

# Synteza logiczna w zadaniach, pojęcia podstawowe

**TADEUSZ ŁUBA**

FUNKCJA BOOLOWSKA , UKŁADY KOMBINACYJNE, MIMIMALIZACJA, REDUKCJA ARGUMENTÓW, DEKOMPOZYCJA FUNKCJONALNA I LINIOWA, ANALIZA DANYCH, REDUKCJA ATRYBUTÓW

Omówione w podręczniku „Synteza logiczna” metody syntezy i symulacji układów logicznych dotyczą najważniejszych i aktualnych problemów projektowania układów cyfrowych (w technologiach programowalnych układów FPGA). Większość z nich wymaga stosowania zaawansowanych algorytmów wykorzystujących najnowsze metody redukcji argumentów i dekompozycji funkcjonalnej przystosowane do obliczeń praktycznych. Programy oparte na tych algorytmach są zamieszczone w katalogu „Komputerowe narzędzia syntezy logicznej”. Dużą pomocą w zrozumieniu ich działania jest zbiór zadań pt.: „Synteza logiczna w zadaniach”. Materiały tego zbioru, w szczególności dotyczące weryfikacji obliczeń, nie powstałyby bez nieocenionej pomocy dr. inż. Bogdana Zbierchowskiego.

## Spis treści

1	Pojęcia podstawowe.....	2
1.1.	Zadania z rozwiązaniami.....	2
1.2.	Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	5

# 1 Pojęcia podstawowe

## 1.1. Zadania z rozwiązaniami

### Zadanie 1.1

Wykazać, że  $(x + y)(\bar{x} + z) = xz + \bar{x}y$

### Rozwiązanie

$$\begin{aligned} LHS &= x\bar{x} + xz + \bar{x}y + yz = xz + \bar{x}y + yz = xz + \bar{x}y + 1 \cdot yz = xz + \bar{x}y + (x + \bar{x}) \cdot yz = \\ &= xz + \bar{x}y + xyz + \bar{x}yz = xz + xyz + \bar{x}y + \bar{x}yz = xz(1 + y) + \bar{x}y(1 + z) = xz + \bar{x}y = \\ &= RHS \end{aligned}$$

W przekształceniach wykorzystano następujące własności Algebry Boole'a:

$$a + \bar{a} = 1 \quad ab + ac = a(b + c) \quad a + 1 = 1$$

### Zadanie 1.2

Podane wyrażenie typu „iloczyn sum”:

$$(A + B + \bar{C})(A + B + D)(A + B + E)(A + \bar{D} + E)(\bar{A} + C)$$

przedstawić w postaci sumy iloczynów. Skorzystać ze wzoru:  $(x + y)(\bar{x} + z) = xz + \bar{x}y$ .

### Rozwiązanie

$$\begin{aligned} (A + B + \bar{C})(A + B + D)(A + B + E)(A + \bar{D} + E)(\bar{A} + C) &= (A + B + \bar{C}DE)(AC + \bar{A}(\bar{D} + E)) = \\ &= (A + B + \bar{C}DE)(AC + \bar{A}\bar{D} + \bar{A}E) = AC + ABC + \bar{A}B\bar{D} + \bar{A}BE + \bar{A}\bar{C}DE = \\ &= AC + \bar{A}B\bar{D} + \bar{A}BE + \bar{A}\bar{C}DE \end{aligned}$$

### Zadanie 1.3

W zbiorze  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  następujące pary są zgodne: (1,3), (1,7), (2,5), (2,8), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,7), (5,8), (6,7), (6,8). Obliczyć (sensowną metodą) wszystkie maksymalne klasy zgodności.

### Rozwiązanie

Par zgodnych jest 13, par sprzecznych jest 14. Ze względu na dużą liczbę par, lepszą metodą będzie metoda par zgodnych, wykorzystująca algorytm tworzenia RKZ.

$S_1 = \emptyset$	$\{1\}$
$S_2 = \emptyset$	$\{2\}\{1\}$
$S_3 = \{1\}$	$\{1,3\}\{2\}$
$S_4 = \{3\}$	$\{3,4\}\{1,3\}\{2\}$
$S_5 = \{2,3,4\}$	$\{3,4,5\} \{3,5\} \{2,5\} \{1,3\}$
$S_6 = \{3,4\}$	$\{3,4,6\}\{3,4,5\}\{2,5\}\{1,3\}$
$S_7 = \{1,5,6\}$	$\{6,7\}\{5,7\} \{1,7\}\{3,4,6\}\{3,4,5\}\{2,5\}\{1, 3\}$
$S_8 = \{2,5,6\}$	$\{6,8\} \{5,8\} \{2,5,8\}\{6,7\}\{5,7\} \{1,7\}\{3,4,6\}\{3,4,5\}\{1,3\}$

Ostatni krok algorytmu reprezentuje maksymalne klasy zgodności MKZ =  $\{1,3\}, \{1,7\}, \{5,7\}, \{6,7\}, \{6,8\}, \{2,5,8\}, \{3,4,5\}, \{3,4,6\}$ .

Spróbujemy dodatkowo sprawdzić wynik metodą par sprzecznych. W tym celu wyznaczamy pary sprzeczne (na podstawie danych par zgodnych), z nich tworzymy formułę boolowską i odpowiednio ją przekształcamy.

$$\begin{aligned}
& (1+2)(1+4)(1+5)(1+6)(2+3)(2+4)(2+6)(2+7)(3+7)(3+8)(4+7)(4+8)(5+6)(7+8) = \\
& (1+24568)(2+3467)(7+34)(8+34)(5+6)(7+8) = (12+13467+24568+2345678)(78+34)(5+6)(7+8) = \\
& (12+13467+24568+2345678)(78+78+347+348)(5+6) = \\
& (12+13467+24568+2345678)(578+678+3457+3467+3458+3468) = \\
& 12578+12678+123457+123467+123458+123468+1345678+134678+134567+13467+1345678+134678+24567 \\
& 8+245678+2345678+2345678+234568+234568
\end{aligned}$$

W celu wyznaczenia klas zgodnych w kolejnym kroku należy ze zbioru wszystkich stanów kolejno odjąć uzyskane w ostatecznym wyrażeniu pojedyncze zbiory stanów niezgodnych. Stąd:

$$\begin{aligned}
\{1,2,3,4,5,6,7,8\} - 12578 &= 346 \\
\{1,2,3,4,5,6,7,8\} - 12678 &= 345 \\
\{1,2,3,4,5,6,7,8\} - 123457 &= 68 \\
\{1,2,3,4,5,6,7,8\} - 123458 &= 67 \\
\{1,2,3,4,5,6,7,8\} - 123468 &= 57 \\
\{1,2,3,4,5,6,7,8\} - 13467 &= 258 \\
\{1,2,3,4,5,6,7,8\} - 245678 &= 13 \\
\{1,2,3,4,5,6,7,8\} - 234568 &= 17
\end{aligned}$$

Ostatecznie uzyskaliśmy identyczne maksymalne klasy zgodności

$$MKZ = \{346\}, \{345\}, \{68\}, \{67\}, \{57\}, \{258\}, \{13\}, \{17\}.$$

#### Zadanie 1.4

Dla następujących pary sprzecznych: (1,6), (2,3), (2,7), (4,6), (4,7), (5,6), (5,7), należy obliczyć maksymalne klasy zgodności.

#### Rozwiązanie

Obliczamy wyrażenie boolowskie typu „koniunkcja sum”:

$$\begin{aligned} & (v_1 + v_6)(v_2 + v_3)(v_2 + v_7)(v_4 + v_6)(v_4 + v_7)(v_5 + v_6)(v_5 + v_7) = (v_1 + v_6)(v_2 + v_3v_7)(v_4 + v_6v_7)(v_5 + v_6v_7) = \\ & = (v_1v_2 + v_1v_3v_7 + v_2v_6 + v_3v_6v_7)(v_4v_5 + v_4v_6v_7 + v_5v_6v_7 + v_6v_7) = \\ & = (v_1v_2 + v_1v_3v_7 + v_2v_6 + v_3v_6v_7)(v_4v_5 + v_4v_6v_7 + v_6v_7) = (v_1v_2 + v_1v_3v_7 + v_2v_6 + v_3v_6v_7)(v_4v_5 + v_6v_7) = \\ & = v_1v_2v_4v_5 + v_1v_2v_6v_7 + v_1v_3v_4v_5v_7 + v_1v_3v_6v_7 + v_2v_4v_5v_6 + v_2v_6v_7 + v_3v_4v_5v_6v_7 + v_3v_6v_7 = \\ & = v_1v_2v_4v_5 + v_1v_3v_4v_5v_7 + v_2v_4v_5v_6 + v_2v_6v_7 + v_3v_6v_7 \end{aligned}$$

Uzupełniając zbiory reprezentowane przez składniki obliczonego wyrażenia typu „suma iloczynów” uzyskujemy Maksymalne Klasy Zgodności:

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\} - \{v_1, v_2, v_4, v_5\} = \{v_3, v_6, v_7\}$$

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\} - \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_7\} = \{v_2, v_6\}$$

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\} - \{v_2, v_4, v_5, v_6\} = \{v_1, v_3, v_7\}$$

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\} - \{v_2, v_6, v_7\} = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$$

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\} - \{v_3, v_6, v_7\} = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$$

#### Zadanie 1.5

Trzeba skompletować ekipę do naprawy stacji radarowej zainstalowanej na Marsie. Ponieważ pojazd MarsUlog może zabrać ograniczoną liczbę pasażerów, członków ekipy należy wybrać spośród 5 specjalistów  $S_1, \dots, S_5$  tak, aby ekipa reprezentowała niezbędne do tego celu umiejętności oznaczone A, B, C, D, E. Wiedząc, że specjalista:

$S_1$  reprezentuje specjalności: A, C, E;

$S_2$  reprezentuje: B, E;

$S_3$  reprezentuje: C, E;

$S_4$  reprezentuje: A, D;

$S_5$  reprezentuje: B, C, D;

obliczyć wszystkie nie nadmiarowe ekipy specjalistów do wykonania tego zadania.

#### Rozwiązanie

W celu obliczenia wszystkich nienadmiarowych ekip tworzymy tablicę pokryć (tab. 1.1).

**Tablica 1.1**

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	
A	1	0	0	1	0	$S_1 S_4$
B	0	1	0	0	1	$S_2 S_5$
C	1	0	1	0	1	$S_1 S_3 S_5$
D	0	0	0	1	1	$S_4 S_5$
E	1	1	1	0	0	$S_1 S_2 S_3$

Następnie uzyskane z tej tablicy wyrażenie CNF przekształcamy do postaci DNF:

$$(S_4 + S_1)(S_4 + S_5)(S_1 + S_3 + S_2)(S_1 + S_3 + S_5)(S_2 + S_5) = (S_4 + S_1 S_5)(S_1 + S_3 + S_2 S_5)(S_2 + S_5) = (S_1 S_4 + S_3 S_4 + S_2 S_4 S_5 + S_1 S_5 + S_1 S_3 S_5 + S_1 S_2 S_5)(S_2 + S_5) = S_1 S_2 S_4 + S_2 S_3 S_4 + S_2 S_4 S_5 + S_1 S_2 S_5 + S_1 S_4 S_5 + S_3 S_4 S_5 + S_2 S_4 S_5 + S_1 S_5$$

Na tej podstawie uzyskujemy wszystkie nienadmiarowe ekipy specjalistów:

$$\{S_1 S_5\}; \{S_1 S_2 S_4\}; \{S_2 S_3 S_4\}; \{S_2 S_4 S_5\}; \{S_3 S_4 S_5\}.$$

## 1.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

### Zadanie 1.6

Za pomocą przekształceń algebraicznych znajdź najprostszą postać następujących wyrażeń logicznych:

- $xz + \bar{x}\bar{y}z + yz$ ,
- $(\bar{a} + b)(a + c)(a + \bar{c})$ ,
- $\bar{a}b + \bar{a}c + \bar{b}c + ab + a\bar{c}$ .

### Zadanie 1.7

Stosując przekształcenia algebraiczne, znajdź najprostszą postać następujących wyrażeń logicznych:

- $\bar{x}\bar{y} + xy + \bar{x}y$ ,
- $(x + y)(x + \bar{y})$ ,
- $\bar{x} + xy + x\bar{z} + x\bar{y}\bar{z}$ ,
- $\overline{(x + y)}(\bar{x} + \bar{y})$ ,
- $\bar{a} + \bar{d} + (b + ad)(c + d)$ ,
- $xy + \bar{x}y\bar{z} + yz$ ,
- $\bar{x}(y\bar{z} + x)(\bar{y} + z)$ ,
- $(a + \bar{b}\bar{c})(ac + \bar{c}(b + \bar{b}))$ .

### Zadanie 1.8

Znajdź negację następujących wyrażeń logicznych:

a)  $a\bar{b} + \bar{a}b$ ,

b)  $(a\bar{b} + c)\bar{d} + e$ ,

c)  $(x + \bar{y} + z)(\bar{x} + \bar{z})(x + y)$ .

### Zadanie 1.9

W zbiorze  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  następujące pary są zgodne: (1,3), (1,7), (2,5), (2,8), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,7), (5,8), (6,7), (6,8). Obliczyć metodą par sprzecznych wszystkie maksymalne klasy zgodności.

### Zadanie 1.10

Na wydziale DMS są prowadzone przedmioty A, B, C, D, E. Profesor P1 może nauczać tylko przedmiotu A,

P2 naucza przedmiotów A, D, E;

P3 naucza przedmiotów B, C, D;

P4 naucza przedmiotów A, B, C;

P5 naucza przedmiotów C, E;

Obliczyć wszystkie nienadmiarowe ekipy profesorów do poprowadzenia wszystkich wykładów.

### Zadanie 1.11

W celu zapewnienia bezpieczeństwa energetycznego kraju każdą z pięciu największych elektrowni przystosowano do zasilania 6 regionów  $R_1$  do  $R_6$  wg następującego schematu:

elektrownia  $e_1$  obsługuje regiony  $R_5, R_6$ ;  $e_2 - R_1, R_2, R_5, R_6$ ;  $e_3 - R_1, R_3, R_4$ ;  $e_4 - R_3, R_4, R_5, R_6$ ;

$e_5 - R_1, R_2, R_4, R_6$ .

Obliczyć wszystkie maksymalne zbiory elektrowni, które mogą być jednocześnie konserwowane bez zagrożenia dostarczenia energii do wszystkich regionów.





**Tablica 4.2**

		x			
		0	1	0	1
S					
A 1,3,4	B/C	A	0	0	
B 2,5,6,8	C	C	1	1	
C 5,6,7	B	B	1	0	
		S	y		

		x			
		0	1	0	1
$q_1q_0$					
00	11	00	0	0	
01	11	11	1	1	
11	01	01	1	0	
		$q'_1q'_0$	y		

		x			
		0	1	0	1
$q_1q_0$					
00	11	00	0	0	
01	11	11	1	1	
11	01	01	1	0	
10	--	--	--	--	
		$q'_1q'_0$	y		

Z tab. 4.8c bezpośrednio można wyznaczyć funkcje wzbudzeń dla przerzutników typu D (4.9). Funkcja wyjściowa jest taka, jaką obliczono dla realizacji D.

$$D_1 = \bar{q}_1\bar{x} + \bar{q}_1q_2 \quad D_0 = \bar{q}_1 + q_2 \quad y = q_2\bar{x} + \bar{q}_1q_2$$

Do wyznaczenia funkcji wzbudzeń dla realizacji na przerzutnikach JK Tab. 4.8c została przekształcona (zgodnie z macierzą wzbudzeń dla przerzutnika JK) do tablic Karnaugh (tab. 4.10)

**Tablica 4.3**

		x			
		0	1	0	1
$q_1q_0$					
00	1	0	0	0	
01	1	1	1	1	
11	0	0	1	0	
10	-	-	-	-	
		$D_1$	y		

**Tablica 4.4**

		x	
		0	1
$q_1q_0$			
00	1	1	
01	1	1	
11	-	-	
10	-	-	
		$J_1$	

$$J_1 = 1$$

		x	
		0	1
$q_1q_0$			
00	-	-	
01	-	-	
11	1	1	
10	-	-	
		$K_1$	

$$K_1 = 1$$

		x	
		0	1
$q_1q_0$			
00	1	0	
01	-	-	

11	-	-
10	-	-

$J_0$

$$J_0 = \bar{x}$$

	$x$	
	0	1
$q_1q_0$		
00	-	-
01	0	0
11	0	0
10	-	-

$K_0$

$$K_0 = 0$$