Ćwiczenia do rozdziału 3

**Ćwiczenie 3.1**

Wyznaczyć transformatę odwrotną Laplace'a dla transmitancji operatorowej F(s)

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

*Rozwiązanie*

W rozważanym przypadku wszystkie bieguny są rzeczywiste i pojedyncze. Ich wartości są równe: $s_1$=-1, $s_2$=-2, $s_3$=-5. Najskuteczniejszą metodą pozostaje w tym przypadku metoda residuów, zgodnie z którą

$$f(t) = res_{s\to -1}F(s)e^{st} + res_{s\to -2}F(s)e^{st} + res_{s\to -5}F(s)e^{st}$$

Wartość funkcji residuum dla poszczególnych biegunów jest równa

$$res_{s\to -1}F(s)e^{st} = \lim_{s\to -1} F(s)(s+1)e^{st} = \frac{1}{4}e^{-t}$$

$$res_{s\to -2}F(s)e^{st} = \lim_{s\to -2} F(s)(s+2)e^{st} = -\frac{1}{3}e^{-2t}$$

$$res_{s\to -5}F(s)e^{st} = \lim_{s\to -5} F(s)(s+5)e^{st} = \frac{1}{12}e^{-5t}$$

Sumując poszczególne składniki otrzymujemy

$$f(t) = \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{12}e^{-5t}$$

**Ćwiczenie 3.2**

Wyznaczyć transformatę odwrotną Laplace'a dla transmitancji operatorowej F(s)

$$F(s) = \frac{s}{(s+2)(s+3)(s+5)^2}$$

*Rozwiązanie*

W rozważanym przypadku wszystkie bieguny są rzeczywiste, przy czym jeden z nich jest podwójny. Ich wartości są równe: $s_1$=-2, $s_2$=-3, $s_3$=$s_4$=-5. Najskuteczniejszą metodą pozostaje w tym przypadku metoda residuów, zgodnie z którą

$$f(t) = res_{s\to-2}F(s)e^{st} + res_{s\to-3}F(s)e^{st} + res_{s\to-5}F(s)e^{st}$$

Wartość funkcji residuum dla poszczególnych biegunów jest równa

$$res_{s\to-2}F(s)e^{st} = \lim_{s\to-2} F(s)(s+2)e^{st} = -\frac{2}{9}e^{-2t}$$

$$res_{s\to-3}F(s)e^{st} = \lim_{s\to-3} F(s)(s+3)e^{st} = \frac{3}{4}e^{-3t}$$

$$res_{s\to-5}F(s)e^{st} = \lim_{s\to-5} \frac{d}{ds}\left(F(s)(s+5)^2 e^{st}\right) = -\frac{19}{36}e^{-5t} - \frac{5}{6}te^{-5t}$$

Sumując poszczególne składniki otrzymujemy

$$f(t) = -\frac{2}{9}e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{-3t} - \frac{19}{36}e^{-5t} - \frac{5}{6}te^{-5t}$$

**Ćwiczenie 3.3**

Wyznaczyć transformatę odwrotną Laplace'a dla transmitancji operatorowej

$$F(s) = \frac{s+2}{(s^2+s+10)}$$

*Rozwiązanie*

W rozważanym przypadku mamy do czynienia z biegunami zespolonymi, stąd przy wyznaczaniu transformaty odwrotnej Laplace'a wygodniejsza jest metoda wykorzystująca tablice transformat. W tym celu przekształcimy wyrażenie transformaty do postaci

$$F(s) = \frac{s+2}{(s^2+s+10)} = \frac{(s+0{,}5) + 1{,}5 \cdot \sqrt{\frac{4}{39}} \cdot \sqrt{\frac{39}{4}}}{(s+0{,}5)^2 + \left(\sqrt{\frac{39}{4}}\right)^2}$$

Z porównania szóstego i siódmego wiersza w tablicy 3.1 z wyrażeniem opisującym zadaną transformatę otrzymuje się

$$f(t) = e^{-0{,}5t}\, cos\left(\sqrt{\frac{39}{4}}t\right) + \frac{3}{\sqrt{39}} e^{-0{,}5t}\, sin\left(\sqrt{\frac{39}{4}}t\right)$$