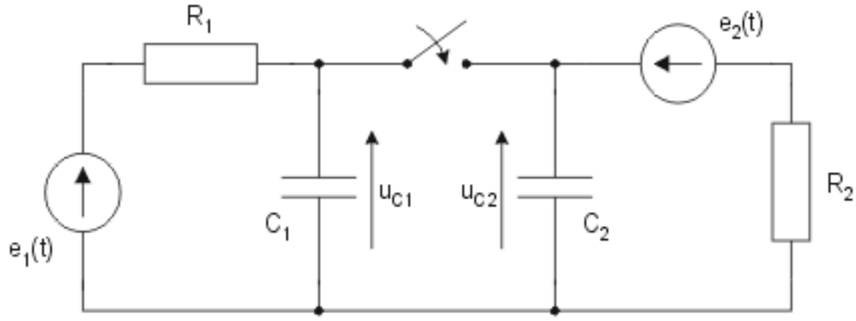
Ćwiczenia do rozdziału 4.

Ćwiczenie 4.1

Określić przebieg napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym po przełączeniu metodą operatorową w obwodzie przedstawionym na rys. 4.6. Przyjąć następujące parametry obwodu: R_1=50Ω, R_2=100Ω, C_1=10μF, C_2=20μF, $e_1(t) = 50$V, $e_2(t) = 100$V.



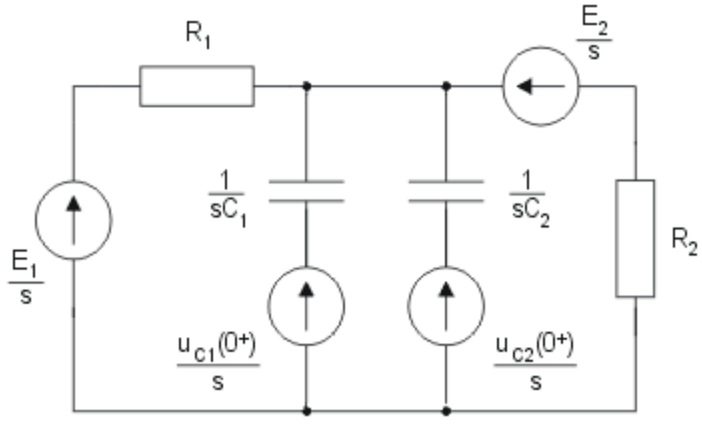
Rys. 4.6 Schemat obwodu do zadania 4.1

Rozwiązanie

Warunki początkowe:

$$u_{C1}(0^-) = e_1 = 50$$
$$u_{C2}(0^-) = e_2 = 100$$

Ze względu na wymuszenie stałe nie zachodzi potrzeba stosowania metody superpozycji stanu. Schemat operatorowy obwodu w stanie nieustalonym przedstawiony jest na rys. 4.7



Rys. 4.7 Schemat operatorowy obwodu

Z metody potencjałów węzłowych zastosowanych do obwodu z rys. 4.7 wynika

$$U_C(s) = \frac{\frac{50}{50s} + \frac{100}{100s} + 10^{-5}u_{C1}(0^+) + 2\cdot 10^{-5}u_{C2}(0^+)}{1/50 + 1/100 + s10^{-5} + 2s10^{-5}}$$

$$U_C(s) = \frac{250s + 2{,}5\cdot 10^5}{3s(s+1000)}$$

Bieguny układu:

$s_1 = 0$
$s_2 = -1000$

Transformata odwrotna Laplace'a

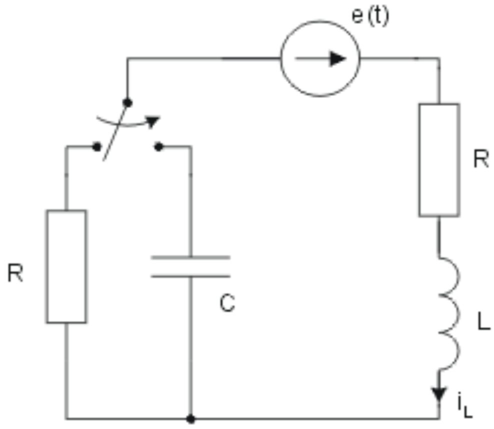
$$u_C(t) = lim_{s\to 0}\, U_C\,(s)se^{st} + lim_{s\to -1000}\, U_C\,(s)(s+1000)e^{st}$$

$$u_C(t) = \frac{250}{3} + \frac{50}{3}e^{-1000t}$$

W stanie ustalonym przy $t \to \infty$ mamy $u_{Cu}(t) = \frac{250}{3}$V. Zauważmy, że w wyniku przełączenia napięcia na kondensatorach w chwili t=0 uległy skokowej zmianie (w obwodzie powstało oczko złożone z samych kondensatorów).

Ćwiczenie 4.2

Określić prąd cewki w stanie nieustalonym po przełączeniu w obwodzie przedstawionym na rys. 4.8. Przyjąć następujące wartości parametrów obwodu: R=2Ω , L=1H, C=1/4F, $e(t) = 10\sqrt{2}\,sin(4t + 45^o)$. Zakładamy, że przełączanie zapewnia ciągłość prądu cewki podlegającej przełączeniu.



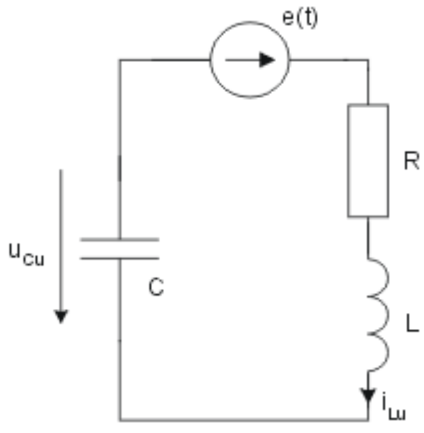
Rys. 4.8. Schemat obwodu do zadania 4.2

Rozwiązanie

1) Warunki początkowe w obwodzie:

$$\omega = 4$$
$$I_L = \frac{10e^{j45^o}}{4+j4} = \frac{2{,}5}{\sqrt{2}}$$
$$i_L(t) = 2{,}5\,sin(4t)$$
$$i_L(0^-) = 0$$
$$u_C(0^-) = 0$$

2) Stan ustalony po przełączeniu w obwodzie (rys. 4.9)

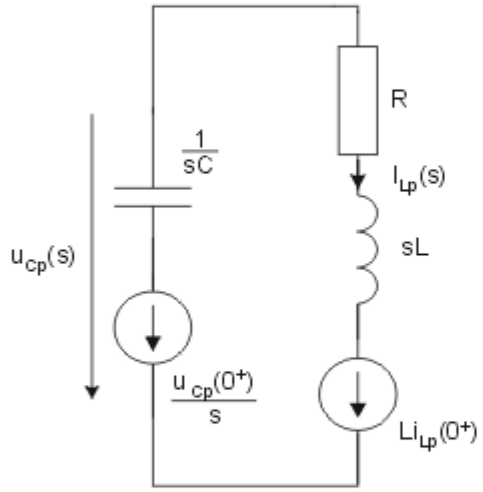


Rys. 4.9. Schemat obwodu w stanie ustalonym po przełączeniu

$$I_{Lu} = \frac{10e^{j45^o}}{2+j4-j1} = 2.77e^{-j11{,}31^o}$$
$$U_{Cu} = -j1 \cdot I_{Lu} = 2{,}77e^{-j101{,}31^o}$$

$$i_{Lu}(t) = 2{,}77\sqrt{2}\,sin(\,4t - 11{,}31^{o})$$
$$u_{Cu}(t) = 2{,}77\sqrt{2}\,sin(\,4t - 101{,}31^{o})$$
$$i_{Lu}(0^{+}) = -0{,}76$$
$$u_{Cu}(0^{+}) = -3{,}84$$

3) Stan przejściowy po przełączeniu
Schemat operatorowy przedstawiony jest na rys. 4.10.



Rys. 4.10 Schemat operatorowy obwodu po przełączeniu

Warunki początkowe dla stanu przejściowego:

$$i_{Lp}(0^{+}) = i_{L}(0^{-}) - i_{Lu}(0^{+}) = 0{,}76$$
$$u_{Cp}(0^{+}) = u_{C}(0^{-}) - u_{Cu}(0^{+}) = 3{,}84$$

Postać operatorowa rozwiązania

$$I_{Lp}(s) = \frac{Li_{Lp}(0^{+}) - \dfrac{u_{Cp}(0^{+})}{s}}{s + 2 + \dfrac{4}{s}} = \frac{0{,}76s - 3{,}84}{s^{2} + 2s + 4}$$

Wobec zespolonych biegunów zastosujemy metodę tablicową określenia transformaty odwrotnej. Zgodnie z nią

$$I_{Lp}(s) = \frac{0{,}76(s + 1) - 4{,}6 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}}{(s + 1)^{2} + \left(\sqrt{3}\right)^{2}}$$

$$i_{Lp}(t) = 0{,}76e^{-t}\,cos(\,\sqrt{3}t) - 2{,}67e^{-t}\,sin(\,\sqrt{3}t)$$

Rozwiązanie całkowite na prąd cewki w stanie nieustalonym

$$i_{L}(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) = 2{,}77\sqrt{2}\,sin(\,4t - 11{,}31^{o}) + 0{,}76e^{-t}\,cos(\,\sqrt{3}t) - 2{,}67e^{-t}\,sin(\,\sqrt{3}t)$$