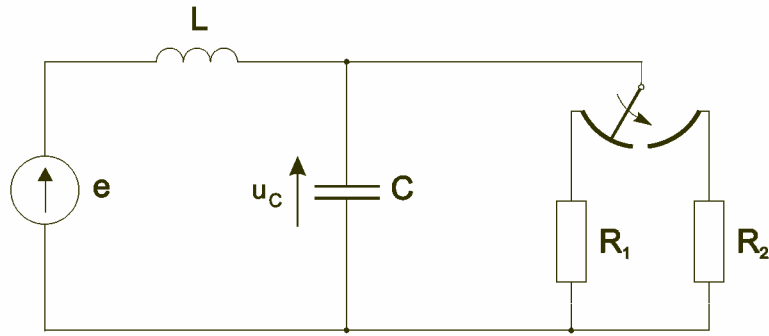
$$e = 10 \text{ V}$$

$$R_1 = 5 \Omega$$

$$R_2 = 50 \Omega$$

$$L = 1 \text{ H}$$

$$C = 1000 \mu\text{F}$$



Rys. 4.12. Schemat obwodu do zadania 4.2

Rozwiązanie

$$u_C(t) = 10 + 60e^{-10t} \sin 30t$$

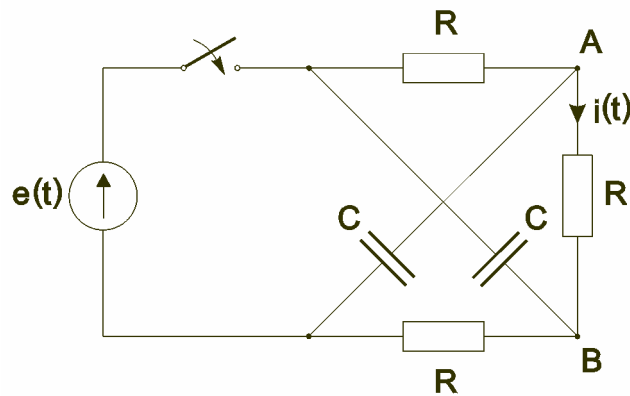
Zadanie 4.3

Określić przebieg prądu $i(t)$ w układzie po załączeniu napięcia. Warunki początkowe zerowe. Dane elementów:

$$e(t) = t \cdot 1(t)$$

$$R = 100 \Omega$$

$$C = 10^4 \mu\text{F}$$



Rys. 4.13. Schemat obwodu do zadania 4.3

Rozwiązanie

$$i(t) = -\frac{1}{300} (4/3 - 4/3e^{-3t} - t)$$

4.6 Testy samooceny

- 1) Rozwiązanie operatorowe obwodu $X(s)$ dane jest w postaci $X(s) = \frac{3}{s+2}$. Odpowiadający jej oryginał ma postać
- $x(t) = e^{-2t}$
 - $x(t) = 3e^{-2t}$
 - $x(t) = 3e^{2t}$
 - $x(t) = 3\delta(t) + e^{-2t}$
- 2) Rozwiązanie operatorowe obwodu $X(s)$ dane jest w postaci $X(s) = \frac{2s}{s+5}$. Odpowiadający jej oryginał ma postać
- $x(t) = e^{-5t} + e^{-2t}$
 - $x(t) = 2e^{-5t}$
 - $x(t) = 5e^{-2t}$
 - $x(t) = 2\delta(t) - 10e^{-5t}$
- 3) Rozwiązanie operatorowe obwodu $X(s)$ dane jest w postaci $X(s) = \frac{2s}{s^2 + 6s + 10}$. Odpowiadający jej oryginał ma postać
- $x(t) = 2e^{-3t} \cos(t) - 6e^{-3t} \sin(t)$
 - $x(t) = 2e^{-3t} \cos(t) + 6e^{-3t} \sin(t)$
 - $x(t) = e^{-3t} \cos(t) + 6e^{-3t} \sin(t)$
 - $x(t) = 2e^{-3t} \sin(t) - 6e^{-3t} \cos(t)$
- 4) Model operatorowy kondensatora $C=0.1F$ naładowanego do wartości początkowej $u_C(0)=2V$ zawiera:
- połączone szeregowo impedancja $1/(10s)$ oraz źródło napięcia o wartości $2/s$
 - połączone równolegle impedancja $1/(10s)$ oraz źródło napięcia o wartości $2/s$
 - połączone szeregowo impedancja $10/s$ oraz źródło napięcia o wartości $2/s$
 - połączone równolegle impedancja $10/s$ oraz źródło napięcia o wartości $2/s$
- 5) Model operatorowy cewki $L=2H$ przez którą płynie prąd początkowy $i_L(0)=3A$ zawiera:
- połączone szeregowo impedancja 2 oraz źródło napięcia o wartości 3
 - połączone szeregowo impedancja $2s$ oraz źródło napięcia o wartości 3
 - połączone szeregowo impedancja $2s$ oraz źródło napięcia o wartości 6
 - impedancja $2s$
- 6) Rezystor $R=2\Omega$ połączono równolegle z kondensatorem $C=0.2F$ naładowanym wstępnie do napięcia 10 . Napięcie na kondensatorze w stanie nieustalonym można opisać wzorem
- $u_C(t) = 10e^{-2,5t}$
 - $u_C(t) = 10e^{-0,4t}$
 - $u_C(t) = 10e^{-10t}$
 - $u_C(t) = -10e^{-2,5t}$
- 7) Źródło napięcia stałego $e(t)=10V$ dołączono do szeregowego połączenia rezystora $R=5\Omega$ i kondensatora $C=0.1F$ naładowanym wstępnie do napięcia $5V$. Napięcie na kondensatorze w stanie nieustalonym można opisać wzorem (wyniki wyrażone w woltach)

a) $u_C(t) = 10 + 5e^{-2t}$

b) $u_C(t) = 10 - 5e^{-2t}$

c) $u_C(t) = 5e^{-2t}$

d) $u_C(t) = 10 - 5e^{2t}$

8) Obwód RLC zawiera cewkę o $L=1\text{H}$ połączoną szeregowo z kondensatorem o $C=0.01\text{F}$ i dwoma rezystorami równoległymi $R_1=3\Omega$ i $R_2=2\Omega$. Określić charakter stanu nieustalonego w obwodzie

- a) oscylacyjny
- b) aperiodyczny
- c) aperiodyczny krytyczny

9) Obwód RLC jest połączeniem szeregowym kondensatora o $C=1\text{F}$ i dwu elementów w postaci cewki $L=1\text{H}$ i rezystora $R=1\Omega$ połączonych równolegle. Obwód zasilona napięciem stałym E . Jaki będzie charakter prądu źródła w stanie nieustalonym?

- a) aperiodyczny
- b) nie można jednoznacznie określić
- c) oscylacyjny

10) W obwodzie szeregowym RLC zawierającym jedynie elementy pasywne może nastąpić narastanie do nieskończoności odpowiedzi w stanie nieustalonym?

- a) tak
- b) nie
- c) to zależy od warunków początkowych
- d) to zależy od wartości elementów

4.7 Odpowiedzi do testów

1b

2d

3a

4c

5c

6a

7b

8a

9c

10b

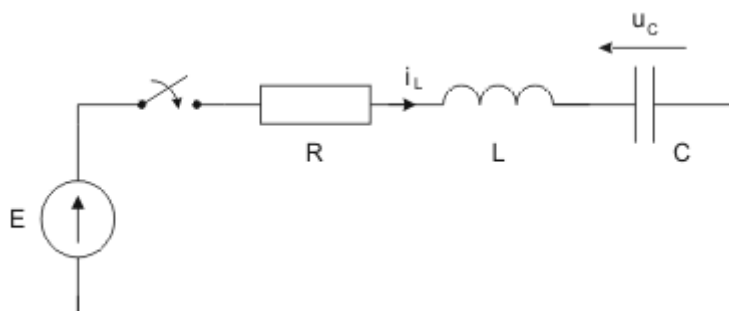
5. Stan nieustalony w obwodzie RLC przy załączeniu napięcia stałego

Jednym z najważniejszych przypadków stanu nieustalonego są zjawiska powstające w obwodzie RLC zawierającym jednocześnie cewkę i kondensator. W obwodzie takim powstają godne uwagi zjawiska, które znalazły ogromne zastosowanie w wielu dziedzinach elektroniki i elektrotechniki.

W tym rozdziale zostanie przedstawiona analiza stanu nieustalonego w obwodzie szeregowym RLC. Analiza zostanie przeprowadzona przy zastosowaniu rachunku operatorowego Laplace'a. W zależności od wartości rezystancji mogą powstać trzy przypadki rozwiązania: przypadek oscylacyjny, gdy aktualna rezystancja obwodu jest mniejsza od krytycznej, przypadek aperiodyczny krytyczny, gdy ta rezystancja jest równa rezystancji krytycznej oraz przypadek aperiodyczny, gdy rezystancja obwodu jest większa od krytycznej. Szczególnie interesujący jest przypadek oscylacyjny, w którym przy zasilaniu obwodu napięciem stałym powstają drgania sinusoidalne o tłumionej amplitudzie. Przy rezystancji równej zero w obwodzie powstają drgania sinusoidalne niegasnące.

5.1 Równanie operatorowe obwodu

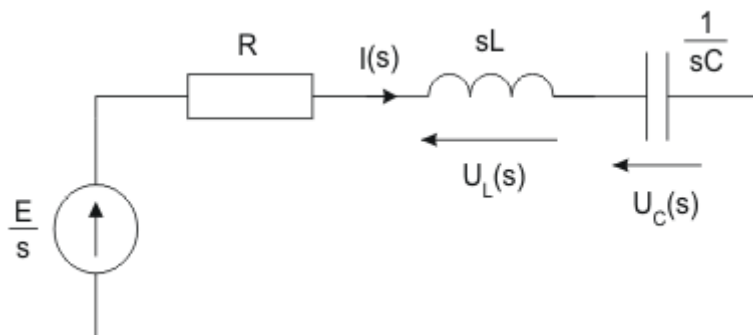
Rozpatrzmy załączenie napięcia stałego E do gałęzi szeregowej RLC przedstawionej na rys. 5.1.



Rys. 5.1. Załączenie napięcia stałego do obwodu szeregowego RLC

Wobec zerowych warunków początkowych (brak wymuszenia w obwodzie przed przełączeniem) mamy $u_C(0^-) = 0$, $i_L(0^-) = 0$.

Stan ustalony w obwodzie przy wymuszeniu stałym nie wymaga specjalnych obliczeń, gdyż wobec przerwy, jaką reprezentuje kondensator, prąd w obwodzie nie płynie ($i_{Lu}(t) = 0$) a napięcie na kondensatorze jest równe napięciu zasilającemu $u_{Cu}(t) = E$.



Rys. 5.2 Schemat operatorowy obwodu RLC w stanie nieustalonym

Schemat operatorowy obwodu w stanie nieustalonym przedstawiony jest na rys. 5.2. Warunki początkowe napięcia kondensatora i prądu cewki określają równania

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \quad (5.1)$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \quad (5.2)$$

Z prawa napięciowego Kirchhoffa zastosowanego do obwodu wynika następująca postać operatorowa prądu cewki

$$I(s) = \frac{E/s}{sL + R + 1/sC} = \frac{E/L}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (5.3)$$

Dla wyznaczenia transformaty odwrotnej należy obliczyć pierwiastki mianownika transmitancji, czyli

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (5.4)$$

W wyniku rozwiązania tego równania otrzymuje się dwa pierwiastki (bieguny układu)

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (5.5)$$

$$s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (5.6)$$

Z postaci wzoru opisującego bieguny wynika, że w zależności od znaku funkcji podpierwiastkowej możliwe są 3 przypadki rozwiązania.

- Przypadek **aperiodyczny** dla $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Przy spełnieniu tego warunku oba bieguny są rzeczywiste i ujemne. Charakter zmian prądu w obwodzie w stanie przejściowym jest aperiodyczny (nieokresowy) zanikający do zera w sposób wykładniczy.
- Przypadek **aperiodyczny krytyczny** występujący dla $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Przy spełnieniu tego warunku oba bieguny są rzeczywiste i równe sobie. Charakter zmian prądu w obwodzie w stanie przejściowym jest również aperiodyczny,

podobnie jak w przypadku pierwszym, ale czas dochodzenia do wartości ustalonych (z określoną tolerancją) jest najkrótszy z możliwych.

- Przypadek **oscylacyjny** (periodyczny) występujący dla $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Przy spełnieniu tego warunku oba bieguny są zespolone (zespolony i sprzężony z nim). Charakter zmian prądu w obwodzie w stanie przejściowym jest sinusoidalny tłumiony, o oscylacjach zanikających do zera.

Rezystancja $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ nazywana jest rezystancją krytyczną i oznaczana w postaci R_{kr} .

5.2 Przypadek aperiodyczny

Rozpatrzmy najpierw przypadek pierwszy (aperiodyczny). Ze względu na to, że oba bieguny są rzeczywiste w obliczeniach transformaty odwrotnej najwygodniej jest zastosować metodę residuów. Zgodnie z nią przebieg czasowy prądu $i(t)$ można zapisać w postaci

$$i(t) = \frac{E}{2L\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} \left[e^{s_1 t} - e^{s_2 t} \right] \quad (5.7)$$

Podstawiając wartości s_1 i s_2 określone wzorami (5.5) i (5.6) otrzymuje się postać hiperboliczną rozwiązania na prąd cewki w stanie nieustalonym

$$i(t) = \frac{E}{L\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} t \right) \quad (5.8)$$

We wzorze występuje czynnik tłumiący typu wykładniczego $e^{-\frac{R}{2L}t}$. Wielkość $\alpha = \frac{R}{2L}$ nazywana jest **współczynnikiem tłumienia**. Jej wartość jest proporcjonalna do wartości rezystancji. Im większa rezystancja tym większe tłumienie w obwodzie.

W podobny sposób wyznaczyć można pozostałe przebiegi czasowe w obwodzie: napięcie cewki i kondensatora. Transformata napięcia na kondensatorze wyrażona jest wzorem

$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I(s) = \frac{E}{LC} \frac{1}{s \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right)} \quad (5.9)$$

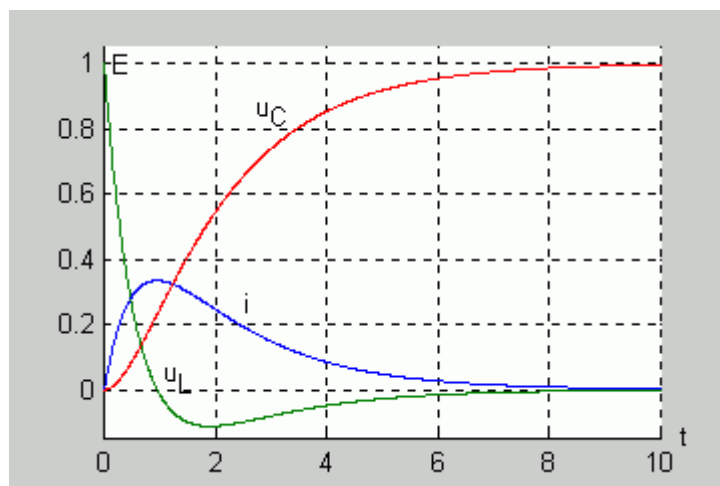
Po zastosowaniu wzoru na residuum otrzymujemy

$$u_C(t) = E + \frac{E}{2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}}(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) \quad (5.10)$$

Obliczenie napięcia cewki w stanie nieustalonym może być uzyskane bezpośrednio z postaci czasowej poprzez różniczkowanie zależności na prąd cewki. Po wykonaniu odpowiednich działań otrzymuje się

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{E}{2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}}[s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}] \quad (5.11)$$

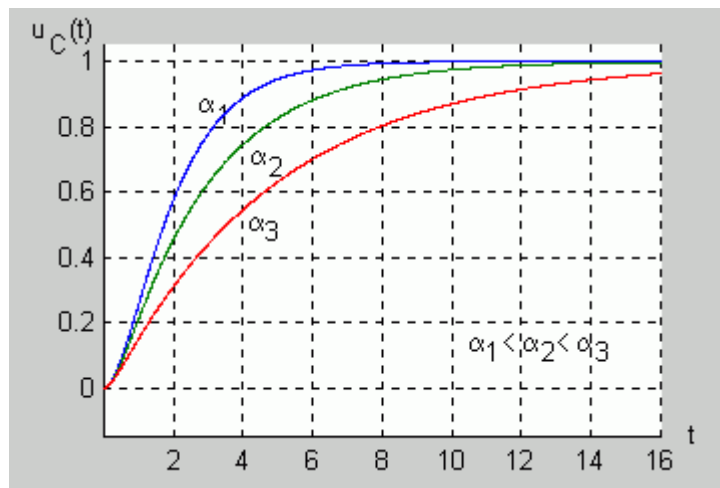
Na rys. 5.3 przedstawiono przebiegi prądu, napięcia na kondensatorze i cewce w stanie nieustalonym w obwodzie RLC dla $R = 2,3\Omega$, $C = 1\text{F}$ i $L = 1\text{H}$ przy załączeniu napięcia stałego $E = 1\text{V}$. Dla przyjętych wartości parametrów elementów mamy do czynienia z przypadkiem aperiodycznym.



Rys. 5.3. Przebiegi prądu i napięć w obwodzie RLC dla przypadku aperiodycznego

Prąd w obwodzie oraz napięcie na kondensatorze zachowują ciągłość i spełniają prawa komutacji. W stanie ustalonym prąd w obwodzie nie płynie (kondensator w stanie ustalonym stanowi przerwę) a napięcie na kondensatorze przyjmuje wartość napięcia zasilającego E . Zauważmy ponadto, że wartości maksymalnej prądu odpowiada zerowa wartość napięcia na cewce ($u_L(t) = L \frac{di}{dt}$). W chwili, gdy napięcie na cewce osiąga wartość maksymalną ujemną, w przebiegu napięcia na kondensatorze można zauważyć punkt przegięcia.

Na rys. 5.4 przedstawiono wykresy przebiegów ładowania kondensatora w obwodzie RLC dla przypadku aperiodycznego opisanego wzorem (5.10) dla 3 różnych wartości współczynnika tłumienia $\alpha = \frac{R}{2L}$.

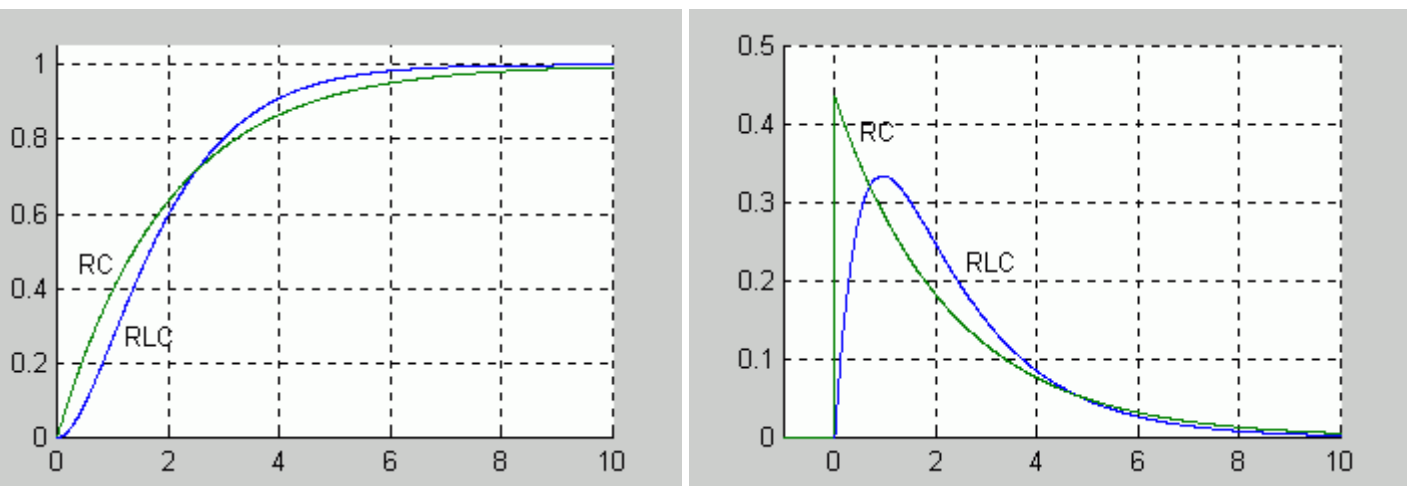


Rys. 5.4. Przebiegi napięć na kondensatorze dla różnej wartości współczynnika tłumienia

Jak widać, im większa jest wartość tego współczynnika, tym dłużej trwa dochodzenie do stanu ustalonego. Interesujące jest porównanie procesu ładowania kondensatora w obwodzie RLC w stanie aperiodycznym (wzór 5.10) oraz w obwodzie RC. Napięcie i prąd kondensatora w obwodzie RC, jak zostało pokazane w lekcji jedenastej opisane są funkcjami

$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right), \quad i_C(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Na rys. 5.5 przedstawiono przebiegi napięcia na kondensatorze (rys. 5.5a) oraz prądu (rys. 5.5b).



Rys. 5.5 Porównanie procesu ładowania kondensatora w obwodzie RC i RLC

W napięciu $u_C(t)$ w obwodzie RLC widoczny jest łagodnie narastający przebieg z punktem przegięcia. Prąd ładowania kondensatora, będący jednocześnie prądem cewki, narasta od wartości zerowej z zachowaniem ciągłości, a więc spełniając warunki nakładane przez prawa komutacji. W obwodzie RC widoczny jest gwałtowny skok prądu w chwili przełączenia (prawa komutacji nie dotyczą prądu kondensatora).

5.3 Przypadek aperiodyczny krytyczny

W przypadku aperiodycznym krytycznym, wobec spełnienia relacji $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ oba pierwiastki mianownika są równe i transformata prądu wyraża się wzorem

$$I(s) = \frac{E/L}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2} \quad (5.12)$$

Zastosowanie wzoru na residuum dla pierwiastka podwójnego $s_1 = s_2 = -\frac{R}{2L} = -\alpha$ prowadzi do następującej postaci prądu cewki $i(t)$

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t} \quad (5.13)$$

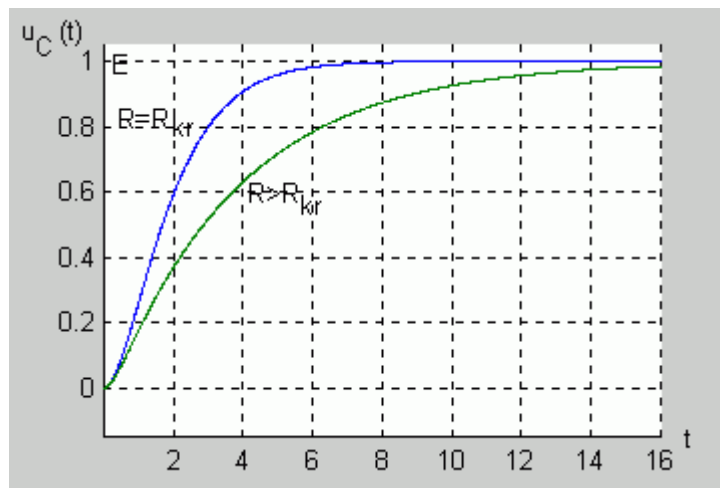
W analogiczny sposób można wyznaczyć pozostałe przebiegi (napięcia kondensatora i cewki) dla stanu aperiodycznego krytycznego. W przypadku napięcia na cewce bezpośrednio poprzez różniczkowanie funkcji czasowej prądu otrzymuje się

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = E e^{-\frac{R}{2L}t} \left(1 - \frac{R}{2L}t\right) \quad (5.14)$$

Napięcie na kondensatorze w stanie nieustalonym można uzyskać bezpośrednio z prawa napięciowego Kirchhoffa napisanego dla obwodu z rys. 5.1 po przełączeniu. Mianowicie

$$u_C(t) = E - Ri_L(t) - u_L(t) = E - E e^{-\frac{R}{2L}t} \left(1 + \frac{R}{2L}t\right) \quad (5.15)$$

Na rys. 5.6 przedstawiono przebieg ładowania kondensatora w stanie aperiodycznym krytycznym na tle przypadku aperiodycznego.



Rys. 5.6. Porównanie procesu ładowania kondensatora w obwodzie RLC dla przypadku aperiodycznego i aperiodycznego krytycznego

Jedyna różnica występuje w czasie trwania stanu przejściowego, który najszybciej zanika dla przypadku krytycznego. Charakter przebiegu prądu i napięć w obwodzie dla przypadku aperiodycznego krytycznego jest podobny do zwykłego przypadku aperiodycznego, z tym, że najszybciej uzyskiwany jest stan ustalony (stan przejściowy trwa najkrócej z możliwych).

5.4 Przypadek oscylacyjny

Przypadek oscylacyjny zmian prądu i napięć w obwodzie szeregowym RLC występuje przy spełnieniu warunku $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ a więc przy małych wartościach rezystancji R . W tym przypadku oba bieguny są zespolone. Dla wyznaczenia postaci czasowej prądu wygodniej jest zastosować metodę tablic transformant. W tym celu należy przekształcić wyrażenie na prąd operatorowy w taki sposób, aby doprowadzić je do postaci występującej w tablicy 12.1. Dla zadanej postaci prądu przekształcenia te są jak następuje

$$I(s) = \frac{E/L}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\right)^2} \cdot \frac{E/L}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad (5.16)$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (5.17)$$

Wielkość ω jest **pulsacją drgań własnych** obwodu RLC występujących w przypadku oscylacyjnym. Wykorzystując tablicę transformat 12.1 możemy uzyskać postać czasową prądu w obwodzie. Można ją zapisać w postaci

$$i(t) = \frac{E}{\omega L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t) \quad (5.18)$$

Prąd w przypadku oscylacyjnym opisany jest funkcją sinusoidalną o amplitudzie zmieniającej się według funkcji wykładniczej. Czynnikiem $e^{-\frac{R}{2L}t}$ stanowi tłumienie przebiegu sinusoidalnego a jego wartość jest proporcjonalna do wartości rezystancji obwodu RLC. Odwrotność współczynnika tłumienia charakteryzuje stałą czasową $\tau = \frac{2L}{R}$ obwodu RLC z jaką tłumione są drgania sinusoidalne.

Wykorzystując podstawowe relacje zachodzące między zmiennymi w obwodzie szeregowym RLC można wyznaczyć pozostałe napięcia w obwodzie w stanie nieustalonym. W przypadku cewki napięcie uzyskuje się przez zrózniczkowanie funkcji opisującej prąd ładowania.

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\frac{E}{\omega \sqrt{LC}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t - \varphi) \quad (5.19)$$

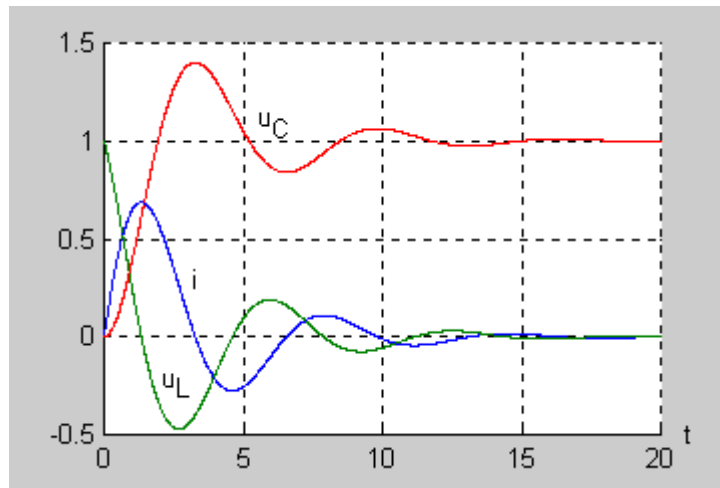
gdzie kąt φ jest określony relacją

$$\varphi = \arctg \frac{\omega}{R / 2L} \quad (5.20)$$

Napięcie na kondensatorze wyznaczyć można bezpośrednio z prawa napięciowego Kirchhoffa zastosowanego do obwodu rzeczywistego z rys. 5.1

$$u_C(t) = E - u_L(t) - Ri(t) = E - \frac{E}{\omega L} e^{-\frac{R}{2L}t} \left[R \sin(\omega t) - \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega t - \varphi) \right] \quad (5.21)$$

Na rys. 5.7 przedstawiono przebiegi prądu i napięć w stanie nieustalonym w obwodzie RLC przy wystąpieniu przypadku oscylacyjnego, czyli przy $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.



Rys. 5.7. Przebiegi czasowe w obwodzie RLC dla przypadku oscylacyjnego

Przebieg prądu ma charakter sinusoidalny, tłumiony wykładniczo do zera. Obwiednie przebiegu prądu są wyznaczone

funkcjami $f(t) = \pm \frac{E}{\omega L} e^{-\frac{R}{2L}t}$. Przy zasilaniu obwodu RLC napięciem stałym wytworzyły się drgania własne o pulsacji

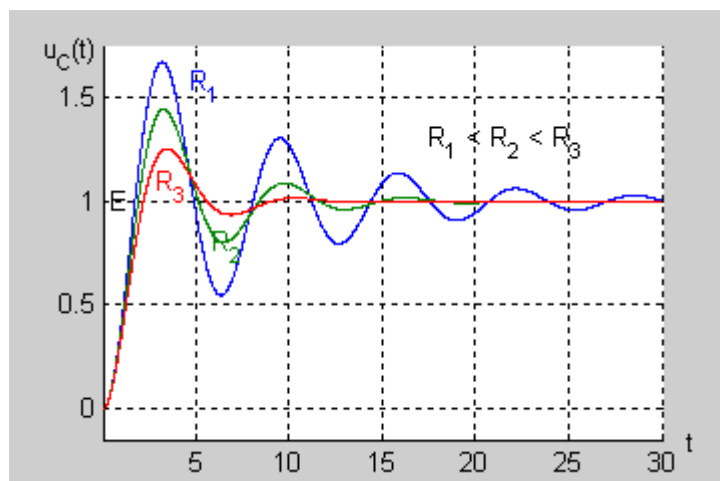
$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. Pulsacja ta zależy wyłącznie od parametrów obwodu RLC. Głównym czynnikiem regulującym

wartość pulsacji wobec małej wartości rezystancji R dla przypadku oscylacyjnego jest wartość indukcyjności L oraz pojemności C . Przy danych wartościach L , C i regulowanej rezystancji, pulsacja rośnie przy malejącej wartości rezystancji.

Drgania w obwodzie powstają na skutek wymiany energii między polem elektrycznym kondensatora a polem magnetycznym cewki. Na skutek skończonej wartości rezystancji zachodzi rozpraszanie energii w postaci ciepła wydzielanego na rezystorze. Stąd oscylacje powstające w obwodzie mają charakter malejący. Szybkość tłumienia określa

stała tłumienia $\alpha = \frac{R}{2L}$. Im większa wartość rezystancji tym większe tłumienie w obwodzie i szybsze zanikanie drgań sinusoidalnych do zera.

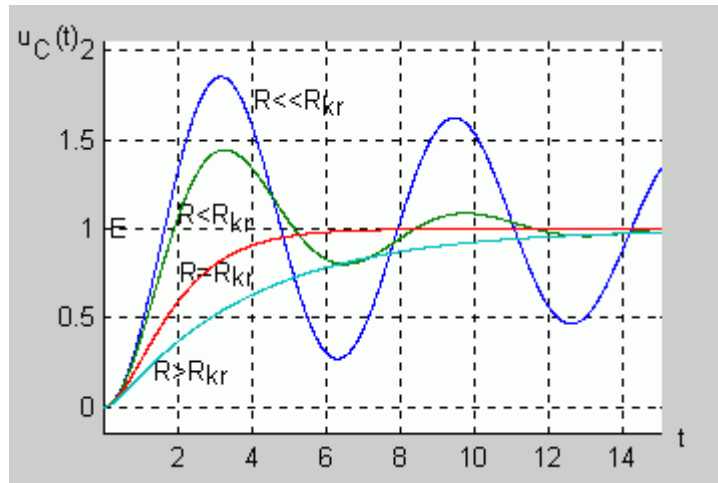
Na rys. 5.8 przedstawiono przykładowe przebiegi ładowania kondensatora w obwodzie RLC dla przypadków oscylacyjnych przy zmieniającej się wartości rezystancji.



Rys. 5.8. Przebiegi napięcia na kondensatorze dla przypadku oscylacyjnego przy zmieniającej się wartości rezystancji

Widoczne jest, że im mniejsza wartość rezystancji tym dłużej trwa stan przejściowy w obwodzie. Wobec małych wartości rezystancji wynikających z warunku występowania przypadku oscylacyjnego jej wpływ na częstotliwość drgań własnych obwodu (wzór 5.17) jest stosunkowo niewielki.

Należy podkreślić, że jakkolwiek wyrażenia analityczne opisujące przebiegi czasowe w obwodzie dla różnych przypadków tłumienia są znacznie różniące się między sobą, wszystkie reprezentują charakter ciągły. Poszczególne przypadki przechodzą w siebie nawzajem przy ciągłej zmianie wartości rezystancji. Przy małej rezystancji tłumienie jest małe i przebieg prądu oraz napięcie jest oscylacyjny, tłumiony wykładniczo. Wzrost wartości rezystancji powoduje wzrost tłumienia, drgania trwają krócej aż przy pewnej wartości krytycznej $R_{kr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ przechodzą w przebieg aperiodyczny (krytyczny), przy którym nie obserwuje się już drgań. Dalszy wzrost rezystancji niewiele zmienia w charakterze jakościowym przebiegów poza wydłużeniem stanu przejściowego. Ilustrację powyższego zjawiska na przykładzie napięcia $u_C(t)$ w obwodzie przedstawiono na rys. 5.9.



Rys. 5.9. Przebiegi napięcia na kondensatorze w obwodzie RLC przy ciągłej zmianie wartości rezystancji

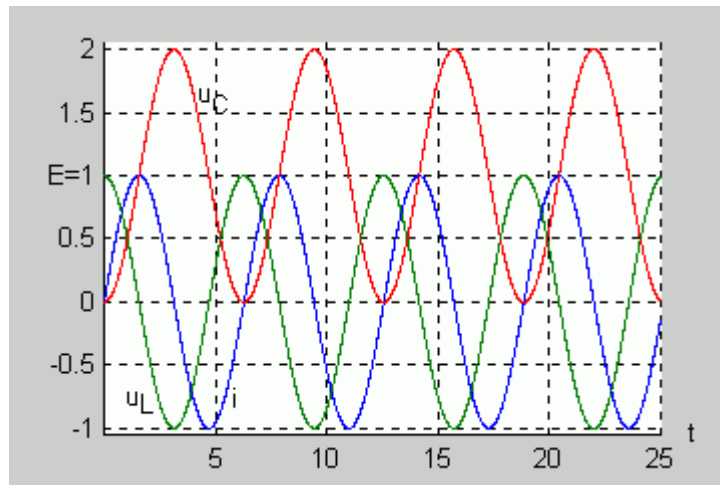
5.5 Obwód bezstratny LC w stanie nieustalonym

Interesujące zjawiska w stanie nieustalonym występują w obwodzie RLC o zerowej rezystancji. Obwód taki nazywać będziemy obwodem LC. Jak wynika z przedstawionych wyżej wzorów tłumienie w takim obwodzie jest zerowe (

$\alpha = \frac{R}{2L} = 0$) a pulsacja drgań własnych zależy wyłącznie od indukcyjności i pojemności i określona jest wzorem

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.22)$$

Przy zerowym tłumieniu drgania oscylacyjne powstałe w obwodzie na skutek stanu przejściowego nigdy nie gasną. Obwód zasilony napięciem stałym generuje niegasnące drgania sinusoidalne stając się generatorem sygnałów harmoniczných. Przypadek powstania drgań niegasnących w obwodzie LC przedstawiono na rys. 5.10, na którym przedstawiono przebieg napięcia na kondensatorze, prądu w obwodzie oraz napięcia cewki.



Rys. 5.10. Przebiegi prądu i napięć w stanie nieustalonym w obwodzie LC

W obwodzie zaobserwować można powstanie dwukrotnego przepięcia na kondensatorze (wartość maksymalna napięcia jest równa $2E$).

Zjawisko powstawania niegasnących drgań sinusoidalnych w obwodzie LC wykorzystuje się powszechnie w generatorach drgań harmoniczných. W rozwiązaniach praktycznych takich generatorów konieczne jest jednak zastosowanie elementów od tłumiających, kompensujących skończone tłumienie wynikające z istnienia rezystancji uzwojeń cewki i skończonej stratności kondensatora. Rolę układów od tłumiających obwód pełnić mogą elementy aktywne generujące energię, takie jak wzmacniacze operacyjne, tranzystory, pewne typy diód itp.

Przedstawione w tym rozdziale rozważania dotyczyły stanu nieustalonego przy wymuszeniu stałym. Identyczny sposób rozumowania, ale przy rozbiciu stanu nieustalonego na ustalony i przejściowy można zastosować do obwodu o wymuszeniu sinusoidalnym. Stan przejściowy w takim obwodzie niczym nie różni się od przypadku z wymuszeniem stałym. Program poniższy pozwala zaobserwować zjawiska zmian prądu i napięć w stanie nieustalonym w obwodzie szeregowym RLC przy dowolnym wymuszeniu: stałym i sinusoidalnym. Szczególnie interesujące są przypadki odpowiadające wymuszeniu sinusoidalnemu o wartości pulsacji wymuszenia względem pulsacji drgań własnych obwodu RLC (różne przypadki oscylacyjne). Zauważmy, że przy $R=0$ i pulsacji wymuszenia równej pulsacji drgań własnych powstają bieguny podwójne na osi urojonej, co prowadzi do niestabilności obwodu (sygnały prądu i napięcia rosną liniowo do nieskończoności). Przypadek taki można zaobserwować zakładając w programie $R=0$ i wartości jednostkowe dla L , C i pulsacji wymuszenia.

5.6 Ćwiczenia

Ćwiczenie 5.1

Wartości indukcyjności i pojemności w obwodzie szeregowym RLC są równe: $L=0,01\text{H}$ oraz $C = 1\mu\text{F}$. Określić zmiany częstotliwości drgań własnych tego obwodu w funkcji wartości rezystancji R zmieniającej się od zera do rezystancji krytycznej.

Rozwiązanie

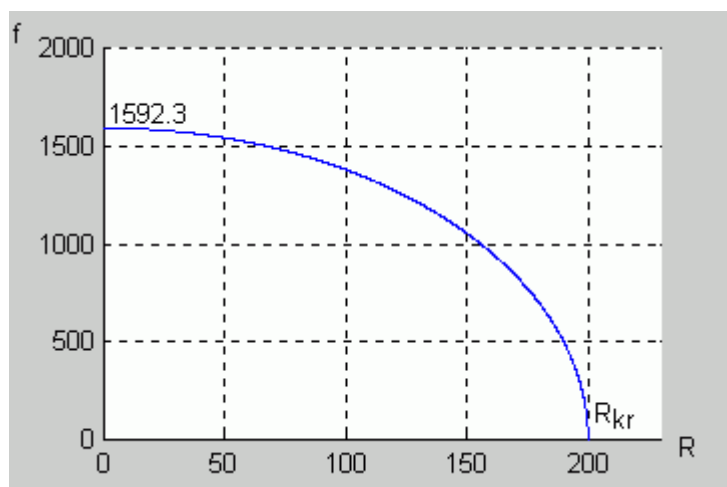
Częstotliwość drgań własnych obwodu szeregowego RLC dana jest wzorem

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{10^8 - 0,25 \cdot 10^4 R^2}$$

Rezystancja krytyczna

$$R_{kr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 200\Omega$$

Na rys. 5.11 przedstawiono zależność częstotliwości drgań własnych obwodu od wartości rezystancji R w podanym zakresie zmian rezystancji



Rys. 5.11. Wykres zależności częstotliwości drgań własnych obwodu od wartości rezystancji

Ćwiczenie 5.2

Określić charakter odpowiedzi czasowej w obwodzie szeregowym RLC, jeśli indukcyjność $L=0,1\text{H}$, pojemność $C=10^{-5}\text{F}$ a wartości rezystancji są równe: a) $R=50\Omega$, b) $R=200\Omega$, c) $R=500\Omega$.

Rozwiązanie

Charakter odpowiedzi czasowych w obwodzie RLC zależy od stosunku rezystancji obwodu do rezystancji krytycznej. W przypadku danych w obwodzie rezystancja krytyczna jest równa

$$R_{kr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 200\Omega$$

W związku z powyższym otrzymujemy:

- a) $R < R_{kr}$ → przypadek oscylacyjny
- b) $R = R_{kr}$ → przypadek aperiodyczny krytyczny
- c) $R > R_{kr}$ → przypadek aperiodyczny

5.7 Zadania sprawdzające

Zadanie 5.1

W obwodzie szeregowym RLC o $C=0.001F$, $L=0.1H$ powstaje stan nieustalony. Określić warunek powstania drgań oscylacyjnych w takim obwodzie?

Rozwiązanie

$$R < 10\Omega$$

Zadanie 5.2

Określić wartość pulsacji w stanie nieustalonym obwodu równoległego RLC jeśli wartości parametrów wynoszą: $R=100\Omega$, $L=0.1H$, $C=100mF$.

Rozwiązanie

$$\omega_0 = 0.1975$$

Zadanie 5.3

Określić i narysować przebieg prądu oraz napięcia kondensatora w układzie po załączeniu wyłącznika. Kondensator był wstępnie naładowany do napięcia U_{C0} . Dane elementów:

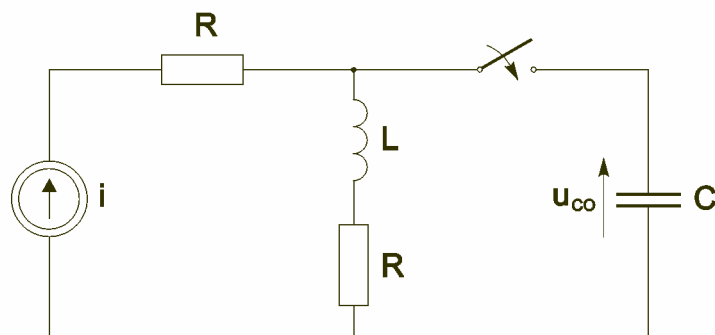
$$i = 10 \text{ A}$$

$$u_C(0^-) = 20 \text{ V}$$

$$R = 10 \Omega$$

$$L = 5 \text{ H}$$

$$C = \frac{1}{5} \text{ F}$$



Rys. 5.12 Schemat obwodu do zadania 5.3

Rozwiązanie

$$u_C(t) = 100 - 80e^{-t} - 80te^{-t}$$

$$i_C(t) = 16te^{-t}$$

Zadanie 5.4

Wyznaczyć prądy $i_L(t)$ oraz napięcia $u_C(t)$ w układach metodą operatorową. Dane elementów obwodu:

$$e_1(t) = 10\sqrt{2} \sin t \text{ V}$$

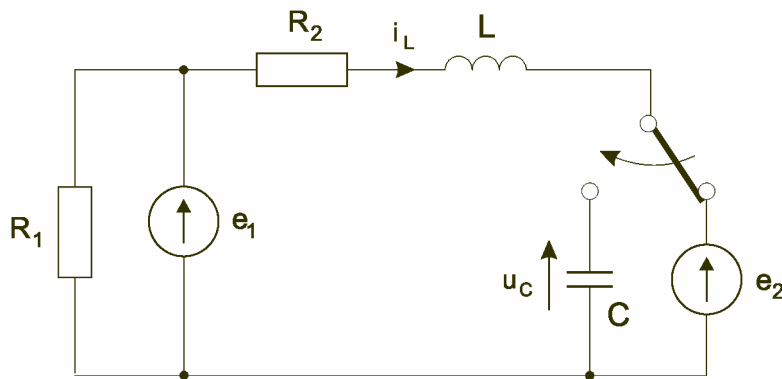
$$e_2(t) = 5 \text{ V}$$

$$R_1 = 1 \Omega$$

$$R_2 = 5 \Omega$$

$$L = 2 \text{ H}$$

$$C = 0,5 \text{ F}$$



Rys. 5.13 Schemat obwodu do zadania 5.4

Rozwiązanie

$$i_L(t) = 2\sqrt{2} \sin t - 0,75e^{-2t} - 1,22e^{-0,5t}$$

$$u_C(t) = 4\sqrt{2} \sin(t - 90^\circ) - 0,75e^{-2t} - 4,88e^{-0,5t}$$

5.8 Testy samooceny

- 1) W obwodzie szeregowym RLC o $C=0.001\text{F}$, $L=0.1\text{H}$ powstaje stan nieustalony. Jaki jest warunek powstania drgań oscylacyjnych w takim obwodzie?
- $R > 20\Omega$
 - $R < 20\Omega$
 - $R < 10\Omega$
 - $R = 20\Omega$
- 2) Przy zmniejszaniu się wartości rezystancji R w obwodzie szeregowym RLC częstotliwość drgań własnych obwodu
- maleje
 - rośnie
 - nie zmienia się
- 3) Idealny obwód bezstratny LC przy niezerowych warunkach początkowych generuje drgania sinusoidalne
- tłumione zanikające do zera
 - nietłumione trwające w czasie do nieskończoności
 - narastające do wartości nieskończonej
 - nietłumione trwające w skończonym czasie
- 4) W obwodzie szeregowym RLC o $R=0,5\Omega$, $C=0.1\text{F}$, $L=0,1\text{H}$ powstaje stan nieustalony o charakterze:
- oscylacyjnym o $\omega = 9,68\text{rad} / \text{s}$
 - oscylacyjnym o $\omega = 10\text{rad} / \text{s}$
 - aperiodycznym
 - aperiodycznym krytycznym
- 5) Cewka o $L=1\text{H}$, kondensator $C=1\text{F}$ oraz rezystor $R=5\Omega$ są połączone równolegle. Stan nieustalony w obwodzie będzie miał charakter
- oscylacyjny
 - aperiodyczny
 - na podstawie tych danych nie da się jednoznacznie określić
- 6) Do obwodu szeregowego LC o $L=1\text{H}$, $C=1\text{F}$ włączono źródło napięcia sinusoidalnego $e(t)=20\sin 6t$. Sygnał odpowiedzi obwodu będzie zawierał
- dwie sinusoidy o $\omega_1=1$ i $\omega_1=6$
 - jedną sinusoidę o $\omega_1=1$
 - dwie sinusoidy o $\omega_1=5$ i $\omega_1=7$
- 7) W obwodzie RLC o charakterze oscylacyjnym częstotliwość drgań własnych można regulować poprzez zmianę
- tylko wartości R
 - tylko wartości L
 - tylko wartości C
 - wartości R , L i C
- 8) W obwodzie szeregowym RLC o $L=1\text{H}$, $C=0.01\text{F}$ warunek powstania drgań oscylacyjnych w stanie nieustalonym wymaga, aby
- $R < 20\Omega$

b) $R > 20\Omega$

c) $R < 10\Omega$

d) $R > 10\Omega$

9) W obwodzie równoległym RLC o $L=1\text{H}$, $C=0.01\text{F}$ warunek powstania drgań oscylacyjnych w stanie nieustalonym wymaga, aby

a) $R < 20\Omega$

b) $R > 20\Omega$

c) $R < 10\Omega$

d) $R > 10\Omega$

10) Napięcie na kondensatorze w stanie nieustalonym w obwodzie RLC zasilanym ze źródła napięcia stałego E

a) może przekroczyć wartość napięcia zasilającego E

b) nie może przekroczyć wartości napięcia zasilającego

c) może w szczególnym przypadku osiągnąć wartość $2E$

d) zależy od doboru wartości elementów RLC

5.9 Odpowiedzi do testów

1b

2b

3b

4a

5a

6a

7d

8a

9b

10a,c,d

Słownik opanowanych pojęć

Wykład 1

Komutacja – ogólna nazwa wyrażająca dowolne przełączenie (zmianę) w obwodzie powodujące powstanie stanu nieustalonego.

Metoda klasyczna – metoda rozwiązywania stanu nieustalonego polegająca na sprowadzeniu układu równań różniczkowych pierwszego rzędu do jednego równania różniczkowego wyższego rzędu i wyrażeniu rozwiązania tego równania za pośrednictwem postaci ogólnej wykorzystującej funkcje wykładnicze.

Metoda zmiennych stanu – metoda opisu układów dynamicznych (zawierających elementy RLC) wyrażona poprzez równanie różniczkowe typu macierzowego o postaci $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$, w której \mathbf{A} i \mathbf{B} są macierzami, \mathbf{x} – wektorem zmiennych stanu a \mathbf{u} – wektorem wymuszeń.

Metoda Cayleya-Hamiltona – metoda wyznaczania $e^{\mathbf{A}t}$ wykorzystując rozwinięcie funkcji w skończony szereg potęgowy i twierdzenie Cayleya-Hamiltona.

Metoda Lagrange’a-Sylwestera – metoda wyznaczania macierzy $e^{\mathbf{A}t}$ przy zastosowaniu jawnej postaci wzoru analitycznego. Obowiązuje dla wartości własnych pojedynczych.

Metoda wektorów własnych (diagonalizacji macierzy) – metoda wyznaczania macierzy $e^{\mathbf{A}t}$ poprzez procedurę diagonalizacji macierzy \mathbf{A} . Obowiązuje dla wartości własnych pojedynczych.

Prawa komutacji – prawa określające równość wartości napięć na kondensatorach i prądów cewek w obwodzie RLC w chwili komutacji (przełączenia). Wyrażone są one wzorami $u_C(0^-) = u_C(0^+)$ oraz $i_L(0^-) = i_L(0^+)$ gdzie 0^+ oznacza chwilę przełączenia.

Równanie charakterystyczne – równanie operatorowe względem zmiennej zespolonej s przyporządkowane równaniu stanu. Określone jest zależnością $\det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}) = 0$.

Równanie różniczkowe jednorodne - równanie różniczkowe n -tego rzędu, w którym funkcja wymuszająca występująca po prawej stronie równania różniczkowego jest równa zero, $a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$

Równanie stanu – zbiór równań różniczkowych pierwszego rzędu zapisanych w postaci $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ w której \mathbf{A} i \mathbf{B} są macierzami, \mathbf{x} – wektorem zmiennych stanu a \mathbf{u} – wektorem wymuszeń.

Równanie wyjściowe stanu – równanie macierzowe $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$ opisujące wektor zmiennych wyjściowych \mathbf{y} jako funkcję liniową zmiennych stanu \mathbf{x} i wymuszeń \mathbf{u} .

Składowa przejściowa – część rozwiązania stanu nieustalonego odpowiadająca niezerowym warunkom początkowym dla tej składowej przy braku wymuszenia zewnętrznego.

Składowa wymuszona (ustalona) - część rozwiązania stanu nieustalonego odpowiadająca stanowi ustalonemu w obwodzie. Jest odpowiedzią ustaloną obwodu na wymuszenie zewnętrzne.

Stan nieustalony – stan obwodu RLC powstający wskutek przełączeń w obwodzie lub zmiany wartości parametrów elementów. W stanie nieustalonym charakter odpowiedzi w obwodzie jest inny niż charakter wymuszenia (np. w odpowiedzi na wymuszenie stałe odpowiedź obwodu jest sinusoidalna, sinusoidalnie tłumiona lub wykładnicza).

Stan przejściowy – ogólna nazwa stanu obwodu między jednym a drugim stanem ustalonym powstałym wskutek zmian w obwodzie. Często utożsamiany ze stanem nieustalonym.

Wartości własne – pierwiastki równania charakterystycznego $\det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}) = 0$. Odgrywają ogromną rolę w analizie stanów nieustalonych w obwodzie.

Wektory własne – wektory \mathbf{x} stowarzyszone z wartościami własnymi macierzy \mathbf{A} . Spełniają relację $s\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Zmienne stanu – wielkości napięć kondensatorów i prądów cewek pozwalające na wyrażenie wszystkich rozwiązań w obwodzie za ich pośrednictwem.

Wykład 2

Prąd ładowania kondensatora – prąd płynący przez kondensator w stanie nieustalonym w obwodzie RC lub RLC (zwykle kojarzony z załączeniem napięcia stałego do obwodu zawierającego kondensator).

Stała czasowa – stała wyrażająca szybkość narastania napięcia kondensatora lub prądu cewki w czasie trwania stanu nieustalonego. Dla obwodu szeregowego RC stała czasowa jest równa $\tau = RC$. Dla obwodu szeregowego RL stała czasowa jest równa $\tau = L/R$.

Stan nieustalony w obwodzie RC – stan nieustalony powstały w obwodzie szeregowym RC przy załączeniu źródła napięciowego (tutaj rozpatrujemy jedynie źródło stałe).

Stan nieustalony w obwodzie RL – stan nieustalony powstały w obwodzie szeregowym RL przy załączeniu źródła napięciowego (tutaj rozpatrujemy jedynie źródło stałe).

Wykład 3

Bieguny – pierwiastki równania charakterystycznego, tożsame z wartościami własnymi macierzy stanu **A**.

Częstotliwość zespolona – zmienna zespolona, utożsamiana zwykle ze zmienną $s = \sigma + j\omega$.

Funkcja delta Diraca – funkcja standardowa $\delta(t)$ zdefiniowana jako wartość nieskończona dla $t=0$ i zero dla $t \neq 0$ spełniająca warunek $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$.

Funkcja jednostkowa Heaviside'a – funkcja standardowa równa jedności dla czasu $t > 0$ i zeru dla czasu $t < 0$.

Liniowość przekształcenia – własność przekształcenia polegająca na tym, że transformata sumy ważonej sygnałów jest równa sumie transformat ważonych poszczególnych sygnałów z osobna, z wartościami wag identycznymi jak w sygnałach oryginalnych.

Metoda operatorowa Laplace'a – metoda obliczania stanów nieustalonych w obwodzie RLC przy zastosowaniu przekształcenia (transformacji) Laplace'a.

Metoda tablic transformat – metoda wyznaczania transformaty odwrotnej Laplace'a poprzez przekształcenie transformaty do jednej z gotowych postaci występującej w tablicy transformat Laplace'a.

Metoda residuów – metoda wyznaczania transformaty odwrotnej Laplace'a sprowadzająca się do obliczenia sumy residuów odpowiedniej funkcji transformaty po wszystkich biegunach układu.

Oryginał – funkcja pierwotna czasu $f(t)$.

Przekształcenie proste Laplace'a – przekształcenie zdefiniowane przez Laplace'a przyporządkowujące funkcji czasu $f(t)$ transformatę $F(s)$.

Przekształcenie odwrotne Laplace'a - przekształcenie odwrotne zdefiniowane przez Laplace'a przyporządkowujące funkcji operatorowej $F(s)$ funkcję czasu (oryginał) $f(t)$.

Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości – własność przekształcenia Laplace'a wyrażająca się zależnością $L\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$.

Przesunięcie w dziedzinie czasu - własność przekształcenia Laplace'a wyrażająca się zależnością $L[f(t - a) \cdot 1(t - a)] = e^{-as} F(s)$.

Splot – operacja matematyczna w dziedzinie czasu określona na dwu funkcjach $f_1(t)$ i $f_2(t)$. Splot dwu funkcji oznaczony w postaci $f_1(t) * f_2(t)$ jest zdefiniowany w następujący sposób

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

Transformata Laplace'a – wynik przekształcenia prostego Laplace'a wykonanego na funkcji czasu. Dla funkcji $f(t)$ transformata jest oznaczana jako $F(s)$.

Transformata odwrotna Laplace'a – wynik działania przekształcenia odwrotnego Laplace'a (oryginał).

Transformata całki – transformacja Laplace'a dotycząca całki funkcji czasu spełniająca relację

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Pomnożenie funkcji $F(s)$ przez $1/s$ odpowiada więc w dziedzinie czasu całkowaniu funkcji. Stąd operator s^{-1} jest nazywany również operatorem całkowania.

Transformata pochodnej - transformacja Laplace'a dotycząca pochodnej funkcji czasu spełniająca relację

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+)$$

w której $f(0^+)$ oznacza wartość początkową funkcji $f(t)$. Pomnożenie funkcji $F(s)$ przez zmienną zespoloną s odpowiada w dziedzinie czasu różniczkowaniu funkcji. Stąd operator s nazywany jest operatorem różniczkowania.

Zera – pierwiastki licznika $L(s)$ transformaty wyrażonej jako funkcja wymierna $F(s)=L(s)/M(s)$.

Wykład 4

Model operatorowy cewki – połączenie szeregowo impedancji operatorowej cewki ($Z_L=sL$) i idealnego źródła napięciowego $Li_L(0^+)$ reprezentujące cewkę w dziedzinie operatorowej.

Model operatorowy kondensatora - połączenie szeregowo impedancji operatorowej kondensatora ($Z_C=1/sC$) i idealnego źródła napięciowego $u_C(0^+)/s$ reprezentujące kondensator w dziedzinie operatorowej.

Model operatorowy rezystora – rezystancja, identyczna z oryginalną rezystancją R .

Prawa Kirchhoffa dla transformat – prawa Kirchhoffa (prądowe i napięciowe) obowiązujące dla transformat prądu i napięcia zamiast dla wartości chwilowych.

Schemat operatorowy Laplace'a – model operatorowy obwodu rzeczywistego, w którym rzeczywiste elementy zostały zastąpione ich modelami operatorowymi.

Superpozycja stanów – metoda analizy stanów nieustalonych, polegająca na rozbiciu stanu nieustalonego na sumę stanu ustalonego i przejściowego w obwodzie po komutacji.

Wykład 5

Drgania niegasnące – drgania sinusoidalne powstałe w obwodzie LC, w którym nie ma rezystancji (tłumienia) jako wynik stanu nieustalonego po komutacji.

Przypadek aperiodyczny – specjalny przypadek występujący w obwodzie szeregowym RLC, w którym parametry obwodu spełniają relację $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Przy spełnieniu tego warunku oba bieguny są rzeczywiste i ujemne. Charakter

zmian prądu w obwodzie w stanie przejściowym jest aperiodyczny (nieokresowy) zanikający do zera w sposób wykładniczy

Przypadek aperiodyczny krytyczny - specjalny przypadek występujący w obwodzie szeregowym RLC, w którym parametry obwodu spełniają relację $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Przy spełnieniu tego warunku oba bieguny są rzeczywiste i równe sobie.

Charakter zmian prądu w obwodzie w stanie przejściowym jest również aperiodyczny, podobnie jak w przypadku aperiodycznym, ale jego czas trwania jest najkrótszy z możliwych.

Przypadek oscylacyjny - specjalny przypadek występujący w obwodzie szeregowym RLC w którym parametry obwodu spełniają relację $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Przy spełnieniu tego warunku oba bieguny są zespolone (zespolony i sprzężony z nim).

Charakter zmian prądu w obwodzie w stanie przejściowym jest sinusoidalny tłumiony, o oscylacjach zanikających do zera.

Pulsacja drgań własnych – pulsacja drgań swobodnych powstałych w stanie przejściowym w obwodzie RLC przy małej wartości rezystancji w obwodzie (tak zwany przypadek oscylacyjny) określona wzorem $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$.

Częstotliwość drgań własnych w szeregowym obwodzie RLC określona jest zatem wzorem $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$.

Rezystancja krytyczna obwodu RLC – wartość rezystancji $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$; oznaczana zwykle jako R_{kr} .

Stała czasowa obwodu RLC – stała czasowa, z jaką przebieg prądu i napięcie w obwodzie RLC zanikają do zera. Pojęcie ściśle związane z częścią rzeczywistą biegunów. W przypadku aperiodycznym mamy do czynienia z dwoma biegunami rzeczywistymi i dwoma różnymi stałymi czasowymi. W przypadku oscylacyjnym i aperiodycznym krytycznym stała czasowa jest utożsamiona z wartością $\tau = 2L/R$. Dla przypadku oscylacyjnego stała czasowa decyduje o tłumieniu oscylacji w obwodzie. W każdym przypadku im większa stała czasowa tym praktycznie dłużej trwa dochodzenie do stanu ustalonego w obwodzie RLC.

Współczynnik tłumienia – parametr utożsamiony z odwrotnością stałej czasowej obwodu. Im większa stała czasowa tym mniejsze tłumienie.