2018

Synteza logiczna w zadaniach

TADEUSZ ŁUBA

FUNKCJA BOOLOWSKA , UKŁADY KOMBINACYJNE, MIMIMALIZACJA, REDUKCJA ARGUMENTÓW, DEKOMPOZYCJA FUNKCJONALNA I LINIOWA, ANALIZA DANYCH, REDUKCJA ATRYBUTÓW

Omówione w podręczniku „Synteza logiczna" metody syntezy i symulacji układów logicznych dotyczą najważniejszych i aktualnych problemów projektowania układów cyfrowych (w technologiach programowalnych układów FPGA). Większość z nich wymaga stosowania zaawansowanych algorytmów wykorzystujących najnowsze metody redukcji argumentów i dekompozycji funkcjonalnej przystosowane do obliczeń praktycznych. Programy oparte na tych algorytmach są zamieszczone w katalogu „Komputerowe narzędzia syntezy logicznej". Dużą pomocą w zrozumieniu ich działania jest zbiór zadań pt.: „Synteza logiczna w zadaniach". Materiały tego zbioru, w szczególności dotyczące weryfikacji obliczeń, nie powstałyby bez nieocenionej pomocy dr. inż. Bogdana Zbierzchowskiego.

Spis treści

1 Pojęcia podstawowe

1.1. Zadania z rozwiązaniami

Zadanie 1.1

Wykazać, że $(x+y)(\bar{x}+z) = xz + \bar{x}y$

Rozwiązanie

$$
\begin{aligned}
LHS &= x\bar{x} + xz + \bar{x}y + yz = xz + \bar{x}y + yz = xz + \bar{x}y + 1 \cdot yz = xz + \bar{x}y + (x+\bar{x}) \cdot yz = \\
&= xz + \bar{x}y + xyz + \bar{x}yz = xz + xyz + \bar{x}y + \bar{x}yz = xz(1+y) + \bar{x}y(1+z) = xz + \bar{x}y = \\
&= RHS
\end{aligned}
$$

W przekształceniach wykorzystano następujące własności Algebry Boole'a:

$a + \bar{a} = 1 \qquad ab + ac = a(b+c) \qquad a + 1 = 1$

Zadanie 1.2

Podane wyrażenie typu „iloczyn sum":

$(A+B+\bar{C})(A+B+D)(A+B+E)(A+\bar{D}+E)(\bar{A}+C)$

przedstawić w postaci sumy iloczynów. Skorzystać ze wzoru: $(x+y)(\bar{x}+z) = xz + \bar{x}y$.

Rozwiązanie

$$
\begin{aligned}
(A+B+\bar{C})(A+B+D)(A+B+E)(A+\bar{D}+E)(\bar{A}+C) &= (A+B+\bar{C}DE)\big(AC+\bar{A}(\bar{D}+E)\big) = \\
&= (A+B+\bar{C}DE)(AC+\bar{A}\bar{D}+\bar{A}E) = AC + ABC + \bar{A}B\bar{D} + \bar{A}BE + \bar{A}\bar{C}DE = \\
&= AC + \bar{A}B\bar{D} + \bar{A}BE + \bar{A}\bar{C}DE
\end{aligned}
$$

Zadanie 1.3

W zbiorze S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} następujące pary są zgodne: (1,3), (1,7), (2,5), (2,8), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,7), (5,8), (6,7), (6,8). Obliczyć (sensowną metodą) wszystkie maksymalne klasy zgodności.

Rozwiązanie

Par zgodnych jest 13, par sprzecznych jest 14. Ze względu na dużą liczbę par, lepszą metodą będzie metoda par zgodnych, wykorzystująca algorytm tworzenia RKZ.

$S_1 = \varnothing$	{1}
$S_2 = \varnothing$	{2}{1}
S_3 = {1}	{1,3}{2}
S_4 = {3}	{3,4}{1,3}{2}
S_5 = {2,3,4}	{3,4,5} ~~{3,5}~~{2,5}{1,3}
S_6 = {3,4}	{3,4,6}{3,4,5}{2,5}{1,3}
S_7= {1,5,6}	{6,7}{5,7} {1,7}{3,4,6}{3,4,5}{2,5}{1, 3}
S_8={2,5,6}	{6,8} ~~{5,8}~~ {2,5,8}{6,7}{5,7} {1,7}{3,4,6}{3,4,5}{1,3}

Ostatni krok algorytmu reprezentuje maksymalne klasy zgodności MKZ = {1,3}, {1,7}, {5,7}, {6,7}, {6,8}, {2,5,8}, {3,4,5}, {3,4,6}.

Spróbujmy dodatkowo sprawdzić wynik metodą par sprzecznych. W tym celu wyznaczamy pary sprzeczne (na podstawie danych par zgodnych), z nich tworzymy formułę boolowską i odpowiednio ją przekształcamy.

(1+2)(1+4)(1+5)(1+6)(2+3)(2+4)(2+6)(2+7)(3+7)(3+8)(4+7)(4+8)(5+6)(7+8) = (1+24568)(2+3467)(7+34)(8+34)(5+6)(7+8) = (12+13467+24568+2345678)(78+34)(5+6)(7+8) = (12+13467+24568+2345678)(78+~~78~~+347+348)(5+6) = (12+13467+24568+2345678)(578+678+3457+3467+3458+3468) = 12578+12678+123457+~~123467~~+123458+123468+~~1345678~~+~~134678~~+~~134567~~+13467+~~1345678~~+~~134678~~+245678+~~245678~~+~~2345678~~+~~2345678~~+234568+~~234568~~

W celu wyznaczenia klas zgodnych w kolejnym kroku należy ze zbioru wszystkich stanów kolejno odjąć uzyskane w ostatecznym wyrażeniu pojedyncze zbiory stanów niezgodnych. Stąd:

{1,2,3,4,5,6,7,8} – 12578 = 346

{1,2,3,4,5,6,7,8} – 12678 = 345

{1,2,3,4,5,6,7,8} – 123457 = 68

{1,2,3,4,5,6,7,8} – 123458 = 67

{1,2,3,4,5,6,7,8} – 123468 = 57

{1,2,3,4,5,6,7,8} – 13467 = 258

{1,2,3,4,5,6,7,8} – 245678 = 13

{1,2,3,4,5,6,7,8} – 234568=17

Ostatecznie uzyskaliśmy identyczne maksymalne klasy zgodności

MKZ={346}, {345}, {68}, {67}, {57}, {258}, {13}, {17}.

Zadanie 1.4

Dla następujących pary sprzecznych: (1,6), (2,3), (2,7), (4,6), (4,7), (5,6), (5,7), należy obliczyć maksymalne klasy zgodności.

Rozwiązanie

Obliczamy wyrażenie boolowskie typu „koniunkcja sum”:

$(v_1 + v_6)(v_2 + v_3)(v_2 + v_7)(v_4 + v_6)(v_4 + v_7)(v_5 + v_6)(v_5 + v_7) = (v_1+v_6)(v_2+v_3v_7)(v_4+v_6v_7)(v_5+v_6v_7) =$

$= (v_1v_2+v_1v_3v_7 + v_2v_6 + v_3v_6v_7)(v_4v_5 + v_4v_6v_7 + v_5v_6v_7 + v_6v_7) =$

$= (v_1v_2+v_1v_3v_7 + v_2v_6 + v_3v_6v_7)(v_4v_5 + v_4v_6v_7 + v_6v_7) = (v_1v_2+v_1v_3v_7 + v_2v_6 + v_3v_6v_7)(v_4v_5+v_6v_7) =$

$= v_1v_2v_4v_5 + \cancel{v_1v_2v_6v_7} + v_1v_3v_4v_5v_7 + \cancel{v_1v_3v_6v_7} + v_2v_4v_5v_6 + v_2v_6v_7 + \cancel{v_3v_4v_5v_6v_7} + v_3v_6v_7 =$

$= v_1v_2v_4v_5 + v_1v_3v_4v_5v_7 + v_2v_4v_5v_6 + v_2v_6v_7 + v_3v_6v_7$

Uzupełniając zbiory reprezentowane przez składniki obliczonego wyrażenia typu „suma iloczynów” uzyskujemy Maksymalne Klasy Zgodności:

$\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\} - \{v_1,v_2,v_4,v_5\} = \{v_3, v_6,v_7\}$

$\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\} - \{v_1,v_3,v_4,v_5,v_7\} = \{v_2, v_6\}$

$\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\} - \{v_2,v_4,v_5,v_6\} = \{v_1, v_3, v_7\}$

$\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\} - \{v_2,v_6,v_7\} = \{v_1, v_3,v_4,v_5\}$

$\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\} - \{v_3,v_6,v_7\} = \{v_1,v_2, v_4,v_5\}$

Zadanie 1.5

Trzeba skompletować ekipę do naprawy stacji radarowej zainstalowanej na Marsie. Ponieważ pojazd MarsUlog może zabrać ograniczoną liczbę pasażerów, członków ekipy należy wybrać spośród 5 specjalistów S1,…,S5 tak, aby ekipa reprezentowała niezbędne do tego celu umiejętności oznaczone A, B, C, D, E. Wiedząc, że specjalista:

S_1 reprezentuje specjalności: A, C, E;

S_2 reprezentuje: B , E;

S_3 reprezentuje:C, E;

S_4 reprezentuje: A, D;

S_5 reprezentuje: B, C, D;

obliczyć wszystkie nie nadmiarowe ekipy specjalistów do wykonania tego zadania.

Rozwiązanie

W celu obliczenia wszystkich nienadmiarowych ekip tworzymy tablicę pokryć (tab. 1.1).

Tablica 1.1

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
A	1	0	0	1	0	$S_1\,S_4$
B	0	1	0	0	1	$S_2\,S_5$
C	1	0	1	0	1	$S_1\,S_3\,S_5$
D	0	0	0	1	1	$S_4\,S_5$
E	1	1	1	0	0	$S_1\,S_2\,S_3$

Następnie uzyskane z tej tablicy wyrażenie CNF przekształcamy do postaci DNF:

$$(S_4 + S_1)(S_4 + S_5)(S_1 + S_3 + S_2)(S_1 + S_3 + S_5)(S_2 + S_5) = (S_4 + S_1S_5)(S_1 + S_3 + S_2S_5)(S_2 + S_5) = (S_1S_4 + S_3S_4 + S_2S_4S_5 +$$

$$+ S_1S_5 + \cancel{S_1S_3S_5 +} \cancel{S_1S_2S_5})(S_2 + S_5) = S_1S_2S_4 + S_2S_3S_4 + S_2S_4S_5 + \cancel{S_1S_2S_5 +} \cancel{S_1S_4S_5 +} S_3S_4S_5 + S_2\cancel{S_4S_5 +} S_1S_5$$

Na tej podstawie uzyskujemy wszystkie nienadmiarowe ekipy specjalistów:

$\{S_1S_5\}$; $\{S_1S_2S_4\}$; $\{S_2S_3S_4\}$; $\{S_2S_4S_5\}$; $\{S_3S_4S_5\}$.

1.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.6

Za pomocą przekształceń algebraicznych znajdź najprostszą postać następujących wyrażeń logicznych:

a) $xz + \bar{x}\bar{y}z + yz$,

b) $(\bar{a} + b)(a + c)(a + \bar{c})$,

c) $\bar{a}b + \bar{a}c + \bar{b}c + ab + a\bar{c}$.

Zadanie 1.7

Stosując przekształcenia algebraiczne, znajdź najprostszą postać następujących wyrażeń logicznych:

a) $\bar{x}\bar{y} + xy + \bar{x}y$,

b) $(x + y)(x + \bar{y})$,

c) $\bar{x} + xy + x\bar{z} + x\bar{y}\bar{z}$,

d) $\overline{(x + y)}(\bar{x} + \bar{y})$,

e) $\bar{a} + \bar{d} + (b + ad)(c + d)$,

f) $xy + \bar{x}y\bar{z} + yz$,

g) $\bar{x}(y\bar{z} + x)(\bar{y} + z)$,

h) $\left(a + \bar{b}\bar{c}\right)\left(ac + \bar{c}\left(b + \bar{b}\right)\right)$.

Zadanie 1.8

Znajdź negację następujących wyrażeń logicznych:

a) $a\bar{b} + \bar{a}b$,

b) $(a\bar{b} + c)\bar{d} + e$,

c) $(x + \bar{y} + z)(\bar{x} + \bar{z})(x + y)$.

Zadanie 1.9

W zbiorze S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} następujące pary są zgodne: (1,3), (1,7), (2,5), (2,8), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,7), (5,8), (6,7), (6,8). Obliczyć metodą par sprzecznych wszystkie maksymalne klasy zgodności.

Zadanie 1.10

Na wydziale DMS są prowadzone przedmioty A, B, C, D, E. Profesor P1 może nauczać tylko przedmiotu A,
P2 naucza przedmiotów A, D, E;
P3 naucza przedmiotów B, C, D;
P4 naucza przedmiotów A, B, C;
P5 naucza przedmiotów C, E;
Obliczyć wszystkie nienadmiarowe ekipy profesorów do poprowadzenia wszystkich wykładów.

Zadanie 1.11

W celu zapewnienia bezpieczeństwa energetycznego kraju każdą z pięciu największych elektrowni przystosowano do zasilania 6 regionów R_1 do R_6 wg następującego schematu:
elektrownia e_1 obsługuje regiony R_5, R_6; e_2 − R_1, R_2, R_5, R_6; e_3 − R_1, R_3, R_4; e_4 − R_3, R_4, R_5, R_6;
e_5 − R_1, R_2, R_4, R_6.

Obliczyć wszystkie maksymalne zbiory elektrowni, które mogą być jednocześnie konserwowane bez zagrożenia dostarczenia energii do wszystkich regionów.

2. Minimalizacja funkcji boolowskich

2.1. Zadania z rozwiązaniami

Zadanie 2.1

Zminimalizować metodą tablic następujące funkcje boolowskie:

a) $f = \Sigma(0,1,2,9,11,12,13, ,27, 28,29)$,

b) $f = \Sigma[4,5,10,11,15,18,20,24,26,30,31, (9,12,14,16,19,21,25)]$.

Rozwiązania

a) $f = \Sigma(0,1,2,9,11,12,13, ,27, 28,29)$

Ponieważ najwyższa liczba dziesiętna w zbiorze to 29 (w zapisie binarnym 11101); wiemy stąd, że nasza funkcja ma 5 argumentów wejściowych. Tworzymy tablicę Karnaugha 3/2 (tab. 2.1) i wpisujemy w odpowiednie współrzędne (liczby dziesiętne ze zbioru w zapisie dwójkowym) wartości funkcji 1, w pozostałe 0.

Tablica 2.1

$x_1x_2x_3$ \ x_4x_5	00	01	11	10
000	1	1	0	1
001	0	0	0	0
011	1	1	0	0
010	0	1	1	0
110	0	0	1	0
111	1	1	0	0
101	0	0	0	0
100	0	0	0	0

Po zakreśleniu „pętelek” uzyskujemy następujące wyrażenie boolowskie, wypisując kolejno poziome, następnie pionowe owale:

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_5 + \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4x_5 + x_2x_3\bar{x}_4 + x_2\bar{x}_3x_4x_5$$

b) $f = \Sigma[4,5,10,11,15,18,20,24,26,30,31, (9,12,14,16,19,21,25)]$)(tab. 2.2).

Tablica 2.2

$x_1x_2x_3$ \ x_4x_5	00	01	11	10
000	0	0	0	0
001	1	1	0	0
011	–	0	1	–
010	0	–	1	1
110	1	–	0	1
111	0	0	1	1
101	1	–	0	0
100	–	0	–	1

$$f = \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_4 + x_1\bar{x}_3\bar{x}_5 + x_2x_3x_4$$

Zadanie 2.2

Uprościć następujące wyrażenie:

$$Y = (\bar{A} + \bar{B} + C + D)(A + \bar{B} + \bar{C} + D)(A + \bar{B} + C + D)(\bar{A} + B)(A + \bar{D})$$

Rozwiązanie

Nanosimy wyrażenie *Y* na tablicę Karnaugha 2/2 (liczba zmiennych 4 – *ABCD* – tab. 2.3) i upraszczamy tworząc pętelki obejmujące zera. Następnie wypisujemy rozwiązanie, dla kanonicznego iloczynu sum argumenty z 0 są proste, argumenty z 1 są zanegowane.

Tablica 2.3

CD \ *AB*	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	1	1	1
10	0	0	0	0

Po minimalizacji uzyskaliśmy następująca funkcję:

$$Y = (A + \bar{B})(\bar{A} + B)(A + \bar{D})(\bar{B} + C + D)$$

Zadanie 2.3

Funkcję boolowską opisaną zbiorami *F* i R zminimalizować metodą ekspansji.

F:	*R*:
00000	11101
11000	00010
11010	00110
01110	10001
11100	01100
01011	

Rozwiązanie

	k			
F:	1	00000	*R*:	11101
	2	11000		00010
	3	11010		00110
	4	01110		10001
	5	11100		01100
	6	01011		

Liczymy ekspansję K_1.

Ponieważ k_1 = (00000), to macierz blokująca B_1 jest identyczna z macierzą *R*.

	1 2 3 4 5			
B_1:	11101	~~1,2,3,5~~		
	00010	$\boxed{4}$	$\Rightarrow$	{4}, {1,5}, {2,3}
	00110	~~3,4~~		
	10001	1,5		
	01100	2,3		

Wypisujemy w każdym wierszu numery kolumn z jedynkami. Następnie wybieramy taki zbiór, który zapewni minimalne pokrycie kolumnowe. Do pokrycia wybieramy $L = \{3,4,5\}$; ($x_3\,x_4\,x_5$).

K_1^+ dla k_1=00000 będzie --000: $\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5$ $K_1^+ \geq K_2$ Pokryta została także kostka K_2

k_3	11010		1 2 3 4 5	
	11101	B_3:	00111	3,4,5
	00010		11000	1,2
R:	00110		11100	~~1,2,3~~
	10001		01011	2,4,5
	01100		10110	1,3,4

Minimalne pokrycie zapewnia L={1,5} (x_1 x_5)

K_3^+ = 1---0 = $x_1\bar{x}_5$ $K_3^+ \geq K_5$

Kostka K_3^+ pokrywa także K_5, do dalszych obliczeń zostają kostki K_4, K_6

k_4	01110		1 2 3 4 5	
	11101	B_4:	10011	~~1,4,5~~
	00010		01100	~~2,3~~
R:	00110		01000	2
	10001		11111	~~1,2,3,4,5~~
	01100		00010	4

Minimalne pokrycie zapewnia L={2,4}; (x_2 x_4)

K_4^+ = -1-1- = x_2x_4 $K_4^+ \geq K_6$

Zbierając wszystkie kostki pokrycia otrzymujemy funkcję minimalną:

$f = \bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 + x_1\bar{x}_5 + x_2x_4$

Zadanie 2.4

Dla funkcji F opisanej tablicą 2.4 zmienne niezbędne są x_4 oraz x_6. Należy wyznaczyć wszystkie minimalne zbiory argumentów, od których zależy ta funkcja oraz jej minimalne wyrażenie boolowskie z najmniejszą liczbą argumentów.

Tablica 2.4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	F
1	0	1	1	0	1	0	0	1
2	1	1	1	0	0	1	1	1
3	1	0	0	1	0	1	0	1
4	1	1	0	1	1	0	0	0
5	1	0	1	0	0	1	1	1
6	0	1	1	1	0	0	0	1
7	1	0	0	0	0	1	0	0
8	1	1	0	0	1	0	1	1
9	1	1	0	1	1	1	0	1
10	1	0	0	0	0	0	1	0
11	0	1	1	0	1	1	0	1
12	0	1	1	0	0	1	0	1

Rozwiązanie

$$P_4 = (\overline{1,2,5,7,8,10,11,12}; \overline{3,4,6,9})$$

$$P_6 = (\overline{1,4,6,8,10}; \overline{2,3,5,7,9,11,12})$$

$$P_F = (\overline{1,2,3,5,6,8,9,11,12}; \overline{4,7,10,})$$

$$P_4 \cdot P_6 | P_F = (\overline{(1,8)(10)}; \overline{(2,5,11,12)(7)}; \overline{(4)(6)}; \overline{(3)(9)})$$

Tablica porównań:

1,10	$\cancel{x_1x_2x_3x_5x_7}$
8,10	x_2x_5
4,6	$x_1x_3x_5$
2,7	$\cancel{x_2x_3x_7}$
5,7	x_3x_7
7,11	$\cancel{x_1x_2x_3x_5}$
7,12	$x_1x_2x_3$

Zapisujemy iloczyn sum wyrażeń, liczenie kontynuujemy w uproszczonym zapisie wg indeksów (wykorzystujemy własności algebry Boole'a: $(a + b)(a + c) = a + ac$, $a + ab = a$):

$(x_2+x_5)(x_1+x_3+x_5)(x_3+x_7)(x_1+x_2+x_3) = (1+3+25)(23+27+35+57) =$

$\cancel{123}+127+\cancel{135}+157+23+\cancel{237}+35+\cancel{357}+\cancel{235}+257+\cancel{235}+\cancel{257}$

Stąd minimalne rozwiązania: (2,3), (3,5), (1,2,7), (1,5,7), (2,5,7) + niezbędne 4,6. Rozwiązania minimalne z najmniejszą liczbą argumentów to $\{x_2x_3x_4x_6\}$, $\{x_3x_4x_5x_6\}$.

Zadanie 2.5

Dla funkcji F opisanej tablicą 2.5 zmienne niezbędne są x_5 oraz x_7. Należy wyznaczyć wszystkie (!!!) minimalne zbiory argumentów, od których zależy ta funkcja oraz jej minimalne wyrażenie boolowskie z najmniejszą liczbą argumentów.

Tablica 2.5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	F
1	1	0	0	0	1	0	1	0
2	0	1	1	1	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	1	1	0
4	1	1	0	1	1	0	0	1
5	1	0	1	0	0	1	1	0
6	1	1	1	0	1	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	1	1
8	1	1	0	1	0	1	0	0
9	1	1	0	1	1	0	1	0
10	1	0	0	0	0	1	0	1
11	0	1	1	1	0	0	1	0
12	0	1	1	0	0	0	1	0

Rozwiązanie

$$P_5 = (\overline{1,4,6,9}; \overline{2,3,5,7,8,10,11,12})$$

$$P_7 = (\overline{1,3,5,7,9,11,12}; \overline{2,4,6,8,10})$$

$$P_F = (\overline{1,2,3,5,6,8,9,11,12}; \overline{4,7,10})$$

$$P_5 \cdot P_7 | P_F = (\overline{(1,9)}; \overline{(4)(6)}; \overline{(7)(3,5,11,12)}; \overline{(2,8)(10)})$$

Tablica porównań

2,10	$\cancel{x_1x_2x_3x_4x_6}$
8,10	x_2x_4
4,6	x_3x_4
3,7	$\cancel{x_2x_3x_6}$
5,7	x_3x_6
7,11	$\cancel{x_1x_2x_3x_4}$
7,12	$x_1x_2x_3$

Tablica 2.6

	x_3	x_4	x_5	x_7	f
1	0	0	1	1	0
2	1	1	0	0	0
3	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
4	0	1	1	0	1
~~5~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~
6	1	0	1	0	0
7	0	0	0	1	1
8	0	1	0	0	0
9	0	1	1	1	0
10	0	0	0	0	1
11	1	1	0	1	0
~~12~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~

Zapisujemy iloczyn sum wyrażeń, liczenie kontynuujemy w uproszczonym zapisie wg. indeksów.

$$(x_4+x_2)(x_4+x_3)(x_3+x_6)(x_1+x_2+x_3) = (x_4+x_2x_3)(x_3+x_1x_6+x_2x_6) =$$

$$= x_3x_4+x_1x_4x_6+x_2x_4x_6+x_2x_3+\cancel{x_1x_2x_3x_6}+ \cancel{x_2x_3x_6}$$

Stąd wszystkie rozwiązania minimalno-argumentowe:

$x_3x_4x_5x_7$

$x_2x_3x_5x_7$

$x_2x_4x_5x_6x_7$

$x_1x_4x_5x_6x_7$

Tablica 2.7

x_3x_4 \ x_5x_7	00	01	11	10
00	1	1	0	–
01	0	–	0	1
11	0	0	–	–
10	–	0	–	0

Weźmy np. rozwiązanie pierwsze: $x_3x_4x_5x_7$. Przepisujemy tablicę prawdy (tab. 2.6) dla tych argumentów i wykreślamy wiersze identyczne. Z tab. 2.7 (tablica Karnaugha) odczytujemy rozwiązanie:

$$f = \bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 + x_4x_5\bar{x}_7$$

Zadanie 2.6

Dla funkcji F podanej w tablicy (tab. 2.8) obliczyć wszystkie minimalne zbiory argumentów, od których ta funkcja zależy. Zmienne niezbędne tej funkcji to: x_2, x_3, x_7.

Tablica 2.8

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	y_2
1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
2	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
3	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
4	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
5	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
6	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1
7	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0
8	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
9	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
10	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1

Rozwiązanie

$$P_F = \left(\overline{1,7,8}; \overline{2,4}; \overline{3,9,10}; \overline{5,6}\right)$$

$$P_2 \cdot P_3 \cdot P_7 = \left(\overline{1}; \overline{2,6,9}; \overline{3,4,8}; \overline{5,10}; \overline{7}\right);$$

$$P_2 \cdot P_3 \cdot P_7 | P_F = \left(\overline{(1)}; \overline{(2)(6)(9)}; \overline{(3)(4)(8)}; \overline{(5)(10)}\right)\overline{(7)}$$

Tablica porównań:

2|6	1,4,6
2|9	~~1,4,6,8,9~~
6|9	8,9
3|4	1,5,6,8
3|8	~~4,5,6,9~~
4|8	~~1,4,8,9~~
5|10	5,6,9

Wyrażenie boolowskie według indeksów zmiennych x_i:

(8 + 9)(1 + 4 + 6)(1+5 + 6 + 8)(5 + 6 + 9) = (18+48+68+19+49+69)(5+6+19+89)=

158+~~168~~+~~189~~+~~189~~+458+~~468~~+~~1489~~+489+~~568~~+68+~~1689~~+~~689~~+~~159~~+~~169~~+19+~~189~~+459+~~469~~+~~149~~+~~489~~+~~569~~
+69+~~169~~+~~689~~

Po redukcji otrzymujemy minimalne zbiory argumentów:

6 8 ∨ 6 9 ∨ 1 9 ∨ 1 5 8 ∨ 4 5 8 ∨ 4 5 9 ∨ 4 8 9

Uwzględniając zmienne niezbędne: 2 3 7, uzyskujemy minimalne zbiory o najmniejszej liczności:

x_1, x_2, x_3, x_7, x_9

x_2, x_3, x_6, x_7, x_8

x_2, x_3, x_6, x_7, x_9

Zadanie 2.7

Dla funkcji podanych w tablicy 2.9 zmienne niezbędne są: x_1 dla y_1 oraz x_4, x_9 dla y_2. Należy obliczyć minimalne (i o najmniejszej liczności) zbiory argumentów, od których zależą a) funkcje y_1, y_2 (łącznie), b) tylko y_2.

Tablica 2.9

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	y_2
1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
2	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	1	1	–	1	0	0	0
4	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1
5	0	–	0	1	1	1	1	0	0	0	0
6	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	–
7	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1
8	1	0	0	1	1	1	–	0	0	1	0
9	0	1	1	1	0	1	0	–	0	1	0

Rozwiązanie

Wyznaczamy minimalne zbiory argumentów łącznie dla y_1y_2.

Dla y_1 zmienną niezbędną jest: x_1 (wiersz 5 i 8), dla y_2 zmiennymi niezbędnymi są: x_4 (wiersz 7 i 9) i x_9 (wiersz 2 i 5). Ponieważ wyjścia traktujemy globalnie mamy łącznie zmienne niezbędne : x_1,x_4,x_9. Wyznaczamy podział wyjściowy dla y_1y_2:

$$P_F = (y_1, y_2) = \left(\frac{01}{1,2,4}; \frac{00}{3,5}; \frac{10}{6,8,9}; \frac{11}{6,7}\right)$$

Następnie wyznaczamy podział dla argumentów niezbędnych:

$$P_1 \cdot P_4 \cdot P_9 = \left(\overline{1,3,7}; \overline{2,6}; \overline{4,5,9}; \overline{8}\right);$$

Na podstawie uzyskanych podziałów wyznaczamy podział ilorazowy oddzielający różniące się wyjścia:

$$P_1 \cdot P_4 \cdot P_9 | P_F = \left(\overline{(1)(3)(7)}; \overline{(2)(6)}; \overline{(4)(5)(9)}; \overline{(8)}\right);$$

Obliczony podział ilorazowy pokazuje, które zmienne należą do jednego bloku $P_1 \cdot P_4 \cdot P_9$, ale do różnych bloków P_F. Należy zatem określić na jakich Pozycjach, czyli dla jakich zmiennych w tablicy prawdy różnią się odpowiadające im wektory. Tworzymy tablicę porównań wypisując z podziału ilorazowego pary, które należy rozróżnić oraz zmienne rozróżniające:

1,3 | $\cancel{x_2,x_3,x_5,x_8}$

1,7 | x_3,x_7

3,7 | x_2,x_5,x_8

2,6 | x_3,x_6,x_8

4,5 | x_6,x_7,x_8

4,9 | x_3,x_5,x_6

5,9 | $\cancel{x_3,x_5,x_7}$

Wkreślamy z tabeli zbiory, które zawierają inne podzbiory np. wykreślamy x_2,x_3,x_5,x_8, gdyż zawiera x_2,x_5,x_8.

Wyznaczyć zbiory minimalne możemy tworząc wyrażenie boolowskie :

(3 + 7)(2 + 5 + 8)(3 + 6 + 8)(6 + 7 + 8)(3 + 5 + 6) = (3 + 7) (3 + 6 + 58)(8 + (2 + 5) (6 + 7)) = (3 + ~~36 + 358 + 37~~ + 67 + 578)(8 + 26 + 27 + 56 + 57) = 38 + 236 + 237 +
+ 356 + 357 + 678 + 267 + ~~267~~ + 567 + ~~567~~ + ~~578 + 25678 + 2578 + 5678~~ + 578 = = 38 + 236 + 237 + 356 + 357 + 678 + 267 + 567 + 578

Tablica 2.10

	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8
1,7		1			1	
3,7	1		1			1
2,6		1		1		1
4,5				1	1	1
4,9		1	1	1		

Na tej podstawie wyznaczamy wszystkie minimalne rozwiązania.

$$\left.\begin{array}{l} x_3x_8 \\ x_2x_3x_6 \\ x_2x_3x_7 \\ x_2x_6x_7 \\ x_3x_5\,x_6 \\ x_3x_5\,x_7 \\ x_5x_6\,x_7 \\ x_5x_7\,x_8 \\ x_6x_7\,x_8 \end{array}\right\} \quad + \; x_1,x_4,x_9 \text{ (zmienne niezbędne)}$$

Minimalne zbiory argumentów możemy wyznaczyć także za pomocą tabeli pokrycia (tab. 2.10) wypisując odpowiednio pary do rozróżnienia oraz zmienne rozróżniające.

Z pokrycia kolumnowego mamy x_3x_8; $x_2x_3x_6$; $x_2x_3x_7$; $x_2x_6x_7$; $x_3x_5\,x_6$; $x_3x_5\,x_7$; $x_5x_6\,x_7$; $x_5x_7\,x_8$; $x_6x_7\,x_8$. Do każdego z tych zbiorów należy dołączyć zmienne niezbędne x_1,x_4,x_9.

Wszystkie uzyskane rozwiązania są minimalne, natomiast z najmniejszą liczbą argumentów rozwiązaniem dla funkcji y_1y_2 jest zbiór zmiennych $x_1x_3x_4x_8x_9$ znaczy to, iż funkcja zależy od pięciu zmiennych.

Tablica 2.11

```
.type fr
.i 8
.o 1
.p 12
01010101 1
01111101 1
10000110 1
10101001 1
10001111 1
10110010 1
10010001 1
00011001 0
01110100 0
10001101 0
10011001 0
11011011 0
.e
```

Zadanie 2.8

Dla funkcji F podanej w standardzie typu pla (tab. 2.11) należy obliczyć wszystkie minimalne zbiory argumentów zapewniające jednoznaczną reprezentację tej funkcji.

Rozwiązanie

Na wstępie należy obliczyć zmienne niezbędne. Jest to proces prosty, ale pracochłonny. Dlatego ograniczymy się do wykazania, że zmiennymi niezbędnymi są a_5, a_7. W tym celu w tablicy 2.12 tej funkcji zaznaczamy pary wektorów, w których zmienne różnią się wyłącznie na jednej pozycji. W tabl. 2.12 zaznaczone zostały (odpowiednimi kolorami) pary wektorów: u_5, u_{10} oraz u_7, u_{11}. Łatwo sprawdzić, że wektory u_5, u_{10} różnią się na pozycji a_7, natomiast u_7, u_{11} wyłącznie na pozycji a_5. Zatem a_5, a_7 są zmiennymi niezbędnymi.

Dalsze obliczenia mają na celu wyznaczenie zbiorów rozróżnialności dla par wektorów spełniających odpowiednie warunki podziału ilorazowego $P_I = P_5 \bullet P_7$ względem P_F:

$$P_5 = \left(\overline{1,3,6,7,9}; \overline{2,4,5,8,10,11,12}\right)$$

$$P_7 = \left(\overline{1,2,4,7,8,9,10,11}; \overline{3,5,6,12}\right)$$

$$P_F = (1,2,3,4,5,6,7; \overline{8,9,10,11,12})$$

$$P_I = P_5 \cdot P_7 = \left(\overline{1,7,9}; \overline{3,6}; \overline{2,4,8,10,11}; \overline{5,12}\right);$$

$$P_I | P_F = \left(\overline{(1,7)(9)}; \overline{(3,6)}; \overline{(2,4)(8,10,11)}; \overline{(5)(12)}\right)$$

Na podstawie uzyskanych podziałów wyznaczamy podział ilorazowy oddzielający różniące się wyjścia. Odpowiednie obliczenia podane są w tab. 2.13.

Tablica 2.12

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	F
u_1	0	1	0	1	0	1	0	1	**1**
u_2	0	1	1	1	1	1	0	1	**1**
u_3	1	0	0	0	0	1	1	0	**1**
u_4	1	0	1	0	1	0	0	1	**1**
u_5	1	0	0	0	1	1	1	1	**1**
u_6	1	0	1	1	0	0	1	0	**1**
u_7	1	0	0	1	0	0	0	1	**1**
u_8	0	0	0	1	1	0	0	1	**0**
u_9	0	1	1	1	0	1	0	0	**0**
u_{10}	1	0	0	0	1	1	0	1	**0**
u_{11}	1	0	0	1	1	0	0	1	**0**
u_{12}	1	1	0	1	1	0	1	1	**0**

Tablica 2.13

Pary	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	d	ZR
1,9	0	1	0	1	0	1	0	1	**1**	a_3a_8
	0	1	1	1	0	1	0	0	**0**	
7,9	1	0	0	1	0	0	0	1	**1**	$\cancel{a_1a_2a_3a_6a_8}$
	0	1	1	1	0	1	0	0	**0**	
2,8	0	1	1	1	1	1	0	1	**1**	$\cancel{a_2a_3a_6}$
	0	0	0	1	1	0	0	1	**0**	
2,10	0	1	1	1	1	1	0	1	**1**	$\cancel{a_1a_2a_3a_4}$
	1	0	0	0	1	1	0	1	**0**	
2,11	0	1	1	1	1	1	0	1	**1**	$\cancel{a_1a_2a_3a_6}$
	1	0	0	1	1	0	0	1	**0**	
4,8	1	0	1	0	1	0	0	1	**1**	$\cancel{a_1a_3a_4}$
	0	0	0	1	1	0	0	1	**0**	
4,10	1	0	1	0	1	0	0	1	**1**	a_3a_6
	1	0	0	0	1	1	0	1	**0**	
4,11	1	0	1	0	1	0	0	1	**1**	a_3a_4
	1	0	0	1	1	0	0	1	**0**	
5,12	1	0	0	0	1	1	1	1	**1**	$a_2a_4a_6$
	1	1	0	1	1	0	1	1	**0**	

Wyznaczone zbiory rozróżnialność (ZR) są zapisywane w wyrażeniu CNF: $(a_3+a_8)(a_3+a_6)(a_3+a_4)(a_2+a_4+a_6)$, które następnie jest wykorzystywane do obliczenia transformacji CNF->DNF:

$(a_3 + a_4)(a_3 + a_6)(a_3 + a_8)(a_2 + a_4 + a_6) = (a_3 + a_4a_6a_8)(a_2 + a_4 + a_6) = a_2a_3 + a_3a_4 + a_3a_6 + \cancel{a_2a_4a_6a_8} + a_4a_6a_8$

Uwzględniając zmienne niezbędne a_5, a_7 uzyskujemy minimalne zbiory argumentów (czyli tzw. redukty) funkcji podanej w tab. 2.11:

{a2,a3,a5,a7},

{a3,a4,a5,a7},

{a3,a5,a6,a7},

{a4,a5,a6,a7,a8}.

2.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 2.9

Metodą tablic Karnaugha zminimalizować funkcje $F(A,B,C,D)$:

a) $f(A,B,C,D) = \sum(1,4,5,10,12,14)$

b) $F = \sum[4,5,6,8,9,10,13(0,7,15)]$,

c) $F(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}BCD + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD +$

Zadanie 2.10

Funkcję:

$F = \{1, 5, 8, 12, 30\}$, $R = \{2, 6, 15, 18, 20, 27\}$.

zminimalizować metodą Karnaugha

Zadanie 2.11

Zminimalizować następujące zespoły trzech funkcji czterech zmiennych:

a)

$f_1 = \sum [2,3,5,6,7,11 (4,10,13)]$,

$f_2 = \sum [0,2,4,5,6,7 (3,8)]$,

$f_3 = \sum [3,4,6,7,15 (0,5,11)]$;

b)

$f_1 = \sum [4,5,6,7,10,11 (9)]$,

$f_2 = \sum [4,5,6,7,10,11 (15)]$,

$f_3 = \sum [4,5,6,7,10,11,12 (0)]$;

c)

$y_1 = \sum [0,1,2,6,10,15\ (7,14)]$,

$y_2 = \sum [2,5,7,10,14\ (6,9,15)]$,

$y_3 = \sum [3,6,7,10,15\ (2,4,14)]$;

d)

$y_1 = \sum [2,3,5,6,7,11\ (4,10,13)]$,

$y_2 = \sum [0,2,4,5,6,7\ (3,8)]$,

$y_3 = \sum [3,4,6,7,15\ (0,5,11)]$;

e)

$f_1 = \sum [2,3,10,11,15\ (4,7,12)]$,

$f_2 = \sum [2,3,5,7,10,14,15\ (8,11)]$,

$f_3 = \sum [1,2,3,7,10,11\ (4,15)]$.

Zadanie 2.12

Zrealizować funkcję czterech zmiennych $f = \sum [3,5,6,7,9,10,13,15\ (0,14)]$ na elementach:

a) NOR

b) NAND

używając minimalnej liczby funktorów.

Zadanie 2.13

Podać minimalną realizację funkcji pięciu zmiennych:

$F^1 = \{1,2,3,4,7,24,26\}$, $F^0 = \{5,6,8,10,11\}$,

a) na elementach AND, OR, NOT,

b) na elementach NAND.

Zadanie 2.14

Dana jest kostka k_i z macierzy F oraz macierz R. Znaleźć implikant (lub implikanty) prosty (-e) dla kostki k_i. Podać wszystkie rozwiązania.

k_i: 0 1 0 1 1

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Zadanie 2.15

Funkcję f:

F = {2, 6, 10, 12, 23, 27},

R = {1, 5, 16, 20, 30}

zminimalizować systematyczną metodą ekspansji.

Zadanie 2.16

Funkcję boolowską opisaną zbiorami F i R zminimalizować

a) systematyczną metodą ekspansji,
b) metodą Karnaugha,

F:	00000	R:	11100
	11000		00010
	11010		00110
	01110		10001
	11101		01100
	01011		

Zadanie 2.17

Funkcję boolowską opisaną zbiorami F i R zminimalizować uproszczoną metodą ekspansji.

F:	10000	R:	01100
	01000		00010
	01010		00110
	11110		10001
	01101		11101
	11011		

Zadanie 2.18

Funkcję boolowską opisaną zbiorami F i R zminimalizować uproszczoną metodą ekspansji.

R:	10100	*F*:	10111
	10001		01000
	11100		01010
	11111		10001
	00110		00110
	01101		

Zadanie 2.19

Funkcje opisane zbiorami *F*, *R*:

a) *R* = 0, 2, 3, 6, 7, 9, 11, 13, 18, 25
F = 4, 5, 21, 23, 24, 26, 27, 29

b) *R* = 0, 3, 5, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 26
F = 12,13, 17, 18, 19, 21, 29, 31

zminimalizować uproszczoną metodą ekspansji

Zadanie 2.20

Zaprojektować układ kombinacyjny porównując dwie liczby binarne *a* i *b*, przy czym a, $b \in \{0,1,2,3\}$. Projekt przeprowadzić dla dwóch wariantów:

a) $y = 1$, jeśli $a > b$; $y = 0$, jeśli $a < b$; *y* jest nieokreślone, jeśli $a = b$;
b) $y = 1$, jeśli $a \geq b$; $y = 0$, jeśli $a < b$.

Założyć, że do realizacji można użyć tylko elementów AND, OR, NOT.

Zadanie 2.21

Dla funkcji y podanej w tablicy 2.14 obliczyć wszystkie minimalne zbiory argumentów, od których ta funkcja zależy: Zmienną niezbędną tej funkcji jest x_4. Dla najmniejszego zbioru argumentów obliczyć minimalne wyrażenie boolowskie typu suma iloczynów.

Tablica 2.14

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y
1	1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	1	1	0	1	0
3	0	0	0	1	1	0	0
4	1	0	0	1	1	0	0
5	1	0	0	0	1	0	1
6	1	0	1	1	0	0	1
7	1	0	1	0	1	1	1
8	0	1	0	1	0	1	1

Zadanie 2.22

Dla funkcji *y* podanej w tablicy 2.15 zmienne niezbędne są: x_3, x_5. Należy obliczyć wszystkie minimalne zbiory argumentów, od których zależy funkcja y. Dla rozwiązania zawierającego zmienną x_6 obliczyć – metodą Karnaugha – minimalne wyrażenie boolowskie typu suma iloczynów .

Tablica 2.15

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1
2	1	1	1	0	1	1`	0	0	0	1
3	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
4	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
5	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0
6	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
7	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1
8	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1
9	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0

Zadanie 2.23

Dla funkcji *f* podanej w tablicy 2.16 należy obliczyć wszystkie minimalne zbiory argumentów. Przyjąć, że zmienne niezbędne (tzw. rdzeń) są: x_1, x_6. Jedną z funkcji z minimalną i najmniejszą liczbą argumentów zminimalizować metodą Karnaugha.

Tablica 2.16

k	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	*F*
1	1	1	0	0	0	1	0	1
2	0	0	0	1	1	0	1	1
3	1	1	1	1	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0	1	1	0
5	1	1	1	0	1	0	0	1
6	0	1	0	1	1	1	0	1
7	1	1	0	0	0	0	0	0
8	0	1	1	1	0	0	1	1
9	1	1	0	1	0	1	1	1
10	0	1	1	0	0	0	0	0
11	1	0	0	1	1	0	1	1
12	1	0	0	1	1	0	0	1

Zadanie 2.24

Dla funkcji y_1, y_2 podanych w tablicy 2.17 obliczyć minimalne i o najmniejszej liczności zbiory argumentów, od których te funkcje zależą. Zmienne niezbędne tej funkcji to: x_1, x_5, x_8.

Tablica 2.17

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	y_2
1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	–	1
2	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1
3	0	1	1	–	0	0	0	1	1	1	0
4	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
5	0	–	0	1	1	0	0	1	0	1	0
6	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	–
7	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
8	1	1	0	–	1	0	0	1	0	0	0
9	0	0	1	0	1	1	0	1	–	0	0

Zadanie 2.25

Dla funkcji podanych w tablicy 18, zmienne niezbędne są: x_3 dla y_1 oraz x_6 dla y_2. Należy obliczyć minimalne (i o najmniejszej liczności) zbiory argumentów, od których zależą a) funkcje y_1, y_2 (łącznie), b) tylko y_2.

Tablica 2.18

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	y_2
1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0
2	0	1	1	0	–	1	1	1	1	–	1
3	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1
4	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1
5	1	–	1	0	0	0	1	1	0	0	1
6	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
7	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
8	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	–
9	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	–

3. Dekompozycja funkcji boolowskich

3.1. Zadania z rozwiązaniami

Zadanie 3.1

Dla funkcji binarnej f podanej w tablicy 3.1 należy wyznaczyć dekompozycję:

$f = H(x_2, G_1(x_1, x_5), G_2(x_3, x_4))$.

Tablica 3.1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	0
3	0	1	0	1	0	0
4	0	1	1	1	1	0
5	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	1	1	1
7	0	1	0	0	0	1
8	0	1	1	0	1	1
9	1	1	0	1	0	1
10	1	0	0	1	1	1
11	1	0	0	1	0	1

Rozwiązanie

a) ***H*(*G*(x_1, x_5), x_2, x_3, x_4),**

Tworzymy tablicę Karnaugha (tab. 3.2) dla $x_2x_3x_4/x_1x_5$.

Tablica 3.2

$x_2\ x_3\ x_4$ \ x_1x_5	00	01	11	10
000	0			
001		1	1	1
011		0		
010				
110	0	1		
111		0		
101	0			1
100	1			
	k_1	k_2	k_3	k_4

Możemy skleić kolumny {k1, k3} {k2, k4} (tab. 3.3).

Wprowadzamy nowe kodowanie dla sklejonych kolumn:

Tab.G1:

x_1x_5	g_1
0 0	0
0 1	1
1 1	0
1 0	1

Tablica 3.3

$x_2\ x_3\ x_4$ \ g_1	**0** 11 00	**1** 10 01
000	0	–
001	1	1
011	–	0
010	–	–
110	0	1
111	–	0
101	0	1
100	1	–
	k1/3	k2/4

b) $H(x_2, g_1, G(x_3, x_4))$,

Tablica 3.4

x_2g_1 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	–	–
01	–	1	0	–
11	–	1	0	1
10	1	0	–	0
	k1	k2	k3	k4

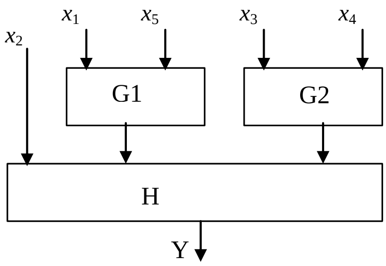
Liczymy dalszą dekompozycję, w tym celu jako bezpośrednie wejście do h bierzemy g_1 i x_2, natomiast argumenty x_3x_4 będą wchodziły do drugiego bloku G_2 (tab. 3.4).

Możemy skleić kolumny $\{k_1,k_3\}$ $\{k_2,k_4\}$. Wprowadzamy nowe kodowanie dla sklejonych kolumn g_2: 0,1:

Tablica G2:

x_3x_4	g_2
0 0	0
0 1	1
1 1	0
1 0	1

Pokazano to w tab. 3.5. Tablicę prawdy dla bloku H pokazano w tab. 3.6, a schemat blokowy dekompozycji na rys. 3.1.



Rys. 3.1. Schemat dekompozycji z zad. 3.1

Tablica 3.5

x_2g_1 \ g_2	**0** 11 00	**1** 10 01
00	0	1
01	0	1
11	0	1
10	1	0
	k1	k2

Tablica 3.6

g_1g_2 \ x_2	y
000	0
001	1
011	1
010	0
110	0
111	1
101	0
100	1

Zadanie 3.2

Dla funkcji F:

F^0 = 0, 2, 3, 6, 7, 9, 11, 13, 18, 25

F1 = 4, 5, 21,23, 24, 26, 27, 29

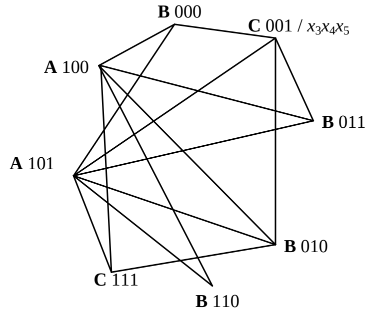
obliczyć dekompozycję $F = H(x_1, x_2, G(x_3,x_4,x_5))$, z minimalną liczbą wyjść bloku G. W rozwiązaniu podać: tablice prawdy i minimalne wyrażenia boolowskie dla funkcji G oraz H.

Rozwiązanie

Tworzymy tablicę Karnaugha dla $x_1x_2/x_3x_4x_5$ (tab. 3.7).

Tablica 3.7

x_1x_2 \ $x_3x_4x_5$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	–	0	0	0	0	1	1
01	–	0	0	–	–	–	0	–
11	1	0	1	1	–	–	1	–
10	–	–	–	0	–	1	1	–
	1	2	3	4	5	6	7	8



Rys. 3.2. Graf do zad. 3.2

Sklejamy kolumny (rys. 3.2):

A 101, 100

B 000, 011, 010, 110

C 001, 111

Wprowadzamy nowe kodowanie (tab.3.8), co prowadzi do tablic *G* i *H* (tab. 3.9).

Tablica 3.9

x_1,x_2,x_3 \ x_4,x_5	00	01	11	10
000	1	2	3	–
001	–	–	4	5
010	6	–	7	8
111	9	10	11	12
101	13	14	15	16

Tablica 3.8

G

$x_3x_4x_5$	g_1g_2
000	01
001	11
011	01
010	01
110	01
111	11
101	00
100	00

H

$x_1x_2g_1g_2$	*F*
0000	1
0001	0
0011	0
0100	0
0101	0
0111	0
1100	1
1101	1
1111	0
1000	1
1001	0
1011	1

Zadanie 3.3

Wykazać, że funkcja z tablicy 3.10, w której:

$$P_F = \left(\overline{1,8,12,14}; \overline{2,7,10,16}; \overline{6,9,13}; \overline{3,5,11}; \overline{4}\right)$$

nie ma żadnej dekompozycji dla $U = \{x_1, x_4, x_5\}$.

Tablica 3.10

	A	B	C	
x_1x_2 \ g_1g_2	00	01	11	10
00	1	0	0	–
01	0	0	0	–
11	1	1	0	–
10	1	0	1	–

Rozwiązanie

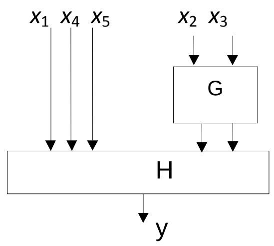
$P_F = \left(\overline{1,8,12,14}; \overline{2,7,10,16}; \overline{6,9,13}; \overline{3,5,11}; \overline{4}\right)$

$P_U = P(x_1, x_4, x_5) = \left(\overline{1,6}; \overline{9,13}; \overline{2}; \overline{10,14}; \overline{3,4,7}; \overline{11,15}; \overline{5,8}; \overline{12,16}\right)$

$P_U | P_F = \left(\overline{(1)(6)}; \overline{(9,13)}; \overline{(2)}; \overline{(10)(14)}; \overline{(3)(4)(7)}; \overline{(11,15)}; \overline{(5)(8)}; \overline{(12)(16)}\right)$; $r = 5$

$r = 3 + \lceil \log_2 3 \rceil = 3 + 2 = 5$

Zatem nie istnieje dekompozycja dla $U = \{x_1, x_4, x_5\}$ (rys. 3.3).



Rys. 3.3. Schemat dekompozycji do zad. 3.3

Zadanie 3.4

W tablicy 3.11 dana jest funkcja *f*(*a,b,c,d,e*) dla której:

$$P_F = \left(\overline{1,10,17}; \overline{5,7,19}; \overline{6,8,14}; \overline{3,12,16}; \overline{2,13}; \overline{4,15}; \overline{9,18}; \overline{11,20}\right)$$

Tablica 3.11

de / *a b c*	00	01	11	10
0 0 0	1	2	–	3
0 0 1	4	5	6	–
0 1 1	–	7	8	9
0 1 0	10	–	11	12
1 1 0	–	13	14	–
1 1 1	15	–	–	16
1 0 1	17	–	–	18
1 0 0	–	19	20	–

Należy obliczyć dekompozycję nierozłączną dla $U = \{d, e\}$. W rozwiązaniu podać tablice funkcji *G* oraz *H*. Kodowanie bloków P_F przyjąć dowolne wg NKB.

Rozwiązanie

$U = \{d, e\}$ $V = \{a, b, c\}$ $W =$?

$P_F = \left(\overline{1,10,17}; \overline{5,7,19}; \overline{6,8,14}; \overline{3,12,16}; \overline{2,13}; \overline{4,15}; \overline{9,18}; \overline{11,20}\right)$

$P(U) | P_F = \left(\overline{(1,10,17)(4,15)}; \overline{(5,7,19)(2,13)}; \overline{(6,8,14)(11,20))}; \overline{(3,12,16)(9,18)}\right)$

$P_V = P(V) = \left(\overline{1,2,3}; \overline{4,5,6}; \overline{7,8,9}; \overline{10,11,12}; \overline{13,14}; \overline{15,16}; \overline{17,18}; \overline{19,20}\right)$

Tworzenie podziału Π_G:

$\overline{1,2,3}$	$\overline{4,5,6}$
$\overline{10,11,12}$	$\overline{15,16}$
$\overline{17,18}$	$\overline{7,8,9}$
$\overline{13,14}$	$\overline{19,20}$

Obliczanie zbioru *C*:

15/16 *d*

17/18 *d* czyli: *F*= *H*(*d*, *e*, *g*(*a*, *b*, *c*, *d*))

19/20 *d*

Dla dekompozycji nierozłącznej:

$$P'_V = P(V,W) = (P(a,b,c,d) = \left(\overline{1,2}; \overline{3}; \overline{4,5}; \overline{6}; \overline{7}; \overline{8,9}; \overline{10}; \overline{11,12}; \overline{13}; \overline{14}; \overline{15}; \overline{16}; \overline{17}; \overline{18}; \overline{19}; \overline{20}\right)$$

$$\Pi_G = \left(\overline{1,2,3,10,11,12,13,16,17,20}; \overline{4,5,6,7,8,9,14,15,18,19}\right)$$

$$P(H) = (P(U) \cdot \Pi_G = P(d,e) \cdot \Pi_G == \left(\overline{1,4,10,15,17}; \overline{2,5,7,13,19}; \overline{6,8,11,14,20}; \overline{3,9,12,16,18}\right) \cdot$$
$$\left(\overline{1,2,3,10,11,12,13,16,17,20}; \overline{4,5,6,7,8,9,14,15,18,19}\right) =$$
$$\left(\overline{1,10,17}; \overline{4,15}; \overline{2,13}; \overline{5,7,19}; \overline{6,8,14}; \overline{11,20}; \overline{3,12,16}; \overline{9,18}\right)$$

Tablica 3.13 ***G***

	abcd	*g*
12	0000	0
3	0001	0
45	0010	1
6	0011	1
7	0110	1
8,9	0111	1
10	0100	0
11,12	0101	0
13	1100	0
14	1101	1
15	1110	1
16	1111	0
17	1010	0
18	1011	1
19	1000	1
20	1001	0

Tablica 3.12 ***H*. (*F* wg dowolnego NKB)**

	deg	$y_1y_2y_3$
1,10,17	000	000
4,15	001	001
2,13	010	010
5,7,19	011	011
6,8,14	110	111
11,20	111	110
3,12,16	100	101
9,18	101	100

Zadanie 3.5

Dla funkcji F podanej w tablicy 3.14 znaleźć dekompozycję o strukturze jak na rysunku 3.4. W rozwiązaniu podać tablice prawdy funkcji G1, G0 oraz H.

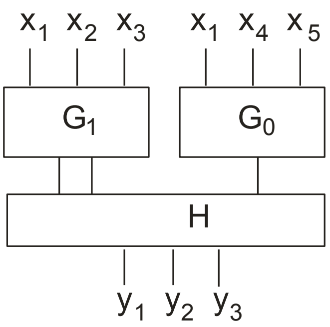
Wskazówki:

a) najpierw obliczyć dekompozycję $H(x_1,x_2,x_3,G_0(x_1,x_4,x_5))$;

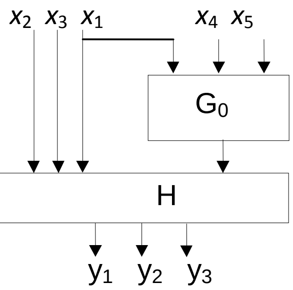
b) podział Π_G przy obliczaniu bloku G_0 należy dobrać stosownie do dalszej dekompozycji.

Tablica 3.14

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	0	1	0
3	0	1	0	1	0	1	0	0
4	0	1	1	1	1	0	1	1
5	0	1	1	0	1	0	0	1
6	0	1	0	0	0	0	0	1
7	1	1	0	1	0	0	0	0
8	1	0	0	1	1	1	0	0
9	1	0	0	1	0	0	0	1
10	1	0	1	1	1	0	0	0



Rys. 3.4. Schemat dekompozycji



Rys. 3.5.

Rozwiązanie 1

$U = \{x_1, x_2, x_3\}$ $V = \{x_1, x_4, x_5\}$ (rys. 3.5)

$$P_F = (\overline{1{,}7{,}10}; \overline{2}; \overline{3{,}8}; \overline{4}; \overline{5{,}6{,}9})$$

$$P_U = P(x_1, x_2, x_3) = (\overline{1{,}2}; \overline{3{,}6}; \overline{4{,}5}; \overline{7}; \overline{8{,}9}; \overline{10})$$

$$P_U|P_F = (\overline{(1)(2)}; \overline{(3)(6)}); \overline{(4)(5)}; \overline{(7)}; \overline{(8)(9)}; \overline{(10)})$$

$$P_V = P(x_1, x_4, x_5) = (\overline{1{,}6}; \overline{2{,}4}; \overline{3}; \overline{5}; \overline{7{,}9}; \overline{8{,}10})$$

Tablica 3.15. Funkcja G_0

	x_1, x_4, x_5	g
1,6	000	0
5	001	0
8,10	111	0
2,4	011	1
3	010	1
7,9	110	1

Tworzenie podziału Π_{G_0} (funkcja G_0, tab. 3.15):

$$\begin{array}{c|c} \overline{1{,}6} & \overline{2{,}4} \\ \overline{5} & \overline{3} \\ \overline{8{,}10} & \overline{7{,}9} \end{array}$$

$$\Pi_{G_0} = (\overline{1{,}5{,}6{,}8{,}10}; \overline{2{,}3{,}4{,}7{,}9})$$

$$\Pi_{G_0}|P_F = (\overline{(1{,}10)(5{,}6)(8)}; \overline{(2)(3)(4)(7)(9)}),$$ $r = 1 + \lceil \log 25 \rceil = 1+3=4$

Zatem przewidywane są 3 wyjścia z bloku G_1 i nie istnieje dekompozycja (rys. 3.5):

$$P_{V_1} = P(x_1, x_2, x_3) = \left(\overline{1,2}; \overline{3,6}; \overline{4,5}; \overline{7}; \overline{8,9}; \overline{10}\right)$$

Tworzenie podziału Π_{G_1}:

2	3	4	7	9
$\overline{1,2}$	$\overline{3,6}$	$\overline{4,5}$	$\overline{7}$	$\overline{8,9}$
			$\overline{10}$	

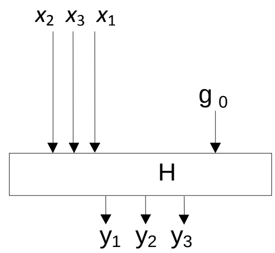
Π_{G_0} na trzech bitach – dekompozycja nie istnieje

Rozwiązanie 2

Wracamy do tworzenia podziału Π_{G_0}. Zamieniamy miejscami 7,9 i 8,10, ponieważ pary te „zależą" tylko od siebie – można je zamienić miejscami bez wpływu na pozostały podział:

$\overline{1,6}$	$\overline{2,4}$
$\overline{5}$	$\overline{3}$
$\overline{7,9}$	$\overline{8,10}$

$\Pi_{G_0} = \left(\overline{1,5,6,7,9}; \overline{2,3,4,8,10}\right)$, (tab. 3.16, rys. 3.6)



Rys. 3.6.

Tablica 3.16. Funkcja G_0

	x_1, x_4, x_5	g_0
1,6	000	0
5	001	0
7,9	110	0
2,4	011	1
3	010	1
8,10	111	1

$$P(U_1) = \Pi_{G_0} | P_F = \left(\overline{(1,7)(5,6,9)}; \overline{(2)(3,8)(4)(10)}\right)$$

$r = 1 + \lceil \log_2 4 = 1 + 2 = 3$

$$P_{V_1} = P(x_1, x_2, x_3) = \left(\overline{1,2}; \overline{3,6}; \overline{4,5}; \overline{7}; \overline{8,9}; \overline{10}\right)$$

Bloki rozłączne z $P(U_1) | P_F$

$\overline{1,7}$	$\overline{5,6,9}$		
$\overline{2}$	$\overline{3,8}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$

Ponowne tworzenie podziału Π_{G_1}:

1,2	3,6	4,5	
7	8,9		10

$\Pi_{G_1} = \left(\overline{1,2,7}; \overline{3,6,8,9}; \overline{4,5}; \overline{10}\right)$ (tab. 3.17)

$P_H = P(U) \cdot \Pi_{G_1} = \left(\overline{1,5,6,7,9}; \overline{2,3,4,8,10}\right) \cdot \left(\overline{1,2,7}; \overline{3,6,8,9}; \overline{4,5}; \overline{10}\right) = \left(\overline{1,7}; \overline{2}; \overline{6,9}; \overline{3,8}; \overline{5}; \overline{4}; \overline{10}\right)$ (tab. 3.18)

Tablica 3.18. Tablica G_1

	$x_1x_2x_3$	g_1g_2
1,2,7	000	00
3,6,8,9	010	01
4,5	011	11
10	101	10

Tablica 3.17. Tablica H

	$g_0g_1g_2$	$y_1y_2y_3$
1,7	000	000
2	100	010
6,9	001	001
3,8	101	100
5	011	001
4	111	011
10	110	000

Zadanie 3.6

Dla funkcji F z tablicy 3.19 zbiory podziałów $\{P_1, P_2\}$, $\{P_1, P_4\}$, $\{P_1, P_5\}$,$\{P_2, P_3\}$,$\{P_2, P_4\}$, $\{P_3, P_4\}$,$\{P_3, P_5\}$, $\{P_4, P_5\}$ są 4-przydatne. Obliczyć wszystkie najlepsze dekompozycje szeregowe tej funkcji dla $U = \{x_i, x_j, x_k\}$, czyli $F = H(x_i, x_j, x_k, G_0)$. Wykazać, że dla żadnej z nich nie istnieje dekompozycja $F = H(G_1(x_i, x_j, x_k), G_0)$.

Tablica 3.19

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3
1	0	0	0	1	1	1	0	0
2	0	0	0	1	0	1	0	1
3	0	1	1	0	0	0	1	1
4	0	1	1	0	1	0	1	0
5	1	1	0	0	0	0	0	1
6	1	1	0	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	0	1	0	1
8	1	1	1	1	0	0	1	0
9	1	0	0	0	1	1	1	1
10	1	0	0	1	1	1	0	0
11	1	0	0	1	0	1	0	1

Rozwiązanie

$$P_F = \left(\overline{1,10}; \overline{2,7,11}; \overline{3}; \overline{4,8}; \overline{5}; \overline{6}; \overline{9};\right)$$

Mamy następujące trójki podejrzane o $r = 3$

$A=\{x_1,x_2,x_4\}$, $B=\{x_1,x_4,x_5\}$ $C=\{x_2,x_3,x_4\}$

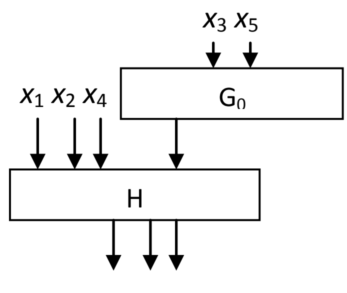
$$P(A)|P_F = P_1 \cdot P_2 \cdot P_4|P_F = \left(\overline{(1)(2)}; \overline{(3)(4)}; \overline{(5)(7)}; \overline{(6)(8)}; \overline{(9)}; \overline{(10)(11)}\right) \quad r = 3+1$$

$$P(B)|P_F = P_1 \cdot P_4 \cdot P_5|P_F = \left(\overline{(1)}; \overline{(2)}; \overline{(3)}; \overline{(4)}; \overline{(5)(7)}; \overline{(6)(8)(11)}; \overline{(9)}; \overline{(10)}\right) \quad r = 3+2$$

$$P(C)|P_F = P_2 \cdot P_3 \cdot P_4|P_F = \left(\overline{(1,10)(2,11)}; \overline{(3)(4)(7)}; \overline{(5)}; \overline{(6)}; \overline{(8)}; \overline{(9)}\right) \quad r = 3+2$$

Najlepszy zbiór $U = \{x_1, x_2, x_4\}$ (rys. 3.7)

$$P_V = P(x_3, x_5) = \left(\overline{1,9,10}; \overline{2,5,6,11}; \overline{3,7,8}; \overline{4};\right)$$



Rys. 3.7

Z $P_U|P_F$ Tworzenie podziału Π_{G_0}:

1	2
3	4
5	7
6	8
10	11

$\overline{1,9,10}$	$\overline{2,5,6,11}$
$\overline{3,7,8}$	$\overline{4}$

Tablica 3.20. Tablica *G*

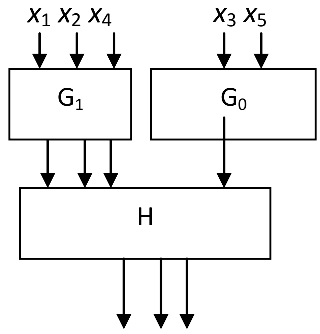
	x_3x_5	g_0
1,9,10	01	0
2,5,6,11	00	1
3,7,8	10	0
4	11	1

$\Pi_{G_0} = \left(\overline{1,3,7,8,9,10}; \overline{2,4,5,6,11}\right)$ (tab. 3.20)

$$P_H = P(U) \cdot \Pi_{G_0} = \left(\overline{1,2}; \overline{3,4}; \overline{5,7}; \overline{6,8}; \overline{9}; \overline{10,11}\right) \cdot \left(\overline{1,3,7,8,9,10}; \overline{2,4,5,6,11}\right) = \left(\overline{1}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{4}; \overline{5}; \overline{6}; \overline{7}; \overline{8}; \overline{9}; \overline{10}; \overline{11}\right)$$

Tablica 3.21. Tablica H

	$x_1x_2x_4g_0$	$y_1y_2y_3$
1	0010	100
2	0011	101
3	0100	011
4	0101	010
5	1101	001
6	1111	000
7	1100	101
8	1110	010
9	1000	111
10	1010	100



Rys. 3.8.

Sprawdzamy czy istnieje dekompozycja $F = H(G_1(x_i, x_j, x_k), G_0)$ (rys. 3.8)

$$P(U_1)|P_F = \Pi_{G_0}|P_F = \left(\overline{(1,10)(3)(7)(8)(9)}; \overline{(2,11)(4)(5)(6)}\right) \quad r = 1{+}3$$

Nie istnieje taka dekompozycja.

Zadanie 3.7

Dla funkcji F z tablicy 3.22 należy obliczyć wszystkie możliwe dekompozycje z minimalną liczbą wejść do bloku H. Należy uzasadnić, że podane rozwiązania wyczerpują wszystkie możliwości. W rozwiązaniu m.in. podać tablice prawdy funkcji H oraz funkcji G. Wskazówka: wykorzystać fakt, że spośród par x_i, x_j, tylko pary x_1, x_3, oraz x_3, x_5 zapewniają minimalną liczbę wejść do bloku H.

Tablica 3.22

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2
1	0	0	0	1	1	0	0
2	0	0	0	1	0	1	0
3	0	1	1	0	0	0	1
4	0	1	1	0	1	0	0
5	0	1	1	1	0	0	1
6	1	1	0	0	0	0	0
7	1	1	0	1	0	0	0
8	1	1	1	0	0	1	0
9	1	1	1	1	0	0	1
10	1	0	0	0	1	0	1
11	1	0	0	1	1	0	0
12	1	0	0	1	0	0	0

Rozwiązanie

$$P_F = \left(\overline{1{,}4{,}6{,}7{,}11{,}12};\overline{2{,}8};\overline{3{,}5{,}9{,}10}\right)$$

$U_A = \{x_1,x_3\}$ $U_B = \{x_3,x_5\}$

A) $U_A = \{x_1,x_3\}$

$$P(U_A)|P_F = P_1 \cdot P_3|P_F = \left(\overline{(1{,}2)};\overline{(3{,}5)(4)};\overline{(6{,}7{,}11{,}12)(10)};\overline{(8)(9)}\right) \qquad r = 2+1$$

$$P_{V_A} = P(x_2,x_4,x_5) = \left(\overline{1{,}11};\overline{2{,}12};\overline{3{,}6{,}8};\overline{4};\overline{5{,}7{,}9};\overline{10}\right)$$

Z $P_A|P_F$ Tworzenie podziału Π_{G_0}:

1	2
3,5	4
6,7,11,12	10
8	9

$\overline{1{,}11}$	$\overline{2{,}12}$
$\overline{3{,}6{,}8}$	$\overline{4}$
$\overline{5{,}7{,}9}$	$\overline{10}$

2 | 12 rozróżnia x_1

3 | 8 x_1

6 | 8 x_3

<u>Dekompozycja nie istnieje</u>

B) $U_B = \{x_3,x_5\}$

$$P(U_B)|P_F = P_3 \cdot P_5|P_F = \left(\overline{(1{,}11)(10)};\overline{(2)(6{,}7{,}12)};\overline{(3{,}5{,}9)(8)};\overline{(4)}\right) \qquad r = 2+1$$

$$P_{V_B} = P(x_1,x_2,x_4) = \left(\overline{1{,}2};\overline{3{,}4};\overline{5};\overline{6{,}8};\overline{7{,}9};\overline{10};\overline{11{,}12}\right)$$

Z $P_A|P_F$ Tworzenie podziału Π_{G_0}:

1,11	10
2	6,7,12
3,5,9	8

$\overline{1{,}2}$	$\overline{10}$
$\overline{11{,}12}$	$\overline{6{,}8}$
$\overline{3{,}4}$	$\overline{7{,}9}$
$\overline{5}$	

11 | 12 rozróżnia x_5

7 | 9 x_3

<u>Dekompozycja nie istnieje</u>

Inna możliwość

$$P_F = \left(\overline{1{,}4{,}6{,}7{,}11{,}12};\overline{2{,}8};\overline{3{,}5{,}9{,}10}\right)$$

$V_A = \{x_1,x_3\}$ $U_A = \{x_2,x_4,x_5\}$ $V_B = \{x_3,x_5\}$ $U_B = \{x_1,x_2,x_4\}$

a) UA={x2,x4,x5}

$$P(U_A)|P_F = \left(\overline{(1)(11)};\overline{(2)(12)};\overline{(3)(6)(8)};\overline{(4)};\overline{(5{,}9)(7)};\overline{(10)}\right) \qquad r = 3+2$$

b) UB={x1,x2,x4} (rys. 3.9)

$$P(U_B)|P_F = \left(\overline{(1,2)}; \overline{(3)(4)}; \overline{5}; \overline{(6)(8)}; \overline{(7)(9)}; \overline{(10)}; \overline{(11,12)}\right) \qquad r = 3+1$$

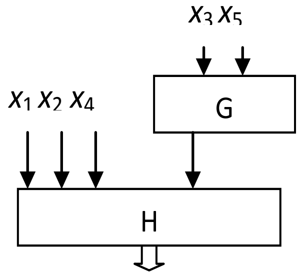
$$P_{V_B} = P(x_3, x_5) = \left(\overline{1,10,11}; \overline{2,6,7,12}; \overline{3,5,8,9}; \overline{4}\right)$$

Z P_A/P_F

1	2
3	4
6	8
7	9
11	12

Tworzenie podziału Π_{G_0}:

$\overline{1,10,11}$	$\overline{2,6,7,12}$
$\overline{3,5,8,9}$	$\overline{4}$



Rys. 3.9.

$$\Pi_G = \left(\overline{1,3,5,8,9,10,11}; \overline{2,4,6,7,12}\right)$$

$$P_H = P(U) \cdot \Pi_{G_0} = \left(\overline{1,2}; \overline{3,4}; \overline{5}; \overline{6,8}; \overline{7,9}; \overline{10}; \overline{11,12}\right) \cdot \left(\overline{1,3,5,8,9,10,11}; \overline{2,4,6,7,12}\right) =$$

$$\left(\overline{1}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{4}; \overline{5}; \overline{6}; \overline{7}; \overline{8}; \overline{9}; \overline{10}; \overline{11}\right)$$ (tab. 3.24)

Tablica 3.23. G

	x_3x_5	g
1,10,11	01	0
2,6,7,12	00	1
3,5,8,9	10	0

Tablica 3.24. H

	$x_1x_2x_4g$	Y
1	0010	00
2	0011	10
3	0100	01
4	0101	00
5	0110	01
8	1100	10
6	1101	00
9	1110	01
7	1111	00
10	1000	01
11	1010	00
12	1011	00

Zadanie 3.8

Dla funkcji z tablicy 3.25 podziały P_1, P_2, P_5 są 3-przydatne, a P_3, P_4 – 4-przydatne. Należy obliczyć wszystkie dekompozycje szeregowe z najmniejsza liczbą wejść do bloku *H* oraz najmniejszą liczbą wejść i wyjść bloku *G*. <u>Uwaga:</u> wystarczy obliczyć odpowiednie podziały Π_G spełniające warunek wystarczający dekompozycji.

W rozwiązaniu podać też schematy blokowe obliczonych dekompozycji, w szczególności wejścia i wyjścia bloków *G* i *H*.

Tablica 3.25

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Y
1	0	0	0	0	0	D
2	0	0	0	0	1	A
3	0	0	0	1	0	C
4	1	0	0	1	0	D
5	1	0	0	1	1	B
6	0	0	0	1	1	B
7	0	0	1	0	0	D
8	1	0	1	0	1	B
9	0	0	1	0	1	A
10	0	1	1	0	0	C
11	1	1	1	0	0	E
12	1	1	1	0	1	A

Rozwiązanie

$$P_F = \left(\overline{1,4,7}; \overline{2,9,12}; \overline{3,10}; \overline{5,6,8}; \overline{11}\right)$$

$P_1 \cdot P_5 | P_F = \left(\overline{(1,7)(3,10)}; \overline{(2,9)(6)}; \overline{(4)(11)}; \overline{(5,8)(12)}\right)$ *r* = 2+1= 3

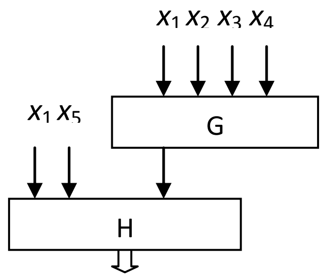
$P_1 \cdot P_2 | P_F = \left(\overline{(1,7)(2,9)(3)(6)}; \overline{(5,8)(4)}; \overline{(10)}; \overline{(11)(12)}\right)$ *r* = 4

$P_2 \cdot P_5 | P_F = \left(\overline{(1,4,7)(3)}; \overline{(2,9)(5,6,8)}; \overline{(10)(11)}; \overline{(12)}\right)$ *r* = 2+1 = 3

A) $U = \{x_1, x_5\}$ (rys. 3.10) B) $U = \{x_2, x_5\}$ (rys. 3.11)

A) $P_1 \cdot P_5 | P_F = \left(\overline{(1,7)(3,10)}; \overline{(2,9)(6)}; \overline{(4)(11)}; \overline{(5,8)(12)}\right)$

$$P_V = P(x_2, x_3, x_4) = \left(\overline{1,2}; \overline{3,4,5,6}; \overline{7,8,9}; \overline{10,11,12}\right)$$



Rys. 3.10

Tworzenie podziału Π_G:

$$\begin{array}{c|c} \overline{1,2} & \overline{3,4,5,6} \\ \overline{7,8,9}; & \overline{10,11,12} \end{array} \quad x_1 \Rightarrow \quad 4,5 \mid 3,6$$

Wektory 4, 5 trzeba oddzielić od 3, 6. Stąd dekompozycja nierozłączna z x1, czyli V' = x1,x2,x3,x4.

$$P_{V'} = \left(\overline{1,2}; \overline{3,6}; \overline{4,5}; \overline{7,9}; \overline{8}; \overline{10}; \overline{11,12}\right)$$

$\Pi_{G'} = \left(\overline{1,2,4,5,7,8,9}; \overline{3,6,10,11,12}\right)$ (tab. 3.27)

$P_H = P(U) \cdot \Pi_{G'} = \left(\overline{1,3,7,10}; \overline{2,6,9}; \overline{4,11}; \overline{5,8,12}\right) \cdot \left(\overline{1,2,4,5,7,8,9}; \overline{3,6,10,11,12}\right) =$

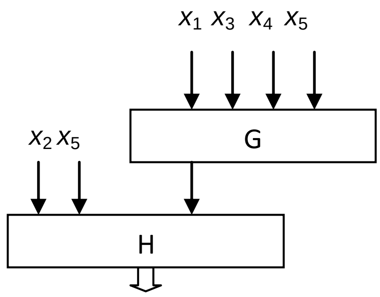
$\left(\overline{1,7}; \overline{3,10}; \overline{2,9}; \overline{6}; \overline{4}, ; \overline{11}; \overline{5,8}; \overline{12}\right)$ (tab. 3.26)

Tablica 3.26. G

	$x_1x_2x_3x_4$	g
1,2	0000	0
3,6	0001	1
4,5	1001	0
7,9	0010	0
8	1010	0
10	0110	1
11,12	1110	1

Tablica 3.27. H

	x_1x_5g'	Y
1,7	000	D
2,9	010	A
3,10	001	C
4	100	D
5,8	110	B
6	011	B
11	101	E
12	111	A



Rys. 3.11

B) ***r* = 3**

$$P_V = P(x_1, x_3, x_4) = \left(\overline{1,2}; \overline{3,6}; \overline{4,5}; \overline{7,9,10}; \overline{8,11,12}\right)$$

$\overline{1,2}$	$\overline{3,6}$
$\overline{4,5}$	
$\overline{7,9,10}$	$\overline{8,11,12}$

7|9 => x_5 10|9 x_2 x_5

Wektor 5 należy oddzielić od wektora 4. Stąd dodatkowo x_5, czyli $V' = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$

$$P_{V'} = \left(\overline{1}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{4}; \overline{5}; \overline{6}; \overline{7,10}; \overline{9}; \overline{8,12}; \overline{11}\right)$$

$$\Pi_{G'} = \left(\overline{1,2,4,7,9,10}; \overline{3,5,6,8,11,12}\right)$$

Tablica 3.28. *G'*

	$x_1x_3x_4x_5$	g
1	0000	0
2	0001	0
3	0010	1
4	1010	0
5	1011	1
6	0011	1
7,10	0100	0
9	0101	0
8,12	1101	1
11	1100	1

Tablica 3.29. H

	x_2x_5g'	Y
1,7	000	D
2,9	010	A
3,10	001	C
4	000	D
5,8	011	B
6	011	B
11	101	E
12	111	A

Zadanie 3.9

Funkcję boolowską z tab. 3.30 należy zrealizować (metodą dekompozycji) na możliwie minimalnej liczbie komórek, z których każda realizuje dowolną pojedynczą funkcję 3 argumentów.

Tablica 3.30

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3
1	0	0	0	0	0	1	1	0
2	0	0	0	1	0	1	0	0
3	0	0	0	1	1	0	1	1
4	0	0	1	1	1	0	0	0
5	0	1	0	0	0	1	0	0
6	1	0	1	1	1	0	0	1
7	1	1	0	0	0	0	1	1
8	1	1	1	0	0	0	0	0
9	1	1	1	0	1	0	0	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1

Rozwiązanie

$$P_F = \left(\overline{1},; \overline{2,5}; \overline{3,7}; \overline{4,8}; \overline{6,9}; \overline{10}\right)$$
$$P_1 = \left(\overline{1,2,3,4,5}; \overline{6,7,8,9,10}\right)$$
$$P_2 = \left(\overline{1,2,3,4,6}; \overline{5,7,8,9,10}\right)$$
$$P_3 = \left(\overline{1,2,3,5,7}; \overline{4,6,8,9,10}\right)$$
$$P_4 = \left(\overline{1,5,7,8,9}; \overline{2,3,4,6,10}\right)$$
$$P_5 = \left(\overline{1,2,5,7,8}; \overline{3,4,6,9,10}\right)$$

Obliczamy *r*-przydatności podziałów reprezentujących pojedyncze zmienne.

$P_1|P_F = \left(\overline{(1)(2,5)(3)(4)}; \overline{(6,9)(7)(8)(10)}\right)$ $\qquad r = 1 + \lceil \log_2 4 \rceil = 1+2 = 3$

$P_2|P_F = \left(\overline{(1)(2)(3)(4)(6)}; \overline{(5)(7)(8)(9)(10)}\right)$ $\qquad r = 1 + \lceil \log_2 5 \rceil = 1+3 = 4$

$P_3|P_F = \left(\overline{(1)(2,5)(3,7)}; \overline{(4,8)(6,9)(10)}\right)$ $\qquad r = 1 + \lceil \log_2 3 \rceil = 1+2 = 3$

$P_4|P_F = \left(\overline{(1)(5)(7)(8)(9)}; \overline{(2)(3)(4)(6)(10)}\right)$ $\qquad r = 1 + \lceil \log_2 5 \rceil = 1+3 = 4$

$P_5|P_F = \left(\overline{(1)(2,5)(7)(8)}; \overline{(3)(4)(6,9)(10)}\right)$ $\qquad r = 1 + \lceil \log_2 4 \rceil = 1+2 = 3$

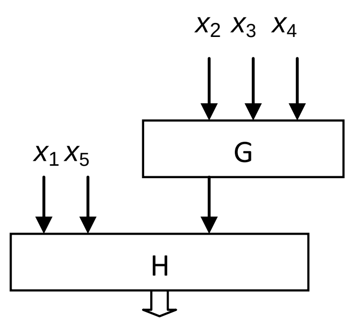
Skoro tylko $\{P_1, P_3, P_5\}$ są 3-przydatne to najlepsze rozwiązanie uzyskamy sprawdzając *r*-przydatności par $\{P_1, P_3\}$, $\{P_1, P_5\}$, $\{P_3, P_5\}$. W ten sposób stwierdzamy, że najlepsza dekompozycja istnieje dla zbiorów

U, V: $U = \{x_1, x_5\}$ $V = \{x_2, x_3, x_4\}$.

$$P(U) = P_1 \cdot P_5 = \left(\overline{1,2,5}; \overline{3,4}; \overline{7,8}; \overline{6,9,10}\right)$$

$P(U)|P_F = P_1 \cdot P_5|P_F = \left(\overline{(1)(2,5)}; \overline{(3)(4)}; \overline{(7)(8)}; \overline{(6,9)(10)}\right)$ $\qquad r = 2 + \lceil \log_2 2 \rceil = 2+1 = 3$

Blok *G* może mieć tylko 1 wyjście (rys. 3.12). Wystarczy zatem sprawdzić spełnienie warunku wystarczającego, tj. istnienie podziału Π_G.



Rys. 3.12

$V = X - U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} - \{x_1, x_5\} = \{x_2, x_3, x_4\}$

$U = \{x_1, x_5\}$ $V = \{x_2, x_3, x_4\}$

$$P(V) = P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 = \left(\frac{000}{1}; \frac{001}{2,3}; \frac{011}{4,6}; \frac{100}{5,7}; \frac{110}{8,9}; \frac{010}{10}\right)$$

Sprawdzamy czy istnieje $\prod_G$, „zgodny" z podziałem $P_U|P_F$. Z podziału $P_U|P_F$ wynika, że $\prod_G$ powinien rozdzielać wektory: 1 od 2 i 5; 3 od 4; 7 od 8 oraz 6 i 9 od 10. Warunki te spełnia podział $\prod_G$:

$$\Pi_g = \left(\frac{000,011,110}{1,4,6,8,9};\frac{001,100,111}{2,3,5,7,10}\right)$$

Łatwo sprawdzić, że podział $\prod_G$ spełnia warunek wystarczający dekompozycji wg zbiorów $U = \{x_1x_5\}$, $V = \{x_2,x_3,x_4\}$, gdyż iloczyn

$$P_H = P(U)\cdot\Pi_G = P(x_1,x_5)\cdot\Pi_G = \left(\frac{00}{1,2,5};\frac{01}{3,4};\frac{10}{7,8};\frac{11}{6,9,10};\right)\cdot\left(\frac{0}{1,4,6,8,9};\frac{1}{2,3,5,7,10}\right)$$

jest nie większy od podziału $P_F = (\overline{1,};\overline{2,5};\overline{3,7};\overline{4,8};\overline{6,9};\overline{10})$.Zatem dekompozycja przedstawiona na rys. 3.12 istnieje.

Zadanie 3.10

Dla funkcji z tablicy 3.31 zaprojektować układ modyfikacji adresu umożliwiający realizację tej funkcji na pamięci o 4 wejściach adresowych. Modyfikator musi być na tyle uniwersalny, że umożliwi realizację tej funkcji dla dowolnych wyjść (y_i oznacza dowolne słowo binarne). Podać wyrażenie boolowskie funkcji modyfikującej oraz zawartość ROM dla komórek o adresach: 0, 1, 2, 3.

Tablica 3.31

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
1	1	0	0	0	0	y_1
2	1	0	0	0	1	y_2
3	1	0	0	1	1	y_3
4	1	0	1	1	0	y_4
5	1	0	1	0	0	y_5
6	0	1	0	1	1	y_6
7	0	1	1	1	0	y_7
8	0	1	1	0	0	y_8
9	0	0	0	0	0	y_9
10	0	0	0	1	1	y_{10}
11	0	0	1	1	0	y_{11}
12	0	0	1	0	0	y_{12}

Rozwiązanie

Wyjścia mają podział zerowy (dla każdego stanu jest inna wartość wyjścia), stąd *r*-przydatności wynikają z liczności elementów w blokach podziału.

$P_1 = (\overline{1,2,3,4,5};\overline{6,7,8,9,10,11,12})$ r = 1+3 = 4

$P_2 = (\overline{1,2,3,4,5,9,10,11,12};\overline{6,7,8,})$ r = 1+4 = 5

$P_3 = (\overline{1,2,3,6,9,10};\overline{4,5,7,8,11,12})$ r = 1+3 = 4

$P_4 = (\overline{1,2,5,8,9,12};\overline{3,4,6,7,10},12)$ r = 1+3 = 4

$P_5 = (\overline{1,4,5,7,8,9,11,12};\overline{2,3,6,10})$ r = 1+3 = 4

$P_1\cdot P_3 = (\overline{1,2,3};\overline{4,5};\overline{6,9,10};\overline{7,8,11,12})$ r = 4

$P_1\cdot P_4 = (\overline{1,2,5};\overline{3,4};\overline{8,9,12};\overline{6,7,10,11})$ r = 4

$$P_1 \cdot P_5 = \left(\overline{1,4,5}; \overline{2,3}; \overline{7,8,9,11,12}; \overline{6,10}\right) \qquad r = 5$$

$$P_3 \cdot P_4 = \left(\overline{1,2,9}; \overline{3,6,10}; \overline{5,8,12}; \overline{4,7,11}\right) \qquad r=4$$

$$P_3 \cdot P_5 = \left(\overline{1,9}; \overline{2,3,6,10}; \overline{4,5,7,8,11,12}\right) \qquad r=5$$

$$P_4 \cdot P_5 = \left(\overline{1,5,8,9,12}; \overline{2}; \overline{4,7,11}, \overline{3,6,10}\right) \qquad r=5$$

Z powyższych podziałów wynika jedno rozwiązanie: $U=\{x_1x_3x_4\}$

$$P_U = P_1 \cdot P_3 \cdot P_4 = \left(\overline{1,2,}; \overline{3}; \overline{4}; \overline{5}; \overline{6,10}; \overline{9}, \overline{8,12}; \overline{7,11}\right)$$

$$P_V = P_1 \cdot P_5 = \left(\overline{1,4,5,9,11,12}; \overline{2,3,10}; \overline{6}; \overline{7,8}\right)$$

Tablica 3.32

	x_2x_5	g
$\overline{1,4,5,9,11,12}$	00	0
$\overline{6}$	11	0
$\overline{2,3,10}$	01	1
$\overline{7,8}$	10	1

Tworzymy podział $\Pi_{G'}$:

$\overline{1,4,5,9,11,12}$	$\overline{2,3,10}$
$\overline{6}$	$\overline{7,8}$

$$\Pi_G = \left(\overline{1,4,5,6,9,11,12}; \overline{2,3,7,8,10}\right)$$

Tablica G z zawartością ROM dla komórek o adresach: 0,1,2,3 (tab. 3.32).

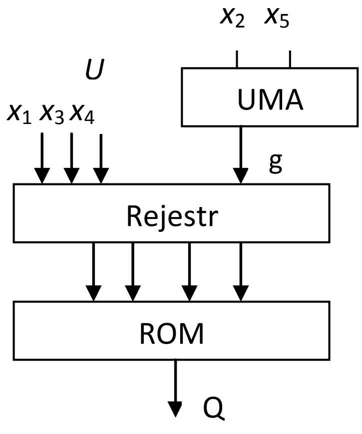
Funkcja modyfikująca ma następujące wyrażenie:

$$g = (x_2\bar{x}_5 + x_2x_5) = \bar{x}_2 \oplus x_5$$

$$P(U) \cdot \Pi_{G'} = \left(\overline{1,2,}; \overline{3}; \overline{4}; \overline{5}; \overline{6,10}; \overline{9}, \overline{8,12}; \overline{7,11}\right) \cdot \left(\overline{1,4,5,6,9,11,12}; \overline{2,3,7,8,10}\right)$$
$$= \left(\overline{1}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{4}; \overline{5}; \overline{6}; \overline{10}; \overline{9}; \overline{12}; \overline{8}; \overline{11}; \overline{7}\right)$$

Tablica 3.33. H

	$x_1x_3x_4$g	Y
1	1000	y_1
2	1001	y_2
3	1011	y_3
4	1110	y_4
5	1100	y_5
6	0010	y_6
10	0011	y_{10}
9	0000	y_9
12	0100	y_{12}
8	0101	y_8
11	0110	y_{11}
7	0111	y_7



Rys. 3.13

3.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 3.11

Dana jest funkcja czterech zmiennych

f(*a,b,c,d*) = ∑(1,4,5,10,12,14)

Dokonać dekompozycji tej funkcji w sposób opisany formułami:

a) h[*g*(*a,b,c*), *d*]

b) *h*[*g*(*b,c*), *a,d*]

Zadanie 3.12

Dla funkcji opisanych zbiorami F, R:

a) *R* = 0, 2, 3, 6, 7, 9, 11, 13, 18, 25
F = 4, 5, 21, 23, 24, 26, 27, 29

b) *R* = 0, 3, 5, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 26
F = 12,13, 17, 18, 19, 21, 29, 31

obliczyć dekompozycje $F = H(x_1, x_2, G(x_3,x_4,x_5))$ z minimalną liczbą wyjść bloku G. W rozwiązaniu podać: tablice prawdy i minimalne wyrażenia boolowskie dla funkcji *G* oraz *H*.

Zadanie 3.13

Funkcję *f*:

F = {1, 5, 8, 12, 30}, *R* = {2, 6, 15, 18, 20, 27}.

zdekomponować do postaci $F = H(x_1, x_2, G(x_3,x_4,x_5))$. Funkcje *G* i *H* podać w postaci minimalnych wyrażeń boolowskich typu suma iloczynów.

Zadanie 3.14

Dana jest funkcja czterech zmiennych:

f(*a*,*b*,*c*,*d*) = ∑ (1,4,5,10,12,14)

Dokonać dekompozycji tej funkcji w sposób opisany formułami:

a) $h[g(a,b,c), d]$

b) $h[g(b,c), a,d]$

Zadanie 3.15

Funkcję f podaną w tabl. 3.34 zdekomponować do postaci

$f = h(x_1, x_2, g(x_3,x_4,x_5))$.

Funkcje g i h podać w postaci minimalnych wyrażeń boolowskich typu suma iloczynów.

Tablica 3.34

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f
1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	1	0
3	0	0	1	0	1	0
4	0	1	1	1	1	0
5	0	0	1	1	0	0
6	0	1	0	0	1	1
7	0	0	1	0	0	1
8	0	1	1	1	0	1
9	1	0	1	0	1	1
10	1	1	0	0	1	1
11	1	0	0	0	1	1

Zadanie 3.16

Dla funkcji opisanej w tablicy 3.35 należy wyznaczyć dekompozycje:

$H(G(x_1, x_2), x_3, x_4, x_5)$,

$H(G(x_1, x_2), G(x_3, x_4), x_5)$,

Tablica 3.35

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f
1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	0	0
3	0	0	0	1	1	0
4	0	1	1	1	1	0
5	0	0	1	0	1	0
6	0	1	0	1	0	1
7	0	0	0	0	1	1
8	0	1	1	0	1	1
9	1	0	0	1	1	1
10	1	1	0	1	0	1
11	1	0	0	1	0	1

Zadanie 3.17

Dla funkcji F z tablicy 3.36 zbiory podziałów $\{P_1, P_2\}$, $\{P_1, P_3\}$, $\{P_1, P_4\}$, $\{P_1, P_5\}$, $\{P_2, P_3\}$, $\{P_3, P_4\}$,$\{P_4, P_5\}$, są 4-przydatne.

a) Obliczyć dekompozycję tej funkcji w strukturze:

$F = H(x_i, x_j, x_k, G_0)$.

b) Obliczyć dekompozycję tej funkcji w strukturze:

$F = H(G_1(x_i, x_j, x_k), G_0)$

i wykazać, że jest tylko jedna taka dekompozycja.

W rozwiązaniu m.in. podać tablice prawdy funkcji G_0 i G_1.

Tablica 3.36

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3
1	1	1	1	0	1	0	0	0
2	0	1	1	0	1	0	0	1
3	0	1	0	1	0	0	0	1
4	1	0	0	1	0	0	0	0
5	1	1	1	0	0	0	1	0
6	0	0	1	1	1	0	1	1
7	1	1	0	0	0	0	1	1
8	0	1	0	0	0	1	0	0
9	1	1	0	1	0	1	0	1
10	0	0	1	1	0	1	0	1

Zadanie 3.18

Dla funkcji F z tablicy 3.37 zbiory podziałów $\{P_1, P_3\}$, $\{P_1, P_4\}$, $\{P_3, P_4\}$, $\{P_3, P_5\}$, $\{P_4, P_5\}$, są 4-przydatne. Obliczyć wszystkie możliwe realizacje tej funkcji na pamięci ROM o 4 wejściach adresowych. Dla realizacji rozłącznej wystarczy podać podział Π_g i narysować schemat blokowy dekompozycji. Dla realizacji nierozłącznej podać wyrażenie boolowskie funkcji modyfikującej adres oraz tablicę adresowania ROM dla 3 – 4 wierszy.

Tablica 3.37

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
1	0	0	0	1	0	y_1
2	0	0	1	1	1	y_2
3	1	0	0	1	1	y_3
4	1	0	1	0	1	y_4
5	1	0	1	1	0	y_5
6	1	1	0	0	0	y_6
7	1	1	1	0	1	y_7
8	0	0	0	0	0	y_8
9	0	0	0	1	1	y_9
10	0	0	1	0	0	y_{10}
11	0	0	1	1	0	y_{11}
12	0	1	1	0	0	y_{12}
13	1	1	0	0	1	y_{13}

Zadanie 3.19

Dla funkcji F z tab. 3.38 zbiory podziałów $\{P_1, P_3\}$, $\{P_1, P_5\}$, $\{P_2, P_4\}$, $\{P_3, P_4\}$, $\{P_3, P_5\}$, $\{P_4, P_5\}$, są 4-przydatne.

Obliczyć wszystkie możliwe realizacje tej funkcji na pamięci ROM o 4 wejściach adresowych. Dla każdej realizacji narysować schemat blokowy dekompozycji. Dla jednej z tych realizacji podać wyrażenie boolowskie funkcji modyfikującej adres oraz tablicę adresowania dla 3 – 4 wierszy. Dla następnych realizacji wystarczy podać podział Π_g.

Tablica 3.38

i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
1	0	0	0	0	1	0
2	0	1	1	0	1	1
3	1	0	0	0	0	2
4	1	0	1	0	1	3
5	1	1	1	0	0	4
6	1	1	1	1	0	5
7	0	0	0	1	0	6
8	0	0	0	1	1	7
9	0	0	1	0	0	8
10	0	0	1	1	1	9
11	1	0	0	1	1	10
12	1	1	0	0	0	11
13	1	1	0	0	1	12

Zadanie 3.20

Dla funkcji F z tablicy 3.39 należy obliczyć wszystkie możliwe dekompozycje z minimalną liczbą wejść do bloku H. Należy uzasadnić, że podane rozwiązania wyczerpują wszystkie możliwości. W rozwiązaniu m.in. podać tablice prawdy funkcji *H* oraz funkcji *G*. Wskazówka: wykorzystać fakt, że spośród par podziałów P_i, P_j, tylko pary P_1, P_3, oraz P_3, P_5, są 3-przydatne, a wszystkie pozostałe są 4-przydatne.

Tablica 3.39

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2
1	0	0	0	1	1	0	0
2	0	0	0	1	0	1	0
3	0	1	1	0	0	0	1
4	0	1	1	0	1	0	0
5	0	1	1	1	0	0	1
6	1	1	0	0	0	0	0
7	1	1	0	1	0	0	0
8	1	1	1	0	0	1	0
9	1	1	1	1	0	0	1
10	1	0	0	0	1	0	1
11	1	0	0	1	1	0	0
12	1	0	0	1	0	0	0

Zadanie 3.21

Wiedząc, że dla funkcji z tab. 1 pary P_1, P_4; P_1, P_5; P_3, P_5; P_4, P_5 są 4-przydatne, zaprojektować strukturę z modyfikacją adresu umożliwiającą realizację tej funkcji na pamięci o 4 wejściach adresowych. Modyfikator musi być na tyle uniwersalny, że umożliwi realizację tej funkcji dla dowolnych wyjść (y_i oznacza dowolne słowo binarne). W rozwiązaniu należy m.in. podać: podział $\prod_G$ opisujący modyfikator oraz wyrażenie boolowskie funkcji modyfikującej adres i zawartość ROM dla dwóch, trzech komórek.

Tablica 3.40

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
1	1	0	0	0	0	y_1
2	0	1	0	1	1	y_2
3	1	1	1	1	1	y_3
4	0	1	1	0	0	y_4
5	0	0	1	1	0	y_5
6	0	0	1	0	0	y_6
7	1	0	0	0	1	y_7
8	0	0	0	0	1	y_8
9	1	0	1	0	1	y_9
10	0	0	1	0	1	y_{10}
11	0	0	1	1	1	y_{11}
12	1	1	1	0	0	y_{12}

4. Układy sekwencyjne

4.1 Zadania z rozwiązaniami

Zadanie 4.1

Zaprojektować licznik mod 8 z wejściem zezwalającym *E*, pracujący w naturalnym kodzie binarnym. Przerzutniki do realizacji dobrać tak, aby uzyskać najprostszy schemat logiczny licznika. W rozwiązaniu podać schemat logiczny licznika (bramki i przerzutniki).

Rozwiązanie

Tablicę przejść-wyjść licznika pokazano w tab. 4.1, a tablicę wzbudzeń dla przerzutników typu D w tab. 4.2 (uwaga: opis tablicy Q_2 Q_1 Q_0 w kodzie Graya). Z tablicy tej odczytujemy następujące wyrażenia na funkcje wzbudzeń przerzutników:

$$D_2 = Q_2\bar{E} + Q_2\bar{Q}_1 + Q_2\bar{Q}_0 + \bar{Q}_2Q_1Q_0E$$

$$D_1 = Q_1\bar{E} + Q_1Q_0 + \bar{Q}_1Q_0E$$

$$D_{10} = Q_0\bar{E} + \bar{Q}_0E$$

Tablica 4.1. Tablica przejść-wyjść licznika

i NKB	Q_2 Q_1 Q_0 \ *E*	0	1	*y*
0	0 0 0	0 0 0	0 0 1	0
1	0 0 1	0 0 1	0 1 0	0
2	0 1 0	0 1 0	0 1 1	0
3	0 1 1	0 1 1	1 0 0	0
4	1 0 0	1 0 0	1 0 1	0
5	1 0 1	1 0 1	1 1 0	0
6	1 1 0	1 1 0	1 1 1	0
7	1 1 1	1 1 1	0 0 0	1

Tablica 4.2. Tablica wzbudzeń przerzutników typu D

$Q_2Q_1Q_0$ \ *E*	0	1
000	000	001
001	001	010
011	011	100
010	010	011
110	110	111
111	111	000
101	101	110
100	100	101

$D_2D_1D_0$

$Q_2Q_1Q_0$ \ *E*	0	1
000	0	0
001	0	0
011	0	1
010	0	0
110	1	1
111	1	0
101	1	1
100	1	1

D_2

$Q_2Q_1Q_0$ \ E	0	1
000	0	0
001	0	1
011	1	0
010	1	1
110	1	1
111	1	0
101	0	1
100	0	0

D_1

$Q_2Q_1Q_0$ \ E	0	1
000	0	1
001	1	0
011	1	0
010	0	1
110	0	1
111	1	0
101	1	0
100	0	1

D_0

Analogiczną tablicę wzbudzeń dla przerzutników typu T pokazano w tab. 4.3.

Tablica 4.3. Tablice wzbudzeń przerzutników typu T

$Q_2Q_1Q_0$ \ E	$Q'_2Q'_1Q'_0$ (0)	$Q'_2Q'_1Q'_0$ (1)	T_2 (0)	T_2 (1)	T_1 (0)	T_1 (1)	T_0 (0)	T_0 (1)
000	000	001	0	0	0	1	0	1
001	001	010	0	0	0	1	0	0
011	011	100	0	1	0	1	0	1
010	010	011	0	0	0	0	0	0
110	110	111	0	0	0	0	0	1
111	111	000	0	1	0	1	0	0
101	101	110	0	0	0	1	0	1
100	100	101	0	0	0	0	0	0

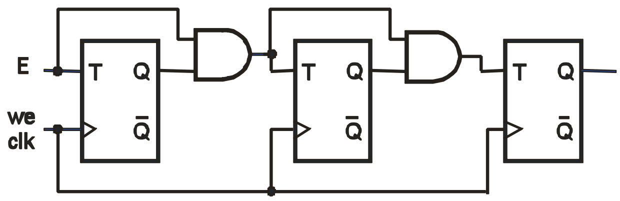
Z tablicy tej wyznaczono następujące funkcje wzbudzeń:

$T_2 = EQ_1Q_0$ $\quad T_1 = EQ_0$ $\quad T_0 = E$

Po odpowiednich przekształceniach otrzymamy:

$T_2 = Q_1T_1$ $\quad T_1 = EQ_0$ $\quad T_0 = E$

Prowadzi to do schematu, jak na rys. 41. Jest to najprostszy schemat logiczny licznika synchronicznego pracującego w naturalnym kodzie binarnym.



Rys. 4.1. Schemat licznika mod. 8 zrealizowanego na przerzutnikach typu T

Zadanie 4.2

Mając do dyspozycji przerzutnik typu D i dowolne bramki logiczne skonstruować przerzutnik typu T. Narysować schemat logiczny.

Rozwiązanie

Tablica 4.4

Q \ T	0	1
0	0	1
1	1	0

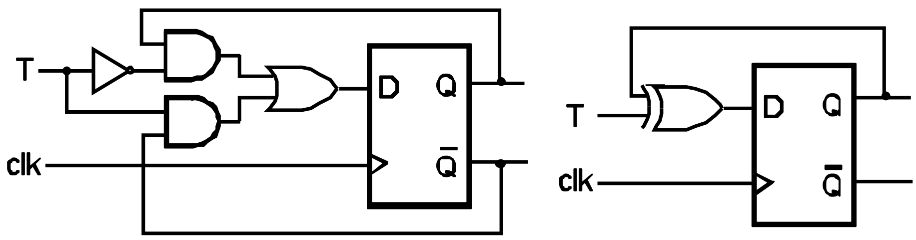
$D = q'$

Z tablicy przejść przerzutnika typu T (tab. 4.4) odczytujemy wyrażenie na funkcję wzbudzeń przerzutnika typu D, pamiętając, że $D = q'$:

$$q' = D = \bar{q}t + q\bar{t} = q \oplus t$$

Prowadzi to do schematu logicznego, jak na rys.4.2a, a z użyciem bramki ex-or – do schematu z rys. 4.b.

a) b)



Rys. 4.2. Schemat przerzutnika typu T zrealizowanego na przerzutniku typu D: a) z użyciem bramek AND i OR, b) z użyciem bramki ex-or

Zadanie 4.3

a) Dokonać redukcji stanów dla automatu z tablicy przejść-wyjść (tab. 4.5). W rozwiązaniu podać obliczenia klas zgodności oraz tablicę automatu minimalnego;

b) dla automatu minimalnego obliczyć funkcje wzbudzeń dla przerzutników typu D oraz JK.

Tablica 4.5

S \ x	0	1	0	1
1	5	4	0	0
2	2	7	1	1
3	–	1	–	0
4	–	3	–	0
5	2	–	1	–
6	6	–	1	–
7	–	8	–	0
8	–	–	–	1

Rozwiązanie

W tab. 4.6 zaznaczono pary sprzeczne (×), pary zgodne (v) oraz pary zgodne warunkowo (np. 1,4). Po sprawdzeniu zgodności warunkowej wykreślono pary 1,7; 3,7 oraz 4,7.

Następnie stosując algorytm wyznaczania MKZ wg par zgodnych otrzymano:

Tablica 4.6

2	×						
3	1,4	×					
4	3,4	×	1,3				
5	×	v	v	v			
6	×	2,6	v	v	2,6		
7	~~4,8~~	×	~~1,8~~	~~3,8~~	v	v	
8	×	v	×	×	v	v	×
	1	2	3	4	5	6	7

$S_1 = \varnothing$	{1}
$S_2 = \varnothing$	{2}{1}
$S_3 = \{1\}$	{1,3}{2}
$S_4 = \{1,3\}$	{1,3,4}{2}
$S_5 = \{2,3,4\}$	{3,4,5}{2,5}{1,3,4}
$S_6 = \{2,3,4,5\}$	{3,4,5,6}{2,5,6}~~{3,4,6}~~{1,3,4}
$S_7 = \{5,6\}$	{5,6,7}~~{5,6,7}~~{1,3,4}{2,5,6}{3,4,5,6}
$S_8 = \{2,5,6\}$	~~{5,6,8}~~{2,5,6,8}{5,6,7}{1,3,4}{3,4,5,6}

MKZ = {1,3,4},{2,5,6,8},{3,4,5,6},{5,6,7}

Warunek pokrycia spełniają klasy {1,3,4}, {2,5,6,8}, {5,6,7}. Warunek zamkniętości jest sprawdzony w tab. 4.7.

Przyporządkowując odpowiednio nazwy stanów A, B, C otrzymujemy tablicę przejść wyjść (tab. 4.8a) automatu minimalnego, a zakodowana tablica jest pokazana w tab. 4.8b. Tablica w formie standardowej tablicy Karnaugha jest podana w tab. 4.8c.

Tablica 4.7

S \ x	0	1	0	1
1,3,4	5---	413	0	0
2,5,6,8	226-	7---	1	1
5,6,7	--26	--8	1	0

Tablica 4.8

a)

S \ x		0	1	0	1
A	1,3,4	B/C	A	0	0
B	2,5,6,8	C	C	1	1
C	5,6,7	B	B	1	0
		S		y	

b)

q_1q_0 \ x	0	1	0	1
00	11	00	0	0
01	11	11	1	1
11	01	01	1	0
	$q'_1q'_0$		y	

c)

q_1q_0 \ x	0	1	0	1
00	11	00	0	0
01	11	11	1	1
11	01	01	1	0
10	--	--	--	--
	$q'_1q'_0$		y	

Z tab. 4.8c bezpośrednio można wyznaczyć funkcje wzbudzeń dla przerzutników typu D (4.9). Funkcja wyjściowa jest taka, jaką obliczono dla realizacji D.

Tablica 4.9

q_1q_0 \ x	0	1	0	1
00	1	0	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	1	0
10	–	–	–	–
	D_1		y	

$$D_1 = \bar{q}_1\bar{x} + \bar{q}_1 q_2 \qquad D_0 = \bar{q}_1 + q_2 \qquad y = q_2\bar{x} + \bar{q}_1 q_2$$

Do wyznaczenia funkcji wzbudzeń dla realizacji na przerzutnikach JK Tab. 4.8c została przekształcona (zgodnie z macierzą wzbudzeń dla przerzutnika JK) do tablic Karnaugha (tab. 4.10)

Tablica 4.10

q_1q_0 \ x	0	1
00	1	1
01	1	1
11	–	–
10	–	–

J_1

q_1q_0 \ x	0	1
00	–	–
01	–	–
11	1	1
10	–	–

K_1

$J_1 = 1$

$K_1 = 1$

q_1q_0 \ x	0	1
00	1	0
01	–	–
11	–	–
10	–	–

J_0

q_1q_0 \ x	0	1
00	–	–
01	0	0
11	0	0
10	–	–

K_0

$J_0 = \bar{x}$

$K_0 = 0$

4.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 4.4

Mając do dyspozycji przerzutnik typu D i dowolne bramki logiczne skonstruować przerzutnik typu JK. Narysować schemat logiczny.

Zadanie 4.5

Mając do dyspozycji przerzutnik typu JK i dowolne bramki logiczne skonstruować przerzutnik typu D oraz przerzutnik typu T. Narysować schematy logiczny.

Zadanie 4.6

Zaprojektować licznik modulo 16 z czterema wejściami danych $x_1 \div x_4$ i wejściem sterującym s. Jeżeli $s = 0$, to licznik liczy impulsy zegara, a jeśli $s = 1$, to stan wejść $x_1 \div x_4$ jest synchronicznie przepisywany do przerzutników licznika. Dane są przerzutniki JK i bramki NAND.

Zadanie 4.7

Zaprojektować automat wykrywający każde pojawienie się sekwencji:

a. 0011,

b. 00011,

w dowolnie długim ciągu wejściowym. Dane są przerzutniki JK, bramki I i NAND.

Zadanie 4.8

Zaprojektować układ wykrywający parzystą liczbę sekwencji 0011 (brak tych sekwencji oznacza ich liczbę parzystą). Dane przerzutniki JK i bramki NAND.

Zadanie 4.9

Zaprojektować automat wykrywający ciąg dokładnie trzech albo dokładnie czterech następujących bezpośrednio po sobie jedynek w dowolnie długim słowie wejściowym (dane są elementy JK i NAND).

Zadanie 4.10

Zaprojektować automat do kontroli czterobitowych słów podawanych szeregowo na jego wejście. Automat ma sprawdzać, czy słowa należą do kodu 2 z 4. Dane przerzutniki JK i dowolne bramki.

Zadanie 4.11

Zaprojektować układ synchroniczny o wejściach *x*, *s* oraz wyjściu *y*, sygnalizujący jedynką na wyjściu *y* fakt, że na wejściu **x** pojawia się sekwencja 0111, gdy $s = 0$, natomiast sekwencja 1000, gdy $s = 1$. Założyć, że zmiana sygnału s może nastąpić tylko w stanie początkowym s_0.

Zadanie 4.12

Zaprojektować synchroniczny układ do sprawdzania poprawności transmisji informacji przesyłanej w kodzie „2 z 5”, tzn. sprawdzający, czy na wejściu w czasie pięciu kolejnych taktów zegarowych pojawiły się dokładnie dwie jedynki.

Zadanie 4.13

Dany jest automat o tablicy przejść-wyjść (tab. 4.11). Wyznaczyć automat względem niego minimalny.

Tablica 4.11

$S \backslash x_1x_2$	00	01	11	10	00	01	11	10
1	3	1	–	–	0	–	–	–
2	6	2	1	–	–	0	–	–
3	–	–	4	–	1	–	0	–
4	1	–	–	1	0	–	–	1
5	–	5	2	1	–	–	1	1
6	–	2	6	1	–	1	–	1

Zadanie 4.14

Zminimalizować automat o zadanej tablicy przejść-wyjść. (tab. 4.12)

Tablica 4.12

$S \backslash X$	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
1	3	–	2	0	–	–
2	–	4	6	–	0	0
3	5	–	–	1	–	0
4	–	1	1	–	1	–
5	1	–	6	–	–	–
6	4	5	6	–	–	–

Zadanie 4.15

Zminimalizować automat zadany tablicą przejść-wyjść (tab. 4.13).

Tablica 4.13

$S \backslash X$	0	1	0	1
1	3	–	–	–
2	–	6	–	0
3	4	5	1	–
4	6	–	1	–
5	5	1	–	–
6	4	7	1	1
7	2	3	0	0

Zadanie 4.16

Zminimalizować automat zadany tablicą przejść-wyjść (tab. 4.14).

Tablica 4.14

$S \backslash X$	0	1	0	1
1	8	7	0	1
2	3	5	0	0
3	2	1	0	0
4	5	8	1	0
5	8	4	0	1
6	5	3	1	0
7	1	8	1	0
8	4	6	0	1

Zadanie 4.17

Zminimalizować automat zadany tablicą przejść-wyjść (tab. 4.15).

Tablica 4.15

S \ X	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
1	2	–	6	0	–	0
2	4	5	7	0	1	0
3	6	8	2	0	1	0
4	3	–	8	0	–	0
5	–	4	–	–	1	0
6	3	2	4	0	–	0
7	5	4	–	1	1	–
8	–	6	5	–	1	0

Zadanie 4.18

Zminimalizować automat z tablicy przejść-wyjść (tab. 4. 16).

Tablica 4.16

S \ X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4
1	–	5	1	3	–	1	–	1
2	–	2	5	6	–	–	1	1
3	6	–	–	2	0	–	–	1
4	–	–	3	–	1	–	0	–
5	1	5	6	–	–	0	–	–
6	4	6	–	–	–	–	–	–

Zadanie 4.19

Zminimalizować automat zadany tablicą przejść-wyjść (tab. 4.17).

Tablica 4.17

S \ X	0	1	0	1
1	5	4	5–	1
2	3	3	–	1
3	7	9	–	–
4	3	3	1	1
5	3	3	–	2
6	2	5	2	–
7	8	6	2	–
8	5	5	1	–
9	–	6	–	–

Zadanie 4.20

Przeprowadzić minimalizację liczby stanów automatów z tab. 4.18.

Tablica 4.18

a)

S \ X	a	b	a	b
0	2	5	0	–
1	3	5	–	0
2	–	1	1	1
3	1	–	1	1
4	2	5	1	0
5	1	–	2	1

b)

S \ X	1	2	1	2
1	2	–	–	–
2	1	4	–	1
3	4	–	–	–
4	3	6	–	2
5	6	–	–	–
6	5	2	–	3

c)

S \ X	0	1	0	1
1	3	–	0	–
2	4	3	0	0
3	–	5	–	1
4	6	6	–	0
5	6	6	0	–
6	–	–	–	–

d)

S \ X	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
1	2	5	1	0	0	0
2	3	–	2	0	–	0
3	4	–	3	0	–	1
4	1	–	4	0	–	1
5	6	–	–	0	–	–
6	5	1	–	0	1	–

e)

S \ X	1	2	1	2
1	3	2	1	1
2	3	2	0	1
3	2	3	0	1
4	3	4	1	1

f)

S \ X	1	2	1	2
1	1	4	0	1
2	4	3	1	0
3	5	2	1	0
4	1	3	0	0
5	1	2	0	0

g)

S \ X	a	b	a	b
0	2	5	0	–
1	3	5	–	0
2	–	1	1	1
3	1	–	1	1
4	2	5	1	0
5	1	–	2	1
6	1	–	2	1
7	5	8	–	1
8	6	7	–	1

h)

S \ X	a	b	c	a	b	c
1	1	2	5	0	–	0
2	2	3	4	0	–	0
3	2	1	4	0	–	0
4	–	2	7	–	–	1
5	–	1	7	–	–	1
6	1	2	5	–	–	0
7	1	2	8	1	1	0
8	6	3	6	0	0	1

Zadanie 4.21

Wyznaczyć automaty minimalne dla tablicy przejść-wyjść –tab. 4.19 .

Tablica 4.19

S \ X	a	b	c	d	y
1	1	5	–	9	0
2	3	2	6	–	0
3	3	2	–	9	0
4	4	10	–	–	0
5	1	5	6	–	0
6	–	10	6	8	1
7	–	10	7	8	1
8	4	–	7	8	1
9	1	–	6	9	0
10	3	10	7	–	0

Zadanie 4.22

Dla automatów z zadania 4.20 wyznaczyć rodziny wszystkich maksymalnych zbiorów stanów sprzecznych.

Zadanie 4.23

Dla automatów z tab. 4.20 przeprowadzić minimalizację liczby stanów.

Tablica 4.20

a)

S \ X	0	1	0	1
1	2	3	0	0
2	1	3	0	0
3	4	5	1	1
4	3	5	1	1
5	1	3	1	0

b)

S \ X	0	1	0	1
1	–	3	1	0
2	–	4	1	0
3	3	1	1	1
4	4	2	1	1
5	5	4	1	0

Zadanie 4.24

Zminimalizować i zrealizować na przerzutnikach typu D oraz JK automaty podane w tablicach 4.21 a i b.

Tablica 4.21

a)

S \ X	*a*	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*
1	–	3	4	2	–	1	1	1
2	4	–	–	–	0	–	–	–
3	6	6	–	–	0	1	–	–
4	–	6	1	5	–	0	0	1
5	–	–	2	–	–	–	1	–
6	3	–	2	3	0	–	0	1

b)

S \ X	0	1	0	1
1	2	6	0	0
2	3	1	1	1
3	–	4	–	0
4	–	5	–	0
5	3	–	1	–
6	7	–	1	–
7	–	8	–	0
8	–	–	–	1