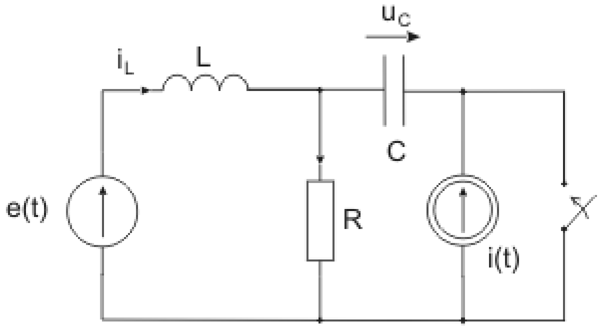
Ćwiczenia do rozdziału 1.

Ćwiczenie 1.1

Wyznaczyć warunki początkowe w obwodzie przedstawionym na rys. 1.3. Parametry elementów obwodu są następujące: L=1H, C=0,5F, R=1Ω, $e(t)=10\sqrt{2}\sin(t+45^o)$ V, $i(t)=2\sin(t-45^o)$ A.



Rys. 1.3. Schemat obwodu do zadania 1.1

Rozwiązanie

Warunki początkowe dotyczą stanu ustalonego przed przełączeniem, w którym w obwodzie działają oba źródła wymuszające. Stosując metodę symboliczną analizy obwodu otrzymujemy

$$E=10e^{j45^o}$$

$$I=\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-j45^o}$$

$$\omega=1$$

$$Z_L=j\omega L=j1$$

$$Z_C=-j/\omega C=-j2$$

Równania obwodu:

$$E=Z_L I_L+R(I+I_L)$$

$$I_L=\frac{E-RI}{R+Z_L}=7{,}21e^{j11{,}31^o}$$

$$U_C=Z_C I=\frac{4}{\sqrt{2}}e^{-j135^o}$$

$$i_L(t)=7{,}21\sqrt{2}\sin(t+11{,}31^o)$$

$$u_C(t)=4\sin(t-135^o)$$

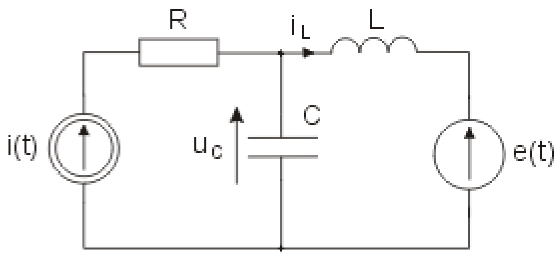
Warunki początkowe:

$$i_L(0^-)=2$$

$$u_C(0^-)=-2\sqrt{2}$$

Ćwiczenie 1.2

Napisać równanie stanu dla obwodu o strukturze przedstawionej na rys. 1.4.



Rys. 1.4. Schemat obwodu do zadania 1.2

Rozwiązanie

Z praw Kirchhoffa napisanych dla obwodu z rysunku wynika

$$i(t) = i_L + C\frac{du_C}{dt}$$
$$e(t) = u_C - L\frac{di_L}{dt}$$

Po przekształceniach tych równań otrzymujemy

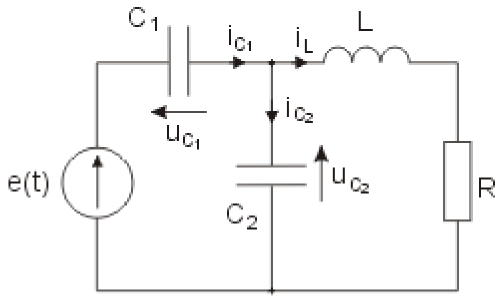
$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}\left[i(t) - i_L\right]$$
$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}\left[u_C - e(t)\right]$$

Równanie stanu:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{du_C}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

Ćwiczenie 1.3

Napisać równanie stanu obwodu o strukturze przedstawionej na rys. 1.5.



Rys. 1.5 Schemat obwodu do zadania 1.3

Rozwiązanie

Z równań Kirchhoffa napisanych dla obwodu z rys. 1.5 otrzymuje się

$$e(t) = u_{C_1} + u_{C_2}$$

$$u_{C_2} = L\frac{di_L}{dt} + Ri_L$$

$$C_1\frac{du_{C_1}}{dt} = i_L + C_2\frac{du_{C_2}}{dt}$$

Po wyznaczeniu u_{C_1} z równania pierwszego i przekształceniu powstałych równań otrzymujemy

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}\left[u_{C_2} - Ri_L\right]$$

$$\frac{du_{C_2}}{dt} = \frac{1}{C_1 + C_2}\left[-i_L + C_1\frac{de(t)}{dt}\right]$$

Postać macierzowa równań stanu:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_{C_2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C_1 + C_2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{C_1}{C_1 + C_2} \end{bmatrix} \frac{de(t)}{dt}$$

Jak widać pomimo trzech elementów reaktancyjnych w obwodzie, równanie stanu jest drugiego rzędu. Wynika to z faktu, że obwód zawiera oczko złożone z samych kondensatorów i idealnego źródła napięcia, stąd napięcie jednego kondensatora jest liniowo zależne od napięcia źródła i napięcia na drugim kondensatorze. W wyniku redukcji liczby zmiennych stanu równania stanu są zależne również od pochodnej funkcji wymuszenia.